제 8장. 통계적 추정

개요: 통계적 추정(추론)은 모집단에서 추출된 표본의 정보로 모집단에 대한 값의 추측 또는 그 값에 대한 확신을 결정하는 과정이며 다음의 두 단계가 있다.

통계적 추정(statistical estimation): 모수인 평균(m), 분산(s^2), 표준편차(s), 상관계수(r)가 갖는 값과 범위를추정.

가설검정(hypothesis testing): 모수에 대한 통계적 추정값의 옳고 그름을 판단.

모집단의 전수조사는 거의 불가능하므로 모집단으로부터 일정한 표본을 추출하여 모집단의 평균(μ), 분산(σ^2), 표준편차(σ), 비율(p), 상관계수(ρ) 등을 추정하고 검정을 통해 모수에 대한 특징을 알아낸다. 이러한 모수에 대한 추정과 가설검정은 표본통계량에 의해 이루어진다.

[예제] 모 제약회사에서 약품성분의 변동이 모표준편차로 10mg 이하가 되는 새로운 제조방법을 연구하였다. 그러나 새로운 제조방법은 비용이 많이 들어 약품성분의 변동이 7mg 이하가 되지 않으면 채산이 맞지 않는다. 실제 제조실험을 10회 한 결과 자료는 다음과 같다. 단 모집단은 정규분포이다.

5.728, 5.722, 5.727, 5.728, 5.723, 5.731, 5.719, 5.724, 5.726, 5.722

(1) 만일 모표준편차가 7mg 이하라고 하면 모표준편차는 얼마라고 기대할 수 있는가?

(2) 새로운 제조방법은 약품성분의 모표준편차가 7mg 이하라고 생각할 수 있는가?

이 경우 질문 (1)은 추정이고, (2)는 가설검정의 문제이다.(1)의 추정은 8장, (2)의 검정은 9장에서 각각 공부한다.

모집단의 특성을 추정하는 방법

점추정(point estimation): "모표준편차는 5.723mg"처럼 모수 θ를 단일 값으로 추정하는 것.

구간추정(interval estimation): "모표준편차가 신뢰률 95%로 5.7224에서 5.7276의 구간에 존재"처럼 모수를 포함할 확률을 명확하게 해서 모수를 포함하는 구간의 하한과 상한을 표시하는 방법.

8.1 점추정

8.1.1 추정량과 추정값

모수 θ(μ, σ^2, σ, p, ρ)를예측하기 위하여 점추정량 θ를 추정한다.

추정량과 추정값: 표본 데이터로부터 미지의 모수 θ를 추정하기 위하여 이용되는 통계량.

$\theta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$을 θ의 추정량이라 하고, θ의 측정값 $\theta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$를 θ의 추정값이라 한다.

모수를 점추정하는 판단기준은 다음과 같다.

점추정의 판단기준

(1) 불편추정량: 통계량 중에서 기대치가 모수와 일치.

(2) 유효추정량: 불편추정량 중에서 분포의 표준편차가 가장 작은 추정량.

[예제] 표본의 평균 $\bar{x}$와 중앙값 x은 모두 불편추정량을 만족하지만 유효추정량은 같지 않다. 각각의 분포표준오차(Standard Error: SE)는 아래와 같이 서로 다르다.

※ 앞으로 Standard Error는 SE 대신에 D로 표기하도록 한다.

$$SE(\bar{x}) = D(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad\qquad SE(x) = D(x) = m_3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$m_3 \geq 1$ 이므로 $D(\bar{x}) \leq D(x)$.

따라서유효추정량의 조건 때문에 점추정량으로 표본평균 $\bar{x}$를 사용한다. 여기서 $\bar{x}$는 모평균 μ에 대한 최소분산 불편추정량이다.

8.1.2 점추정의 성질

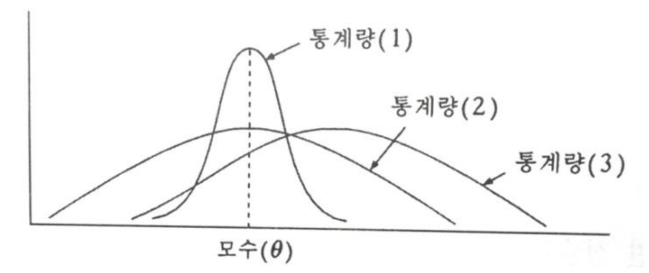
모수를 추정하는 방법은 여러가지가 있다. 예를 들면 모평균 μ를 추정하고자 한다면 이것은 산술평균($\bar{x}$), 중앙값(x), 최빈값(M_o), 기하평균(G)등이 있다. 모수 추정량 θ의 좋고 나쁨은 추정량의 표본분포가 모수 θ 주위에 어떤 형태로 분포되어 있는가에 달려 있다. 바람직한 추정량 θ의 조건으로 다음과 같은 것이 있다.

1) 불편성

불편추정량(unbiased estimator)일 때, 즉 $E(\theta) = \theta$

$E(\theta) \neq \theta$ 이면 편의추정량(biased estimator)

불편추정량과 편의추정량 분포상태를 아래그림과 같이 나타낼 수 있다.



모수와 통계량의 분포

2) 유효성

θ가 가장 바람직하려면 모수 θ에 집중되어 있어야 한다. 즉 모든 불편추정량중에서 분산이 가장 작아야 하고, 모수 θ에 관한 추정량 θ의 분산을 평방평균오차(MSE: mean square error) 이어야 한다.

$MSE = E(\theta - \theta)^2$

추정량들 사이의 상대적 유효성(Relative Effectiveness): $RE = \dfrac{MSE(\theta_2)}{MSE(\theta_1)}$

위의 그림 모수와 통계량의 분포에서 θ_1 과 θ_2 는 같은 불편추정량이지만 θ_1 이 θ_2 보다 모수 θ 에 집중되어 있기 때문에 θ_1 이 보다 더 바람직하다.

유효추정량: 다음의 관계가 성립하면 θ_1 은 θ_2 보다 유효하다.

$$Var(\theta_1) < Var(\theta_2)$$

$$D(\theta_1) < D(\theta_2)$$

[보기 8_1] 모평균 μ 를 추정하고자 모집단에서 추출한 확률표본을 (X_1, X_2, X_3) 라 할 때 다음과 같은 두 가지 추정량을 생각하자.

$$\mu_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \qquad \mu_2 = \frac{X_1 + 3X_2 + 5X_3}{3}$$

(1) 관측값이 $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$ 가 얻어졌다면 각각의 추정량에 의한 추정값은 얼마인가?

(2) 두 추정량 μ_1, μ_2 가 모평균 μ 의 불편추정량임을 보여라.

(3) μ_1, μ_2 에 대한 유효추정량은 어느것인지를 보여라.

(풀이) (1) $\mu_1 = \dfrac{3+4+5}{3} = 4$ $\qquad$ $\mu_2 = \dfrac{3+3(4)+5(5)}{3} = 4.44$

(2) $E(\mu_1) = E(\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}) = \dfrac{1}{3}[E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)] = \dfrac{1}{3}(3\mu) = \mu$

$$E(\mu_2) = E(\frac{X_1 + 3X_2 + 5X_3}{9}) = \frac{1}{9}[E(X_1) + 3E(X_2) + 5E(X_3)] = \frac{1}{3}(9\mu) = \mu$$

(3) 표준오차(Standard Error): $D(\mu_1) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2}{9}} = 0.577\sigma$

$$D(\mu_2) = \sqrt{\frac{\sigma^2 + 9\sigma^2 + 25\sigma^2}{81}} = 0.657\sigma$$

따라서 μ_1 이 μ_2 보다 유효한 추정량이다.

3) 일치성

표본의 크기가 매우 크다면 추정값은 참값에 가까워 진다. 이것을 일치추정량이라 한다.

다음의 관계가 있으면 일치추정량이다.

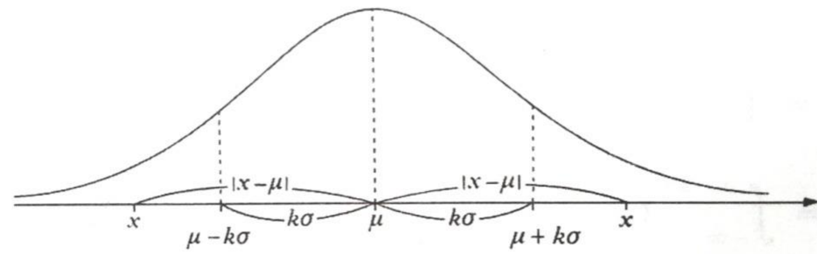
$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta - \theta| < \varepsilon) = 1 \ \ or \ \ \lim_{n\to\infty} P(|\theta - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

$Var(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ 이므로 $n \to \infty$ 이면 $Var(\overline{X}) = 0$, 즉 $\overline{X}$ 와 μ 는 일치하며, 이 경우 $\overline{X}$ 는 μ 의 일치추정량이다.

추정량의 일치성을 밝히는 데 체비셰프 부등식이 유용하게 쓰인다.

체비셰프 부등식: 임의의 양수 k 에 대해

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2} \quad or \quad P[|X - \mu| < k\sigma] \leq 1 - \frac{1}{k^2}$$



체비셰프 부등식의 관계

[보기 8_2] 구간이 $[X-3\sigma, X+3\sigma]$로 주어질 때, $k=4$라면 측정치가 이 구간에 속할 확률을 구하여라.

(풀이) $P = 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{15}{16}$

[보기 8_3] 표본이 $n=36$이고 $P[-0.4 \le \bar{x} - \mu \le 0.4]$일 때 $k=3$이라면 체비셰프 부등식을 이용하여 모분산을 구하여라.

(풀이) $P[-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} - \mu \le k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1 - \frac{1}{k^2}$

$k=3$: $\frac{3\sigma}{36} = 0.4 \;\rightarrow\; \sigma = 0.8 \qquad \therefore \sigma^2 = 0.64$

8.2 구간추정

구간이 모수의 참값을 포함시킬 확률을 **신뢰수준**(confidence level) 또는 신뢰율이라 하고 보통 95%로 정하며 이것을 유의수준 α와 $1-\alpha$의 관계에 있다. 보증된 신뢰율($1-\alpha$)로 모수 θ를 포함하는 구간을 **신뢰구간**(confidence interval)이라 하며 신뢰구간의 상한과 하한을 **신뢰한계**(confidence limit)라 부른다. <u>신뢰구간을 구하려면 모수의 점추정량을 통계량으로 정하고 이 통계량의 분포를 생각하여 신뢰율을 정해서 모수를 포함하도록 한다.</u>

※ **신뢰수준**(신뢰율: confidence level): 구간이 모수를 포함할 확률.

※ **신뢰구간**(confidence interval): 신뢰수준으로 모수를 포함하는 구간.

※ **신뢰구간 결정 방법**: 모수의 점추정량을 통계량으로 정하고 신뢰율을 정해서 모수를 포함시킴.

8.3 모평균의 추정

8.3.1 모평균의 점추정

(1) 추정량: $\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

(2) σ를 알 때 추정량의 표준오차(Standard Error): $D(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(3) σ 를 모를 때 추정량의 표준오차: $D(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$

8.3.2 모평균에 관한 구간추정

1)모분산 σ^2 을 아는 경우

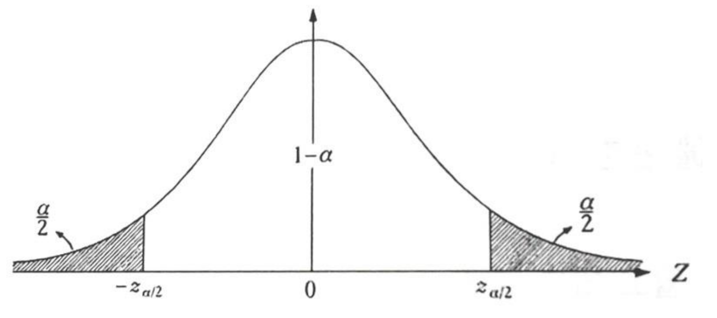
표본크기가 n 이면

표본평균: $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

표준화 변수: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

확률 α (유의수준)에 대해 신뢰구간의 확률은 $1-\alpha$. 예를 들면 $\alpha = 0.05$ 라면 신뢰구간 확률은 $0.95(95\%)$ 이다. 모분산 σ^2 을 알고 있는 경우,구간확률(신뢰수준)은

$$P[-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$$



$$P(- z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

위의 확률 속의 부등식을 다시쓰면 다음과같다.

구간확률(신뢰수준): $P[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = 1 - \alpha$

모평균의 구간추정: $[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

구간추정에서 자주 사용하는 대표적인 z_α 값

(1) $\alpha = 0.1$ (신뢰수준 확률 0.90): $z_{\alpha/2} = 1.645$

(2) $\alpha = 0.05$ (신뢰수준 확률 0.95): $z_{\alpha/2} = 1.960$

(3) $\alpha = 0.01$ (신뢰수준 확률 0.99): $z_{\alpha/2} = 2.580$

[보기 8_4] 어떤 전구공장에서 생산되는 전구 수명시간의 표준편차는 120 시간이다. 임의로 100 개를 추출하여 재었더니 전구의 평균수명은 2000 시간이었다. 전구의 평균수명에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

(풀이) 모평균의 구간추정: $[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

$$2000-1.96\frac{120}{\sqrt{100}} \le \mu \le 2000+1.96\frac{120}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 1976.48 \le \mu \le 2023.52$

2) 모분산 σ^2을 모르는 경우

$N(\mu,\sigma^2)$인 정규모집단으로부터 추출한 표본크기 n의 표본평균은 $\bar{x}$, 표본분산은 s^2일 때 이것은 자유도 $\phi=n-1$인 t-분포를 따른다. 만일 n이 크다면 t-분포는 정규분포인 z-분포를 사용하여도 아무런 문제가 없다.

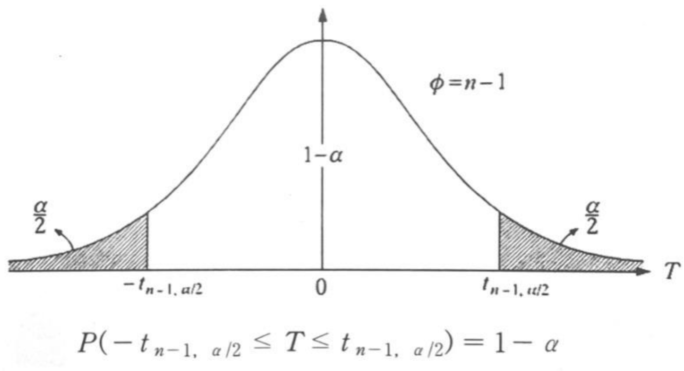
$$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(\phi)$$

α에 대한 신뢰구간의 확률: $P[-t(\phi,\frac{\alpha}{2}) \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t(\phi,\frac{\alpha}{2})]=1-\alpha$

확률 속의 부등식을 다시쓰면 다음과같다.

구간확률(신뢰수준): $P[\bar{x}-t(\phi,\frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}}) \le \mu \le \bar{x}+t(\phi,\frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}})] =1-\alpha$

모평균의 구간추정: $\bar{x}-t(\phi,\frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}}) \le \mu \le \bar{x}+t(\phi,\frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}})$



SPSS 통계처리문제

[보기 8_5] 시금치 통조림에 포함된 비타민의 양은 정규분포를 따른다. 17개의 통조림을 임의로 추출하여 비타민 양(mg)을 재었더니 다음과 같았다. 평균함유량 μ에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

x_i: 16 22 21 20 23 21 19 15 13 13 17 20 29 18 22 16 25

(풀이) 평균: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{17}x_i=\frac{1}{17}(330)=19.4112$

자유도(degree of freedom): $\phi=n-1=17-1=16$

분산(variation): $s^2=\frac{1}{\phi}\sum_{i}^{17}(x-\bar{x})^2=\frac{1}{16}(288.12)=18.00$

표준편차(standard deviation): $s=\sqrt{18.00}=4.2435$

평균의 표준오차(Stndard Error of mean): $D(\bar{x})=\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{4.2435}{\sqrt{17}}=1.0292$

신뢰수준 95%($\alpha=0.05$)일 때 t분포의 확률: $P[-t(\phi,\frac{\alpha}{2})\le\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\le t(\phi,\frac{\alpha}{2})]=1-\alpha$

$\phi=16$, $\alpha=0.05$일 때 $t(\phi,\frac{\alpha}{2})$의 값: $t(\phi,\frac{\alpha}{2})=t(16,0.025)=2.120$

※ t-분포:**http://www.statdistributions.com/t/**

이 internet site는 검정통계량으로 normal(정규), $t-$, $F-$, χ^2-분포의 확률을 계산하거나 또는 역으로 확률을 검정통계량으로 환산시킬 수 있는 calculator를 갖고 있다.

$t(\phi,\frac{\alpha}{2})=t(16,0.025)$의 t값 찾는 법.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 9 입력. [d.f.: degree of freedom]

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에 2.12가 나온 것을 확인할 수 있다.

2.12의 의미는 자유도 16인 t-분포에서 $\alpha=0.05$일 때 이 값을 기준으로 양단의 면적이 전체 면적의 5%가 되는 지점이라는 뜻이다.

www.google.com의 검색창에 t-distributioncalculator 또는 F-distributioncalculator로 검색하면 다양한 site에서 여러 분포의 확률이나 검정값을 계산할 수 있다.

모평균의 범위: $\bar{x}-t(\phi,\frac{\alpha}{2})\frac{s}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+t(\phi,\frac{\alpha}{2})\frac{s}{\sqrt{n}}$

$19.412-2.120(1.029)\le\mu\le 19.412+2.120(1.029)$

$\therefore 17.230\le\mu\le 21.594$

SPSS 통계처리[8_5_신뢰구간.sav]

분석>평균비교>일표본 T검정

보조 창이 뜨면 변수이름 [비타민양]을**검정변수**로 옮기고,**옵션**을 눌러 신뢰구간을 95% 로 한다.

계속>확인

T-검정 결과

일표본 통계량

	N	평균	표준편차	평균의 표준오차
비타민양	17	19.41	4.244	1.029

일표본 검정

	검정값 = 0					
	t	자유도	유의확률 (양쪽)	평균차	차이의 95% 신뢰구간 하한	차이의 95% 신뢰구간 상한
비타민양	18.861	16	.000	19.412	17.23	21.59

SPSS 통계처리문제

[보기 8_6] 어느 연구원이 새로운 제품을 개발하였다고 한다. 이 제품의 평균강도는 $180\,\text{kg}/\text{cm}^2$ 보다 크다고 한다. 평균강도 μ 를 측정하기 위하여 임의로 10 개를 추출하여 측정한 결과가 다음과 같다. 새로운 제품의 평균강도에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

평균강도[x]: 182 175 191 170 185 173 183 165 188 167

(풀이)평균을 먼저 구한 다음 아래 표를 완성한다. 이 표에 의거 필요한 값들을 계산하고 SPSS를 돌려 비교하자.

평균: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(1779) = 177.9$

id	x	$x-\bar{x}$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2$
1	182	4.1	4.1	16.81
2	175	-2.9	2.9	8.41
3	191	13.1	13.1	171.61
4	170	-7.9	7.9	62.41
5	185	7.1	7.1	50.41
6	173	-4.9	4.9	24.01
7	183	5.1	5.1	26.01
8	165	-12.9	12.9	166.41
9	188	10.1	10.1	102.01
10	167	-10.9	10.9	118.81
합계	1779	0	79	746.9

평균편차(Mean Deviation): $MD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x}\rvert = \frac{1}{10}(79) = 7.9$

자유도(degree of freedom): $\phi = n-1 = 10-1 = 9$

분산(variation): $s^2 = \frac{1}{\phi}\sum_i^{17}(x-\bar{x})^2 = \frac{1}{9}(746.9) = 82.9889$

표준편차: $s = \sqrt{82.9889} = 9.1098$

평균의 표준오차(Standard Error of mean): $D(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{9.1098}{\sqrt{10}} = 2.8808$

신뢰수준 $95\%(\alpha = 0.05)$일 때 t분포의 확률: $P[-t(\phi,\frac{\alpha}{2}) \le \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \le t(\phi,\frac{\alpha}{2})] = 1-\alpha$

$\phi = 9$, $\alpha = 0.05$일 때 $t(\phi,\frac{\alpha}{2})$의 값: $t(\phi,\frac{\alpha}{2}) = t(9, 0.025) = 2.2622$

모평균의 범위: $\bar{x} - t(\phi,\frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}}) \le \mu \le \bar{x} + t(\phi,\frac{\alpha}{2})(\frac{s}{\sqrt{n}})$

$177.9 - (2.263)(2.8808) \le \mu \le 177.9 - (2.263)(2.8808)$

$\therefore 171.38 \le \mu \le 184.42$

T 검정 값: $T = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{177.9-180}{2.8808} = -0.729$

※ t-분포:**http://www.statdistributions.com/t/**

(1) $t(\phi,\frac{\alpha}{2}) = t(9, 0.025)$의 t 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b)[d.f.]box에9 입력. d.f.: degree of freedom.

(c)[two tails]를 선택.

[t-value] box에 2.263이 나온 것을 확인할 수 있다.

2.263의 의미는 자유도 9인 t-분포에서 이 값을 기준으로 양단의 면적이 전체 면적의 5%가 되는 지점이라는 뜻이다.

(2) 검정 값 $|T| = |-0.729|$의 확률(유의확률)구하기

(a) [t-value] box에 0.729 입력.

(b) [d.f.]box에 9 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[p-value] box에 0.485가 나온 것을 확인할 수 있다.

0.485의 의미는 자유도가 9인 t-분포에서 $T = 0.729$의 양단의 면적이 전체 면적의 48.5%가 된다는 뜻이다.

SPSS 통계처리[8_6_평균강도.sav]

분석>평균비교>일표본 T검정

보조 창이 뜨면 변수이름 [평균강도]를**검정변수**로 옮기고,**검정값**에 180을 입력.**옵션**을 눌러 신뢰구간을 95%로한후,**계속>확인**

T-검정 결과

일표본통계량

	N	평균	표준편차	평균의표준오차
평균강도	10	177.90	9.110	2.881

일표본검정

	검정값 = 180					
					차이의 95% 신뢰구간	
	T	자유도	유의확률 (양쪽)	평균차	하한	상한
평균강도	-.729	9	.485	-2.100	-8.62	4.42

※SPSS 통계처리 결과는 계산으로 얻어진 값과 동일함을 볼 수 있다.

※모평균 μ 의 범위:차이의 95% 신뢰구간 하한과 상한을 주어진 검정값 180에합한 값.

$$180 - 8.62 \le \mu \le 180 + 4.42 \quad \rightarrow \quad 171.38 \le \mu \le 184.42$$

3) 표본크기가 충분히 큰 경우

표본크기 n이 충분히 크면 표준편차 σ 대신에 s를 사용하는 표준정규분포를 이용하여 확률이나 신뢰구간을 정하여도 무방하다. 즉

$$[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}]$$

[보기 8_7] 어느 제품을 임의로 100개를 추출하여 무게를 측정하였더니 $\bar{x} = 25.0$, $s = 4.99$이었다. 모평균 μ에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

※ z-분포:http://www.statdistributions.com/normal/

$z_{\alpha/2} = z_{0.025}$의 양쪽 값.

(a) [p-value] box에 0.05 입력

(b) [mean] box에 0 입력

(c) [std dev:] box에 1입력

(d) [two tails] 선택

[z-value] box에서 1.96을 얻을 것이다.

(풀이) 95%신뢰구간: $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2} = z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96$

평균의 표준오차: $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4.99}{\sqrt{100}} = 0.499$

모평균의 신뢰구간: $[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}]$

$25.0 - 1.96(0.499) \le \mu \le 25.0 + 1.96(0.499)$

$\therefore\ 24.022 \le \mu \le 25.978$

8.4 모분산의 추정

8.4.1 모분산의 점추정

자유도: $\phi = n-1$

(1) **모분산의 추정량**: $\sigma^2 = s^2 = \frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

(2) **모표준편차 추정량**: $\sigma = s$

8.4.2 모분산에 관한 구간추정

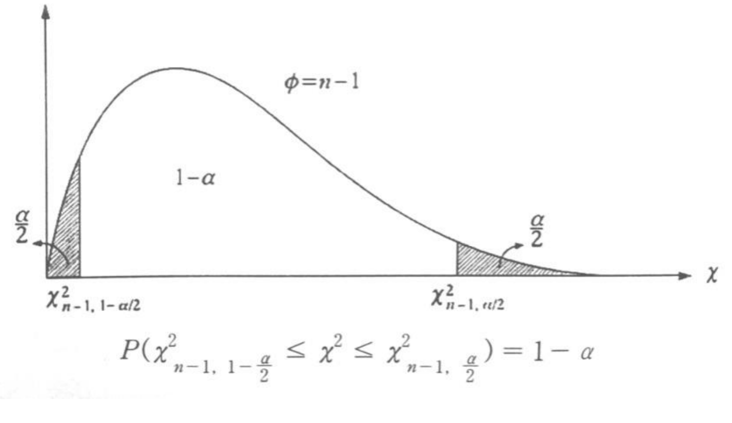
자유도를 $\phi = n-1$ 로 표기하도록 하고 정규모집단에서 크기 n 인 확률표본을 추출할 때 모분산 σ^2 에 대한 추정량은 표본분산 s^2 에 대하여 다음과 같다.

$$\frac{\phi s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\phi)$$

즉 자유도가 $\phi = n-1$ 인 χ^2-분포를 따른다. 자유도가 ϕ 이고, 신뢰수준 $1-\alpha$ 에 대한 χ^2-분포의 확률은

확률: $P(\chi^2_{1-\alpha/2} \le \chi^2 \le \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

신뢰구간: $\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{\phi s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2} \quad \rightarrow \quad \frac{\phi s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{\phi s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$



[보기 8_8] 플라스틱 부품의 인장강도를 알아보기 위해 부품 10 개를 추출하여 측정한 결과 평균은 $47.2\,\mathrm{kg/mm^2}$ 이고 분산은 3.4 였다. 모분산 σ^2 에 대한 95% 의 신뢰구간을 구하여라.

※ χ^2 −분포: **http://www.statdistributions.com/chisquare/**

$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.025}$ 와 $\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.975}$ 의 양쪽 값.

(a) [p-value] box에 0.025 또는 0.975 입력

(b) [d.f.] box에 9 입력

(c) right tail 선택

[χ^2 value] box에서 $\chi^2_{0.025} = 19.02$, $\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.975} = 2.70$ 을 얻을 것이다.

(풀이) 자유도: $\phi = 10 - 1 = 9$

자유도 $\phi = 9$ 인 χ^2 분포 값: $\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.025} = 19.0228$

$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.975} = 2.7004$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \quad \rightarrow \quad \frac{9(3.4)}{19.02} \le \sigma^2 \le \frac{9(3.4)}{2.70}$$

$\therefore\ 1.6086 \le \sigma^2 \le 11.3317$

8.5 독립표본인 두 모집단의 모평균차의 추정

8.5.1 두 모분산 σ_1^2 과 σ_2^2 을 아는경우

n_1 과 n_2 로 추출한 독립표본의 평균분포: $\bar{x} \sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1})$, $\bar{y} \sim N(\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_2})$

$\bar{x}$, $\bar{y}$ 는 서로 독립이므로

$E(\bar{x} - \bar{y}) = E(\bar{x}) - E(\bar{y}) = \mu_1 - \mu_2$

$Var(\bar{x} - \bar{y}) = Var(\bar{x}) + Var(\bar{y}) = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$

$\delta_o = \mu_1 - \mu_2$ 로 놓으면

$\bar{x} - \bar{y}$ 의 표준화 통계량: $Z = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)}} \sim N(0,1)$

신뢰수준(구간확률): $P[-z_{\alpha/2} \le \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta_o}{\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1) + (\sigma_2^2 / n_2)}} \le z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$

두 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 의 신뢰수준 $1 - \alpha$ 에 대한 신뢰구간:

$$(\bar{x} - \bar{y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \delta_o \le (\bar{x} - \bar{y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

[보기 8_9] A, B 두 제품을 임의로 15개씩 추출하여 평균수명을 조사한 결과 표본평균이 A 는 480 시간, B 는 452 시간이었다. 두 제품의 평균수명은 모평균편차가 각각 $\sigma_1 = 34$, $\sigma_2 = 25$ 인 정규분포를 따른다. 두 제품의 평균수명 시간차 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

※ z-분포:http://www.statdistributions.com/normal/

$z_{\alpha/2} = z_{0.025}$ 의 양쪽 값.

(a) [p-value] box에 0.05 입력

(b) [mean] box에 0 입력

(c) [std dev:] box에 1 입력

(d) [two tails] 선택

[z-value] box에서 1.96을 얻을 것이다.

(풀이) $\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{1}{15}(34^2+25^2)} = 10.8965$

평균차: $\bar{x}-\bar{y} = 480-452 = 28$

$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

두 모평균의 차인 $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ 의 신뢰수준 $1-\alpha$ 에 대한 신뢰구간:

$$(\bar{x}-\bar{y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \delta \le (\bar{x}-\bar{y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$28-(1.96)(10.8965) \le \delta \le 28+(1.96)(10.8965)$$

$$\therefore\ 6.643 \le (\mu_1-\mu_2) \le 49.357$$

8.5.2 두 모분산 σ_1^2 과 σ_2^2 을 모르는 경우

x_i 는 모분산 σ_1^2 인 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 에서 추출한 n_1 개의 확률표본이고, y_i 는 모분산 σ_2^2 인 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 에서 추출한 n_2 개의 확률표본이며 둘은 독립일 때 모평균차인 $\mu_1 - \mu_2$ 의 신뢰구간을 구하면 다음과 같다.

$\bar{x}-\bar{y}$ 는 정규분포를 따르며 평균과 분산은 각각

$$E(\bar{x}-\bar{y}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(\bar{x}-\bar{y}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)$$

여기서 등분산 σ^2 의 합동추정량 s_p^2 은

$$s_p^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2\right] = \frac{1}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2]$$

자유도: $\phi = n_1+n_2-2$, 또한 $\phi_1 = n_1 - 1$, $\phi_2 = n_2 - 1$

위의 합동추정량 분산을 자유도를 포함하는 수식으로 간략화 하면

합동추정량 분산: $s_p^2 = \dfrac{1}{\phi}(\phi_1 s_1^2 + \phi_2 s_2^2)$

$$\delta_o = \mu_1 - \mu_2$$

$\bar{x}-\bar{y}$의 표준화 통계량: $Z=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta_o}{\sigma\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}}\sim N(0,1)$

(1) $\dfrac{\phi s_p^2}{\sigma^2}$의 분포: $\phi=n_1+n_2-2$인 χ^2-분포를 따른다. 즉

$$\chi^2=\frac{\phi s_p^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(\phi)$$

(2) $\dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2/\phi}}$는 자유도가 $\phi=n_1+n_2-2$인 t-분포를 따른다. 즉

$$T=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}}\sim t(\phi)$$

두 모분산이 σ^2으로 같고 미지인 경우에 $\mu_1-\mu_2=\delta_o$의 $1-\alpha$의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$(\bar{x}-\bar{y})-t(\phi,\frac{\alpha}{2})s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\delta_o\le(\bar{x}-\bar{y})+t(\phi,\frac{\alpha}{2})s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

[보기 8_10] 임의의 12명의 학생에게 방법 1의 방식으로 한학기 수업을 가르치고 다른 임의의 10명의 학생에게 방법 2의 방식으로 한 학기를 가르친 후에 같은 시험을 실시하였다. 방법 1의 평균점수는 85점, 표준편차는 4점이며 방법 2의 평균점수는 81점, 표준편차는 5점이다. 두 모집단은 동일한 분산을 갖는 정규분포를 따른다고 할 때 평균차 $\delta=\mu_1-\mu_2$에 대한 90% 신뢰구간을 구하여라.

※ t-분포:http://www.statdistributions.com/t/

(1) $t(\phi,\frac{\alpha}{2})=t(20,0.05)$의 t 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.10 입력.

(b) [d.f.]box에 20 입력. d.f.: degree of freedom.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에서 1.725를 얻을 것이다.

(풀이) 자유도: $\phi=n_1+n_2-2=12+10-2=20$, $\phi_1=12-1=11$, $\phi_2=10-1=9$

합동추정량 분산: $s_p^2=\dfrac{1}{\phi}(\phi_1 s_1^2+\phi_2 s_2^2)=\dfrac{1}{20}[(11)(4^2)+(9)(5^2)]=20.05$

합동추정량의 표준편차: $s_p=\sqrt{20.05}=4.4777$

$$t(\phi,\alpha/2)=t(20,0.05)=1.725$$

$$\delta_o=\mu_1-\mu_2$$

신뢰구간: $(\bar{x}-\bar{y})-t(\phi,\frac{\alpha}{2})s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\le\delta_o\le(\bar{x}-\bar{y})+t(\phi,\frac{\alpha}{2})s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

$$4-(1.725)(4.4777)\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}} \le \delta_o \le 4+(1.725)(4.4777)\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}$$

$$0.69 \le \delta_o \le 7.31$$

$$\therefore 0.69 \le \mu_1 - \mu_2 \le 7.31$$

8.5.3표본의 크기가 큰 경우

두 표본의 크기가 크면 모집단의 분포에 관계없이 중심극한정리에 의하여 $\bar{x}$ 와 $\bar{y}$ 는 근사적으로 $N(\mu_1, \sigma_1^2 / n_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2 / n_2)$을 따르므로 표준화하면

$$\delta_o = \mu_1 - \mu_2$$

$$Z = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-\delta_o}{\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1)+(\sigma_2^2 / n_2)}} \sim N(0,1)$$

표본이 큰 두 모평균 차에 대한 신뢰구간:

$$(\bar{x}-\bar{y})-z_{\alpha/2}\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1)+(\sigma_2^2 / n_2)} \le \delta_o \le (\bar{x}-\bar{y})+z_{\alpha/2}\sqrt{(\sigma_1^2 / n_1)+(\sigma_2^2 / n_2)}$$

[보기 8_11] 어느 고등학교에서 임의로 남학생 75 명, 여학생 50 명을 추출하여 영어시험을 친 결과 남학생과 여학생의 평균은 각각 82 점과 76 점이고, 표준편차는 각각 8 점, 6 점이다. 평균의 차 $\delta = \mu_1 - \mu_2$ 에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

(풀이) $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

$$\bar{x}-\bar{y} = 82-76 = 6$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{8^2}{75}+\frac{6^2}{50}} = 1.2543$$

$$\delta_o = \mu_1 - \mu_2$$

신뢰구간: $6-(1.96)(1.2543) \le \delta_o \le 6+(1.96)(1.2543)$

$$\therefore 3.5415 \le \mu_1 - \mu_2 \le 8.4584$$

8.6 대응표본의 추정

8.6.1 대응표본 차의 추정

대응표본은 동질의 대응 쌍으로 이루어진 자료이다. 임의로 한 조로 이루어진 한 쌍의 실험단위를 추출하여 대응표본의 x 는 처리 1, y 는 처리 2 로 하고, 각 쌍 (x_i, y_i)은 서로 독립일 때 차 $d_i = x_i - y_i$ 에 대한 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i, \qquad s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2$$

d_i 분포는 정규분포 $N(\delta, \sigma_d^2)$ 를 따르고 서로 독립일 때 모평균차 $\delta_o = \mu_1 - \mu_2$ 에 대한 $1-\alpha$ 신뢰구간은 다음과 같다. 자유도는 $\phi = n-1$ 이다.

$$\bar{d} - t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \frac{s_d}{\sqrt{n}} \le \delta_o \le \bar{d} + t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

여기서 $\frac{s_d}{\sqrt{n}}$ 는 차에 대한 평균의 표준오차이다.

SPSS 통계처리문제

[보기 8_12]어느 기업에서 판매원에 대한 직업교육을 실시한 후에 능률향상이 있는지를 조사하였다. 임의로 판매원 10명을 추출하여 조사한 결과가 아래와 같다. 여기서 단위는 백만원이다

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
실시전(x)	23	45	35	28	27	29	25	30	41	33
실시후(y)	27	43	31	42	34	38	30	37	36	44

교육 실시전과 실시후의 판매능력 차 $\delta_o = \mu_1 - \mu_2$ 에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라. 단 판매능력 차의 분포는 정규분포를 따른다고 가정한다.

(풀이)아래 표에 의거 필요한 계산을 한다.

id	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$d=x-y$	$(d-\bar{d})^2$
1	23	-8.6	73.96	27	-9.2	84.64	-4	0.36
2	45	13.4	179.56	43	6.8	46.24	2	43.56
3	35	3.4	11.56	31	-5.2	27.04	4	73.96
4	28	-3.6	12.96	42	5.8	33.64	-14	88.36
5	27	-4.6	21.16	34	-2.2	4.84	-7	5.76
6	29	-2.6	6.76	38	1.8	3.24	-9	19.36
7	25	-6.6	43.56	30	-6.2	38.44	-5	0.16
8	30	-1.6	2.56	37	0.8	0.64	-7	5.76
9	41	9.4	88.36	36	-0.2	0.04	5	92.16
10	33	1.4	1.96	44	7.8	60.84	-11	40.96
합계	316	0	442.4	362	0	299.6	-46	370.4

두 자료의 평균: $\bar{x} = \frac{31,6}{10} = 31.60$, $\bar{y} = \frac{362}{10} = 36.20$

두 자료의 분산 및 표준편차:

$$s_x^2 = \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9}(442.4) = 49.1556 \qquad s_x = \sqrt{49.1556} = 7.011$$

$$s_y^2 = \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{9}(299.6) = 33.289 \qquad s_y = \sqrt{33.2889} = 5.770$$

두 자료의 평균 표준오차:

$$D(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{7.011}{\sqrt{10}} = 2.217$$

$$D(\bar{y}) = \frac{s_y}{\sqrt{n}} = \frac{5.770}{\sqrt{10}} = 1.825$$

두 대응표본의 차: $d_i = x_i - y_i$

차의 평균: $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{10}(-46) = -4.6$

자유도: $\phi = n - 1 = 10 - 1 = 9$

차의 분산: $s_d^2 = \frac{1}{\phi}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2 = \frac{1}{9}(370.4) = 41.1556$

차의 표준편차: $s_d = \sqrt{41.1556} = 6.4153$

차 평균의 표준오차: $D_d(\bar{d}) = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{6.4153}{\sqrt{10}} = 2.0287$

신뢰수준 $95\%(\alpha = 0.05)$일 때 t분포의 확률: $P[-t(\phi, \frac{\alpha}{2}) \le \frac{\bar{d} - \delta}{s_d / \sqrt{n}} \le t(\phi, \frac{\alpha}{2})] = 1 - \alpha$

$\delta_o = \mu_1 - \mu_2$

$\phi = 9$, $\alpha = 0.05$일 때 $t(\phi, \frac{\alpha}{2})$의 값: $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(9, 0.025) = 2.267$

95% 신뢰구간의 모평균차의 범위: $\bar{d} - t(\phi, \frac{\alpha}{2})(\frac{s_d}{\sqrt{n}}) \le \delta_o \le \bar{x} + t(\phi, \frac{\alpha}{2})(\frac{s_d}{\sqrt{n}})$

$(-4.6) - (2.2622)(2.0287) \le \delta_o \le (-4.6) + (2.2622)(2.0287)$

$\therefore -9.189 \le \mu_1 - \mu_2 \le -0.011$

T 검정 값: $T = \frac{\bar{d} - \delta}{s / \sqrt{n}} = \frac{-4.6 - 0}{2.0287} = -2.2675$

※ 여기서 $\delta_o = \mu_1 - \mu_2 = 0$로 놓은 이유는 모평균이 실시전이나 실시 후에 모두 같을 것이라는 가정하에 표본을 뽑았기 때문이다.

※ t-분포:**http://www.statdistributions.com/t/**

(1) $t(\phi, \frac{\alpha}{2}) = t(9, 0.025)$의 t 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.05 입력.

(b) [d.f.]box에 9 입력. d.f.: degree of freedom.

(c) [two tails]를 선택.

[t-value] box에 2.263이 나온 것을 확인할 수 있다.

(2) 검정 값$|T| = |-2.2675|$의 확률(유의확률)구하기

(a) [t-value] box에 2.2675 입력.

(b) [d.f.]box에 9 입력.

(c) [two tails]를 선택.

[p-value] box에 0.05가 나온 것을 확인할 수 있다.

SPSS 통계처리[8_12_직업교육.sav]Data의 변수명을 [x]와 [y]로 하고, 변수보기의 설명에 [x]행에는 "실시전"[y]행에는 "실시후"를 입력.

분석>평균비교>대응표본 T검정

보조 창이 뜨면 변수이름 [x]와 [y]를 **대응변수**로 이동. **옵션**을 눌러 신뢰구간을 95%로 한다.

계속>확인

T-검정 결과

대응표본 통계량

		평균	N	표준편차	평균의 표준오차
대응 1	실시전	31.60	10	7.011	2.217
	실시후	36.20	10	5.770	1.825

대응표본 상관계수

		N	상관계수	유의확률
대응 1	실시전 & 실시후	10	.510	.132

대응표본 검정

		대응차					t	자유도	유의확률 (양쪽)
		평균	표준편차	평균의 표준오차	차이의 95% 신뢰구간 하한	차이의 95% 신뢰구간 상한			
대응 1	실시전 - 실시후	-4.600	6.415	2.029	-9.2	-.011	-2.267	9	.050

※ 결과를 위에 계산한 값들과 비교하라. 그리고 이러한 값들이 어떤 절차에 의해서 얻어질 수 있는지 그이론을 숙지하도록 한다.

※ 차이의 신뢰구간: $-9.189 \le \mu_1 - \mu_2 \le -0.011$

8.6.2 두 대응표본 모분산의 비에 대한 추정

두 모집단의 산포도를 비교하고자 할 때, 표본분산은

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

분산비: $F = \dfrac{s_2^2/\sigma_2^2}{s_1^2/\sigma_2^2} = (\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})(\dfrac{s_2^2}{s_1^2}) \sim F(\phi_2, \phi_1)$

여기서 각 자료의 자유도는 $\phi_2 = n_2 - 1$, $\phi_1 = n_1 - 1$이다.

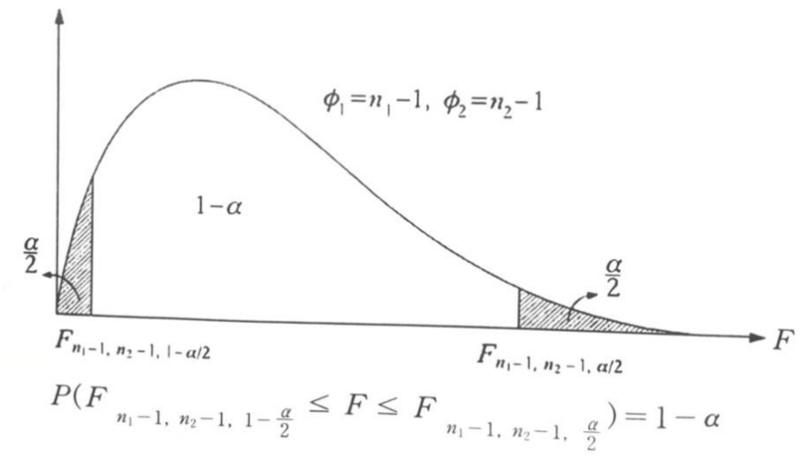
σ_1^2/σ_2^2에 대한 신뢰구간의 확률: $P[F(\phi_2, \phi_1; 1-\dfrac{\alpha}{2}) \le (\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2})(\dfrac{s_2^2}{s_1^2}) \le F(\phi_2, \phi_1; \dfrac{\alpha}{2})] = 1-\alpha$

두 모분산비 σ_1^2/σ_2^2에 대한 $100(1-\alpha)\%$에 대한 신뢰구간:

$$F(\phi_2, \phi_1; 1-\frac{\alpha}{2})(\frac{s_1^2}{s_2^2}) \le (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \le F(\phi_2, \phi_1; \frac{\alpha}{2})(\frac{s_1^2}{s_2^2})$$

이것의 좌측은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{F(\phi_2, \phi_1; \frac{\alpha}{2})}(\frac{s_1^2}{s_2^2}) \le (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \le F(\phi_2, \phi_1; \frac{\alpha}{2})(\frac{s_1^2}{s_2^2})$$



[보기 8_13] 감기약에 들어 있는 어떤 성분의 양을 두 가지 측정법에 의하여 조사하고자 한다. 임의로 각각 10개씩 측정한 결과 1의 방법은 분산이 $s_1^2 = 0.0215$이고 2의 방법은 분산이 $s_2^2 = 0.0276$이다. 두 모분산비 σ_1^2/σ_2^2 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

(풀이) $\phi_1 = 9$, $\phi_2 = 9$, $F(9,9,0.025) = 4.026$

$$\frac{1}{F(\phi_2, \phi_1; \frac{\alpha}{2})}(\frac{s_1^2}{s_2^2}) \le (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \le F(\phi_2, \phi_1; \frac{\alpha}{2})(\frac{s_1^2}{s_2^2}):$$

$$\frac{1}{4.026}(\frac{0.0215}{0.0276}) \le (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \le (4.026)(\frac{0.0215}{0.0276}) \therefore 0.1933 \le (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \le 3.1393$$

※ F −분포:**http://www.statdistributions.com/f/**

$F(\phi_1, \phi_2 \dfrac{\alpha}{2}) = F(9,9;\, 0.025)$의 F 임계값 구하기.

(a) [p-value] box에 0.025 입력.

(b)[numerator d.f.]box에 9 입력. d.f.: degree of freedom.

(c) [denominator d.f.]box에 9 입력.

(d)[right tail]을 선택.

[F-value] box에서 4.026 을 얻을 것이다.

8.7 표본 크기의 결정

표본 수에 따라 추론 결과의 정밀도가 달라지기 때문에 주어진 신뢰수준 하에 표본크기 n 의 결정은 매우 중요하다. n 이 클수록 신뢰구간은 짧아지고 작을수록 신뢰구간은 길어진다.

모집단이 정규분포를 이루고 모분산이 알려져 있는 경우 $1-\alpha$ 신뢰율에 대한 μ 의 신뢰구간은

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

오차의 한계: $e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

오차의 한계 e 이하로 하는 표본의 크기 n

$$e \ge z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad n \ge (\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e})^2$$

유한 모집단 N 이 대략 정규분포를 따를 때 표본크기 n

$$n = \frac{\sigma^2}{(e/z_{\alpha/2})^2 + (\sigma^2/N)}$$

제 2 종의 오류를 범할 확률 β 가 주어질 때 표본크기 n

$$n \ge [\frac{z_\alpha + z_\beta}{(\mu_1 - \mu_o)/\sigma}]^2$$

[보기 8_14] 전구의 수명시간의 표준편차는 120 시간이고 전구의 수명은 2000 시간이다. 95% 신뢰수준에서 오차한계를 50 시간 이내로 하려면 필요한 표본크기는 얼마로 하여야 하는가?

(풀이) $\alpha = 0.05$, $\sigma = 120$, $e = 50$, $z_{\alpha/2} = 1.96$

$$n \ge (\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e})^2 = [\frac{(1.96)(120)}{50}]^2 = 22.13$$

[보기 8_15] 화학원료를 생산하는 공정이 $N(100, 4^2)$ 인 정규분포이다. 다른 원료를 사용하여 시료를 10 개를 추출하여 평균치를 구하니 97.6 kg 을 얻었다. 이 원료를 사용하면 공정평균이 종래보다 3.0 kg 만큼 작을 때 이것을 적어도 확률 90% 로 검출하는 데 필요한 표본크기를 구하라.

(풀이) $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.10$, $\sigma = 4$, $\mu_1 - \mu_o = 3.0$

$$n \ge [\frac{z_\alpha + z_\beta}{(\mu_1 - \mu_o)/\sigma}]^2 = (\frac{1.645 + 1.282}{3.0/4})^2 = 15.23$$

연습문제

1. 전구를 생산하는 회사의 전구 수명시간은 표준편차가 300 시간이다. 생산한 전구 100 개를 임의로 추출하여 조사하였더니 평균수명이 4500 시간이었다. 이 회사에서 생산된 전구의 평균수명에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

2. 생산된 부품의 무게에 대한 표준편차는 8g 이다. 모평균을 신뢰도 95% 확신을 갖고 추정하고자 할 때 추정오차를 3g 이내로 하려면 표본의 크기는 어느정도하면 좋은가?

3. 다음 자료는 어느 가정에서 한 달 동안 사용한 도시가스(단위 m^3)의 양이다. (1) 평균과 표준편차 (2) 모평균 95% 신뢰구간 (3) 95% 확신을 갖고 μ 추정치가 0.1 이하를 가지기 위한 표본크기를 각각 구하여라.

2.9 4.3 5.4 3.4 5.5 3.4 5.3 4.7 5.1 4.6

4.4 9.6 6.3 3.6 5.2 5.3 4.6 4.2 5.6 4.5

4. 어느 농장에서 젖소에서 얻은 우유의 양은 평균이 12.9 라고 한다. 어떤 사료를 먹인 후부터 우유의 양이 증가하는 것 같아 이를 알아보기 위해 젖소 10 마리를 조사하였더니 다음과 같은 결과를 얻었다.

[우유양] 13.7 15.8 15.3 10.0 11.1 14.2 13.8 13.2 12.7 15.8

(1) 표준편차 $\sigma=1.2$ 로 가정하고 평균 μ 의 95% 신뢰구간을 구하여라.

(2) σ 를 모르는 경우에 평균 μ 의 95% 신뢰구간을 구하여라.

(3) 모집단의 분산 σ^2 의 90% 신뢰구간을 구하여라.

5. 다음은 식이요법 전과 후를 5 명에 대하여 얻은 체중이다. 식이요법 전과 후에 대한 차의 95% 신뢰구간을 구하여라.

	1	2	3	4	5
식이요법 전	87.5	84	70	65	75
식이요법 후	85	84.5	66.5	66	71.5

6. 전구를 만드는 회사가 생산한 전구의 수명은 평균이 800 시간이고 분산이 $(50)^2$ 인 어떤 분포를 따른다고 한다.

(1) 전구수명을 모를 경우 하나의 전구수명이 $700 \sim 900$ 시간일 최소확률을 구하여라.

(2) 25 개의 확률표본을 추출했을 때 표본평균이 $770 \sim 830$ 시간일 최소확률을 구하여라.

(3) 전구수명분포를 모를 경우 표본평균의 95% 오차한계가 10 이하가 되려면 최소필요한 표본크기는 얼마인가?

(4) 정규분포일 경우 질문 (1)의 근사율은 얼마인가?

(5) 정규분포의 경우 질문 (3)에서으 표본크기는 얼마인가?

(6) 정규분포일 경우 25개의 표본 결과가 다음과 같을 때 모평균에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

$$\sum x_i = 20500 \qquad \sum x_i^2 = 16848400$$

(7) 질문 (6)에서 모분산에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

7. 한 화학약품 제조 회사가 다른 두 종류의 원료를 사용하여 생산하고 있다. 각 원료에서 주 성분 A의 함량은 다음과 같다. 단 함량들은 정규분포를 따르고 모분산이 같다고 가정한다. 상표1과 상표2의 주성분 A의 함량을 각각 μ_1, μ_2라고 할 때 다음 물음에 답하라.

주성분 A의 함량(단위 %)

상표1	80.4	78.2	80.1	77.1	79.6	80.4	81.6	79.9	84.4	80.9	83.1
상표2	80.0	81.2	79.5	78.0	76.1	77.0	80.1	79.9	78.8	80.8	

(1) $\mu_1 - \mu_2$의 95%신로구간을 구하여라.

(2) σ_2^2 / σ_1^2의 비율에 관한 95% 신뢰구간을 구하여라.

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$이라 가정하고 $\mu_1 - \mu_2$의 90% 신뢰구간을 구하여라.

8. 제품에 철분함유량을 조사하는 두 가지 방법은 화학분석과 X-선분석이 있다. 이 두 가지 방법에 차이가 있는지 조사하고자 한다. 5개의 표본을 추출하여 두 가지 방법에 의하여 조사한 결과는 다음과 같다. 두 방법의 차에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

	1	2	3	4	5
X-선	2.0	2.0	2.3	2.1	2.4
화학	2.2	1.9	2.5	2.3	2.4

9. 모 제약회사에서 감기에 대한 새로운 신약을 개발하여 약의 효능이 80% 이상이라고 믿으나, 당국에서 조사를 하여 본 결과 80%이하라고 판단하고 있다. 감기에 걸린 400명을 임의로 추출하여 280명이 이 약에 의해 치료되었다면 치료비율에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라.

10. 어떤 도시에서 과거에는 20%로 알려진 기름을 이용한 난방을 피하기 위해 1000가구를 대상으로 조사하였다.

(1) 과거의 자료가 옳다면 1000가구 중에서 300가구 이상이 기름을 이용하여 난방을 하는 확률을 정규분포에 의해 구하여라.

(2) 만약 250가구가 기름을 이용한다면 기름을 이용한 난방률의 95% 신뢰구간을 구하여라.

(3) 95% 오차한계가 0.01 이하가 되려면 추가로 필요한 표본크기는 얼마인가?