

제 32 장. Maxwell 방정식과 물질의 자성

Maxwell 방정식은 전기장과 자기장에 관한 법칙들을 요약한 것으로, 이들을 수학적으로 이해하려면 벡터의 미분에 관한 다음의 예제를 미리 공부하는 것이 도움이 된다.

(i) 직각좌표에서 벡터의 성분분해

위치벡터(Position vector) \vec{r} : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

일반벡터 \vec{A} : $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

여기서 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 는 x, y, z 축에 따른 단위벡터(Unit vector).

(ii) 벡터의 미분

벡터의 미분을 적용하기 위하여 다음의 함수들을 예로 든다.

Scalar 함수: $\Phi = x^2 + 2xy + yz^3$

Vector 함수: $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} = (2xz^2)\hat{i} + (3xy^2)\hat{j} + (xy^3z)\hat{k}$

여기서 $R_x = 2xz^2$, $R_y = 3xy^2$, $R_z = xy^3z$.

$$(a) \text{ Grad: } \nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Grad은 Scalar 양을 미분하고 결과는 벡터가 된다.

$$\nabla\Phi = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})(x^2 + 2xy + yz^3) = (2x + 2y)\hat{i} + (2x + z^3)\hat{j} + (3yz^2)\hat{k}$$

$$(b) \text{ Divergence: } (\nabla \cdot) = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) \cdot$$

Divergence는 벡터의 내적(Inner product)미분으로 결과는 Scalar가 된다.

$$(예) \nabla \cdot \vec{R} = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}) = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{R} = \frac{\partial(2xz^2)}{\partial x} + \frac{\partial(3xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xy^3z)}{\partial z} = 2z^2 + 6xy + xy^3$$

$$(c) \text{ Curl: } (\nabla \times) = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) \times$$

Curl은 외적(Cross product)미분으로 결과는 벡터가 된다.

$$(\nabla \times \vec{R}) = (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) \times (R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k})$$

$$= \hat{i}(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}) + \hat{j}(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}) + \hat{k}(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y})$$

$$(\nabla \times \vec{R}) = \hat{i} [\frac{\partial(xy^3z)}{\partial y} - \frac{\partial(3xy^2)}{\partial z}] + \hat{j} [\frac{\partial(2xz^2)}{\partial z} - \frac{\partial(xy^3z)}{\partial x}] + \hat{k} [\frac{\partial(3xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xz^2)}{\partial y}]$$

$$= (3xy^2z)\hat{i} + (4xz - y^3z)\hat{j} + (3y^2)\hat{k}$$

(iii) 중요공식

(a) $\nabla\Phi\Psi = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi$

(b) $\nabla \cdot \nabla \times \vec{R} = 0$

(c) $\nabla \times \nabla\Phi = 0$

(d) $\nabla \times \nabla \times \vec{R} = \nabla(\nabla \cdot \vec{R}) - \nabla^2 \vec{R}$

32.1 Maxwell 방정식의 유도

전기와 자기의 법칙, 즉 Gauss, Faraday, Ampere 법칙으로부터 전자기에 광범위하게 사용되는 4 개의 Maxwell 방정식을 유도하도록 한다.

(i) Gauss' Law

폐 곡면(Closed area)으로 나오는 전기장 선속(다발)과 자기장 선속은 가우스 법칙이 적용된다.

전기장 선속(Electric flux): $\Phi_E = \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$ (32.1)

자기장 선속(Magnetic flux): $\Phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ (32.2)

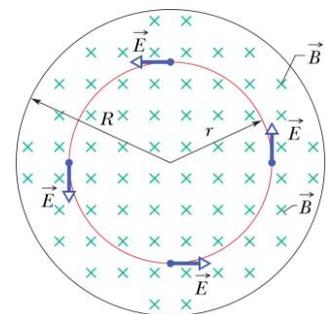
전하(Charge)는 폐 곡면 내에 독립적인 양전하(+q) 또는 음전하(-q)가 홀로 존재할 수 있다. 달리 말하면 전하는 Monopole로 존재할 수 있다. 그러나 자하(Magnet)는 독립된 N극 또는 S 극, 즉 한 극만 있는 Monopole로 존재할 수 없으며, 항상 자기 쌍극자(Magnetic dipole)인 N극과 S극이 한 쌍을 이루고 있다. 따라서 어떤 폐 곡면을 통해 N극에서 나온 자기장 선속은 다시 그 면을 통해 S극으로 들어가기 때문에 순수하게 그 폐 곡면을 통해 나오는 자기장 선속은 없다 ($\Phi_B = 0$).

(ii) Faraday's Induction Law

열린 면적(Open area) A 를 지나가는 자기장 선속: $\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$ (32.3)

Faraday Induction Law: 열린 면적을 통해 지나가는 자기장 선속이 시간에 따라 변하면 그 열린 면적의 고리에 기전력이 발생한다.

(예) 우측 그림의 경우 지면에 들어가는 방향으로 자기장 선속이 시간에 따라 증가하면 원형 고리의 전기장이 반 시계방향으로 형성되며, 전류를 유발하는 기전력이 발생한다. 이때 만들어진 반 시계방향(전기장 방향)의 전류는 지면에 들어가는 방향으로 증가하는 자기장 선속을 증가하지 못하도록 방해한다(Lenz 법칙).



수식적 표현: $\frac{d\Phi_B}{dt} = \int_A \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{a} = -\xi = -\iint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$ (32.4)

(iii) Maxwell's Induction Law and Ampere's Law

열린 면적 A 를 지나가는 전기장 선속: $\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a}$ (32.5)

(a) Maxwell's Induction Law: Faraday Induction Law의 대칭성으로 어떤 열린 면적을 지나가는 전기장 선속을 시간에 따라 변화시키면 그 전기장이 지나가는 면에 원형고리의 자기장이 만들어 진다.

수식적 표현: $\mu_o \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$ (32.6)

변위전류(Displacement current)의 정의: $i_d = \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}$ (32.7)

변위전류란 충전기 내의 전기장 선속이 증가하거나 감소할 때 충전기를 통해 흘러 나가는 전류이다. (32.6)을 변위전류로 다시 쓰면

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o i_d \quad (32.8)$$

(b) Ampere's Law: 직류전류 i 는 그 주위에 원형의 자기장을 만든다.

수식적 표현: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o i$ (32.9)

Maxwell-Ampere's Law: (32.8)과 (32.9)를 한 식으로 묶으면

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o (i + i_d) \quad (32.10)$$

Maxwell 방정식의 적분형 종합

Gauss' law-Electric: $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_o}$ (32.11)

Gauss' law-Magnetic: $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ (32.12)

Faraday's law: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$ (32.13)

Maxwell-Ampere's law: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o (i + i_d)$ (32.14)

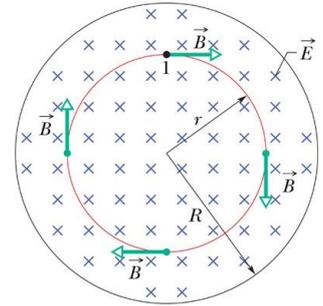
Maxwell 방정식의 미분형

(32.11)과 (32.12)의 좌측 항은 Divergence theorem(면적분을 체적적분으로 바꾸는 정리)을 적용하고, 우측 항의 전하 q 는 폐 곡면으로 둘러쳐진 체적 내에 고르게 분포되어 있다고 가정하라. 예를 들면 볼링 공에 전하 q 가 균일하게 분포되어 있다고 생각하자. 이때 총 전하 q 는 전하밀도 (Charge density) ρ 에 체적을 곱한 양으로 표시한다. 그리고 좌우 양변을 비교하면 Maxwell의 첫 번째와 두 번째 미분형 방정식이 얻어진다.

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_o} \int_V \rho dV \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (32.15)$$

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (32.16)$$

(32.13)과 (32.14)의 좌측 항에 Stock's theorem(선적분을 면적분으로 바꾸는 정리)을 적용한다.



그리고 전류 i 와 i_d 는 전류밀도(Current density) J 와 J_d 에 면적을 곱한 양으로 표시하고 양변을 비교하면 Maxwell의 세 번째와 네 번째 미분형 방정식이 얻어진다.

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{32.17}$$

$$\int_A (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o \int_A (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot d\vec{a} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_o (\vec{J} + \vec{J}_d)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_o \vec{J}_d = \mu_o \vec{J} \tag{32.18}$$

(32.18)식의 변형

$$i_d = \int_A \vec{J}_d \cdot d\vec{a}, \quad \Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

이들을 변위전류 $i_d = \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt}$ 에 대입하면

$$\int_A \vec{J}_d \cdot d\vec{a} = \epsilon_o \int_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{J}_d = \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{32.19}$$

(32.19)를 (32.18)에 대입하면 변형된 네 번째 수식을 얻는다.

$$\nabla \times \vec{B} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o \vec{J} \tag{32.20}$$

$$\text{직류전류 밀도: } \vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{32.21}$$

여기서 σ 는 물질의 전기전도도(Electric conductivity)

(32.21)을 (32.20)에 대입하면 다음과 같은 형태로 변형될 수 있다.

$$\nabla \times \vec{B} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o \sigma \vec{E} \tag{32.22}$$

Maxwell 방정식의 미분형 종합

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{32.23}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{32.24}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{32.25}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o \vec{J} \tag{32.26}$$

32.2 변위전류 및 유도자기장 구하기

$$\text{변위전류: } i_d = \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{32.27}$$

$$\text{Maxwell's Induction Law: } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o i_d \tag{32.28}$$

여기서 i_d 는 적분고리로 둘러싸인 변위전류이다. 이러한 개념을 면적 A 인 원형 평행판 축전기에 적용해 보자.

$$\text{임의의 시간에 평행판 축전기의 전하: } q = \epsilon_o AE \quad (32.29)$$

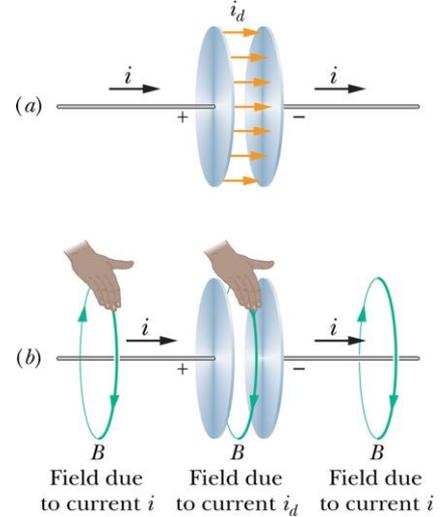
$$\text{전류: } i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_o A \frac{dE}{dt} \quad (32.30)$$

극판 사이의 변위전류:

$$i_d = \epsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_o \frac{d(EA)}{dt} = \epsilon_o A \frac{dE}{dt} \quad (32.31)$$

따라서 대전시키는 실제 전류 i 와 극판 사이의 가상의 변위전류 i_d 는 같다.

$$i_d = i \quad (32.32)$$



유도자기장 구하기

반경 R 인 극판에서 변위전류 i_d 가 흐를 때

$$r < R \text{ 인 곳에서의 Maxwell's Law: } \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o i'_d \quad (32.33)$$

여기서 i'_d 은 적분고리 r 로 둘러싸인 내부의 변위전류이므로 i'_d 을 비례식으로 계산하면

$$i'_d : i_d = \pi r^2 : \pi R^2 \rightarrow i'_d = \frac{r^2}{R^2} i_d \quad (32.34)$$

$$B(2\pi r) = \mu_o \left(\frac{r^2}{R^2}\right) i_d \rightarrow B = \frac{\mu_o i_d}{2\pi R^2} r \quad (32.35)$$

$$r > R \text{ 인 곳에서 자기장: } B(2\pi r) = \mu_o i_d \rightarrow B = \frac{\mu_o i_d}{2\pi r} \quad (32.36)$$

보기문제 32.1 반지름 R 인 원형 극판의 평행판 축전기가 대전되고 있다. (a) $r \leq R$ 인 경우 반지름 r 에서의 자기장 표현 식을 유도하여라. (b) $r = R/5 = 11.0\text{mm}$, $dE/dt = 1.50 \times 10^{12} \text{V/m}\cdot\text{s}$ 이다. 자기장의 크기 B 를 구하여라. (c) $r \geq R$ 인 경우 자기장의 표현식을 유도하라.

(d) 반지름이 $r = R/5$ 인 곳에서 $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$ 의 크기를 μ_o 와 i 로 나타내면 얼마인가?

(e) 축전기의 안쪽 $r = R/5$ 에서 유도 자기장의 크기를 최대 유도자기장으로 나타내면 얼마인가?

(풀이) (a) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o i'_d$

$$q = \epsilon_o EA = \epsilon_o E(\pi r^2): i = i'_d = \frac{dq}{dt} = \pi \epsilon_o r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B(2\pi r) = \pi \mu_o \epsilon_o r^2 \frac{dE}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu_o \epsilon_o r}{2} \frac{dE}{dt} = \frac{r}{2c^2} \frac{dE}{dt}$$

※ $c = 1/\sqrt{\mu_o \epsilon_o} \rightarrow \mu_o \epsilon_o = 1/c^2$

$$(b) B = \frac{(11.0 \times 10^{-3} \text{m})}{2(3.0 \times 10^8 \text{m/s})^2} (1.50 \times 10^{12} \text{V/m}\cdot\text{s}) = 9.17 \times 10^{-8} \text{T}$$

$$(c) B(2\pi r) = \pi \mu_o \epsilon_o R^2 \frac{dE}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu_o \epsilon_o R^2}{2r} \frac{dE}{dt} = \frac{R^2}{2c^2 r} \frac{dE}{dt}$$

(d) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i'$ (여기서 i' 은 contour 내부에 있는 전류)

$$i' = i \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = i \frac{(R/5)^2}{R^2} = \frac{i}{25}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{25}$$

(e) $r = R/5$ 인 곳에서 B : $B = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} r = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} (R/5) = \frac{\mu_0 i_d}{10\pi R}$

$r = R$ 인 곳에서 $B = B_m$: $B_m = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R}$

$$\frac{B}{B_m} = \frac{1}{5} \rightarrow B = \frac{B_m}{5}$$

32.3 지구와 자기

지구는 거대한 자석이다. 우측 그림은 자기쌍극자로 나타낸 지구 자기장으로 자기쌍극자 축 MM 은 지구의 회전축 RR 과 11.5° 의 각도를 이룬다. 자기쌍극자의 남극은 북반구에 있다.

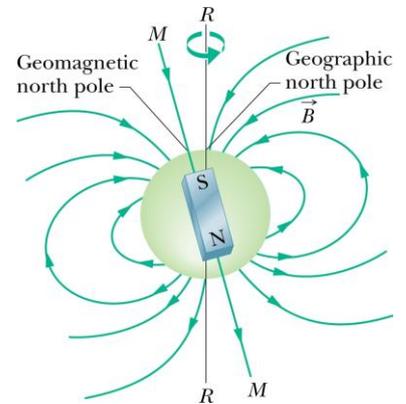
자기 편각: 지리적인 북쪽과 자기장의 수평성분 사이의 각.

나침반은 수직 축에 대하여 자유롭게 돌 수 있는 바늘 모양의 자석이다. 자기 편각은 나침반에서 바늘과 지리적인 북극 사이의 각도이다.

자기 경사각: 수평면과 자기장 방향 사이의 각.

경사계도 비슷한 자석인데 이것은 수평축에 대하여 자유롭게 돌 수 있다. 이것의 회전 수직면이 나침반의 방향과 맞아 있을 때 경사계의 바늘과 수평 사이의 각도가 자기 경사각이다.

자기의 북극과 남극은 영원한 것이 아니고 계속 위치가 변하며 매 백 만년 정도마다 지구의 극성이 뒤바뀌어 왔다.



32.4 자기와 전자

전자는 고유한 스핀 각운동량(Spin angular momentum, 단순히 스핀) \vec{S} 를 가지고 있다. \vec{S} 는 측정이 불가능하며 단지 축에 대한 성분만 잴 수 있고, 그 값은 다음과 같이 양자화 되어 있다.

※ 양자화: 기본 값의 정수 배 또는 일정한 값으로만 존재하는 것.

$$z \text{ 축에 대한 측정 값: } S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (32.37)$$

$$\text{여기서 } \hbar = h/2\pi \text{ 이고 } h \text{는 Planck 상수로 그 크기는 } h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad (32.38)$$

S_z 가 z 축에 평행이면 $S_z = \hbar/2$, 반 평행이면 $S_z = -\hbar/2$

$$\text{전자의 스핀 자기쌍극자 모먼트: } \vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S} \quad (32.39)$$

여기서 e 는 전자의 전하, 즉 $e=1.60\times 10^{-19}\text{C}$ 이고, m 은 전자의 질량으로 $m=9.11\times 10^{-31}\text{kg}$. $\vec{\mu}_s$ 도 축정이 불가능하며 단지 축의 성분크기만 얻어진다. 즉

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m} S_z \quad (32.40)$$

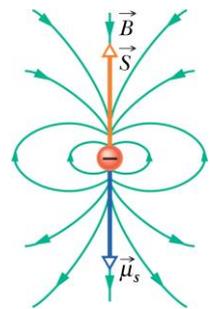
$$\mu_{s,z} = \pm \frac{e\hbar}{2m} \quad (32.41)$$

양과 음의 부호는 $\mu_{s,z}$ 가 z 축과 각각 평행이거나 반 평행인 것에 대응된다.

Bohr Magneton(보어 자기량): $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 2.97\times 10^{-24}\text{J/T}$ (32.42)

$$\mu_{s,z} = \pm \mu_B \quad (32.43)$$

전자의 스핀은 음 전하를 가진 입자의 자전이라 생각할 수 있으므로 전류가 역 방향으로 흐르는 것으로 간주할 수 있다. 이때 자전방향의 반대방향이 전류 방향이라고 생각되므로 스핀에 의한 자기쌍극자 모멘트 $\vec{\mu}_s$ 는 스핀 \vec{S} 와 반대방향이다. 우측 그림은 전자를 아주 작은 공으로 나타낼 경우의 스핀 \vec{S} , 스핀 자기쌍극자 모멘트 $\vec{\mu}_s$ 및 자기장 \vec{B} 를 보여준다.



중성자와 전자의 경우 스핀 자기 쌍극자 모우먼트는 스핀 S 의 반대 방향이며 양성자의 경우 같은 방향이다. 중성자나 양성자는 그 질량이 $m_p=1840m_e$ 이므로 μ_B 의 $1/1840$ 이다. 따라서 물질 내에서 그 효과는 미미하다.

외부 자기장 \vec{B}_{ext} 속에 있는 $\vec{\mu}_s$ 의 퍼텐셜 에너지: $U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{ext}$ (32.44)

$\vec{B}_{ext} = B_{ext} \mathbf{k}$ 일 때 퍼텐셜에너지: $U = -\mu_{s,z} B_{ext}$ (32.45)

※주의: 전자가 자전(spin)을 하거나 공전(revolution)을 한다는 것은 틀린 개념이다. 전자는 양자역학적으로 다루어야 하며 양자역학에서 전자는 공전이나 자전을 하지 않는다. 다만 전자의 자전이나 공전을 고전적으로 다루면 전자의 자기 쌍극자 모우먼트를 보다 쉽게 이해할 수 있기 때문에 고전적인 방법으로 해석한다는 것을 명심하자.

궤도 자기쌍극자 모멘트

전자는 고유궤도 각운동량 \vec{L}_{orb} 을 갖고 있기 때문에 궤도 자기쌍극자 모우먼트 $\vec{\mu}_{orb}$ 을 만든다. 우측 그림을 참조하면,

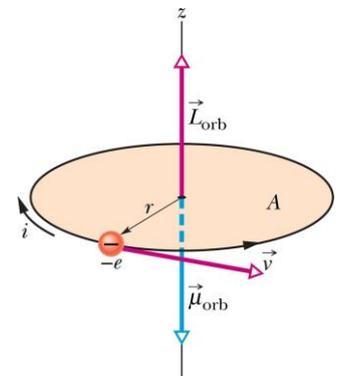
전류(단위 시간당 전자가 궤도의 한 지점을 지나는 전하량):

$$i = \frac{-e}{T} = -\frac{e}{2\pi r/v} = -\frac{ev}{2\pi r} \quad (32.46)$$

여기서 T 는 주기로 전자가 원 궤도를 한 바퀴 도는 데 걸린 시간.

전자의 전하는 $-e$ (부호를 동반). 전류가 음수인 이유는 전자의 도는 방향과 반대이기 때문이다.

궤도 자기 쌍극자 모멘트: $\mu_{orb} = iA = i(\pi r^2)$ (32.47)



$$(32.47)\text{을 } (32.48)\text{에 대입: } \mu_{orb} = -\frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = -\frac{erv}{2} \quad (32.48)$$

$$\text{수식 변형: } \mu_{orb} = -\frac{erv}{2} = -\frac{er(mv)}{2m} = -\frac{erp}{2m} = -\frac{e}{2m}L \quad (32.49)$$

여기서 m 은 전자의 질량. 이것은 벡터로 표시가 가능하다.

$$\text{벡터로 표시: } \vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}_{orb} \quad (32.50)$$

$$\text{여기서 } \vec{L}_{orb} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (32.51)$$

$\vec{\mu}_{orb}$ 는 \vec{L}_{orb} 와 반대 방향이며, 각 운동량 L_{orb} 은 축에 대해 양자화 되어 있다.

$$L_{orb,z} = m_\ell \hbar \quad (32.52)$$

여기서 $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\mu_{orb,z} = -m_\ell \frac{e\hbar}{2m} = -m_\ell \mu_B \quad (32.53)$$

$$\text{외부 자기장에서의 퍼텐셜 에너지: } U = -\vec{\mu}_{orb} \cdot \vec{B}_{ext} = -\mu_{orb,z} B_{ext} \quad (32.54)$$

32.5 물질의 자성에 의한 분류

(a) 반(역)자성(Diamagnetism): 원자의 자기모멘트(Magnetic moment)가 없는 물질 내에서 일어나는 약한 Magnetism으로 자화율(Susceptibility)은 음의 값을 가지며 대단히 작다. 따라서 자화는 가해진 자기장의 역방향으로 나타난다. 즉 Lenz 법칙에 의해 궤도 전자(Orbital electron)의 가속에 의해 생성된 Magnetic flux는 항상 외부장의 변화에 반대하는 방향으로 생성된다.

(b) 반 강자성(Antiferromagnetism): 같은 열의 분자는 같은 방향의 자기모멘트를, 이웃된 열의 분자들은 반대 방향의 자기모멘트를 갖는다. 따라서 전체적으로는 중성의 성질을 나타낸다. 그 예로 망간(Mn)은 이웃 원자들이 서로 반대방향의 자기모멘트를 갖고 있다.

(c) 상자성(Paramagnetism): 물질이 갖는 원자의 Magnetic dipole moment가 외부 자기장 방향으로 정렬하는 것을 상자성이라 한다. 물질의 원자수가 N 이면 총 자기 쌍극자 모우먼트는 $N\mu_B$ 가 될 수 있으나 평균병진운동 에너지 $K = 3kT/2$ (k 는 Boltzmann constant)가 자기 쌍극자 모우먼트 에너지 $U = 2\mu B_{ext}$ 보다 상온에서 크기 때문에 열 운동에 의해 완전히 정렬하지 못하고 다음의 Curie 식에 따라 자화된다.

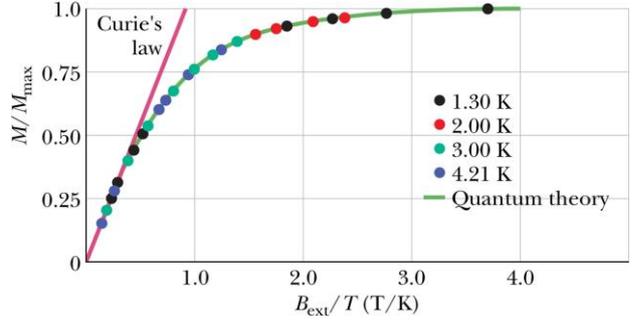
$$\text{상자성 자기화 } \bar{M} \text{의 크기: } M = \frac{\text{measured magnetic moment}}{V} \quad (V \text{ 는 상자성 물질의 부피})$$

$$M \text{의 단위: } \left[\frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3} \equiv \frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

$$\text{완벽히 정렬할 때 즉 포화되었을 때의 값: } M_{\max} = \frac{N\mu}{V}$$

$$\text{Curie 법칙: } M = C \frac{B}{T} \quad (C \text{ 는 물질에 따른 Curie 상수}) \quad (32.55)$$

여기서 B 는 외부 자기장, T 는 Kelvin 온도. 전이원소, 희토류 원소, 악티늄계 원소는 대표적인 상자성 물질이다. 우측 그림은 상자성 물질인 황화칼륨크롬의 자기화 곡선으로 왼쪽 구간에서 잘 맞고 우측 구간에서는 맞지 않으며 보는 바와 같이 포화상태에 도달한다.



(d) 강자성(Ferromagnetism): 작은 외부 장에도 자기 모멘트가 쉽게 정렬된다. 이것은 원자의 스핀 정렬이 옆에 있는 원자의 스핀에 영향을 주기 때문이며 일반적으로 높은 Curie 온도(자성이 없어지는 온도)를 갖는다. 철의 경우 이 온도는 1043K로 이 이상이 되면 한 방향으로 나열된 스핀은 무질서해지며 강자성의 성질은 사라진다.

토로이드의 철심으로 Ferrite Core(Fe_2O_3)를 사용하는 이유는 이 Core에 감긴 도선을 흐르는 전류에 의해 만들어지는 자기장 B_o 와 철심의 원자 쌍극자가 정돈되어 기여하는 B_M 이 상호 작용하여 강한 자기장을 얻기 때문이다.

$$B = B_o + B_M \quad (32.56)$$

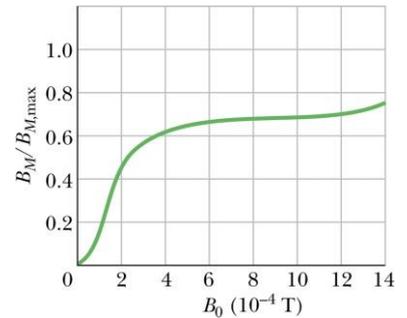
따라서 물질내의 자기장은 다음 수식에 의해 측정된다.

$$B_M = B - B_o \quad (32.57)$$

B_o 는 토로이드 내에 철심이 없을 때 $B_o = \mu_o in$ 이다.

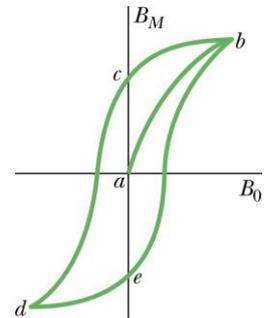
우측 그림은 강자성 물질의 자화곡선으로 $B_o = 1 \times 10^{-3} T$ 일 때 core의 자기쌍극자 정렬은 약 70%가 이루어 짐을 알 수 있다.

강자성 물질의 예: 철, 코발트, 니켈



자기구역: 강자성 물체들은 같은 방향으로 자기쌍극자가 나열된 수 많은 작은 구역으로 이루어져 있고 이 구역들은 무질서하여 자성이 없다.

이력곡선: 외부 자기장 B_o 가 증가하다가 다시 감소하는 동안 강자성 물질의 자화곡선은 초기 시작한 곡선을 따라 되돌아 가지 않는다. 우측 그림에서 곡선이 제자리로 되짚어 가지 않는 특성을 이력(Hysteresis)이라 하고 $bcdeb$ 를 이력곡선이라 한다. 여기서 a 는 자화되지 않은 초기 출발점이다. 자기정보 저장장치는 이 특성을 이용한 것이다.



보기문제 32.2 단 원자의 자기 쌍극자 모멘트가 $1.0\mu_B$ 인 상자성 기체가 $B = 1.5T$ 의 자기장에 놓였을 때 온도 $T = 300K$ 에서의 U_T 와 U_B 의 값을 비교하라.

$$(풀이) U_T = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300\text{K}) = 3.9 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

$$U_B = 2\mu_B B = 2(9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T})(1.5\text{T}) = 1.7 \times 10^{-4} \text{ eV}$$

보기문제 32.3 막대자석의 자기 쌍극자 모멘트 μ 를 측정하는 방법은 무엇인가?

(풀이) $\tau = -\chi\theta$ (χ 는 비틀림 상수) (1)

Newton의 제 2 법칙: $\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (2)

(1)=(2): $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\xi\theta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\chi}{I} = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{\chi}{I}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\chi}}$

균일한 외부 자기장 B 에 막대자석을 놓으면 토크는

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \rightarrow \tau = \mu B \sin\theta \approx \mu B\theta$ (3)

(1)과 (3)을 비교하면 $\chi = \mu B$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}} \rightarrow \mu = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{I}{B}\right)$

주기 T , 회전관성(Moment of Inertia) I 및 외부자기장 B 를 측정하여 μ 를 구할 수 있다.

보기문제 32.4 순수 철로 만든 나침반 바늘의 길이가 $l = 3.0\text{cm}$ 이고 너비는 $w = 1.0\text{mm}$ 이며 두께는 $t = 0.50\text{mm}$ 이다. 철 원자의 자기쌍극자 모멘트의 크기는 $\mu_{Fe} = 2.1 \times 10^{-23}\text{J/T}$ 이다. (a) 바늘의 원자가 10% 만큼 정렬하여 자기화 되었다면, 바늘의 자기쌍극자 모멘트 $\vec{\mu}$ 의 크기는 얼마인가? (b) 나침반 바늘을 수평의 남북 평행위치로부터 약간 밀어 놓으면 바늘은 진동을 한다. 진동주기가 2.2s 라면 나침반이 있는 곳에서 자기장의 수평성분의 크기는 얼마인가?

여기서 철의 밀도는 $\rho = 7900\text{kg/m}^3$, 원자량은 $M_m = 55.847\text{g/mol}$ 이다.

(풀이) (a) 철 원자의 수: $N = \frac{mN_A}{M_m} = \frac{\rho V N_A}{M_m}$

$V = lwt = (3.0 \times 10^{-2}\text{m})(1.0 \times 10^{-3}\text{m})(0.50 \times 10^{-3}\text{m}) = 1.5 \times 10^{-8}\text{m}^3$

$\mu = 0.10 N \mu_{Fe} = (0.10) \frac{\rho V N_A \mu_{Fe}}{M_m}$

$\mu = (0.10) \frac{(7900\text{kg/m}^3)(1.5 \times 10^{-8}\text{m}^3)(6.02 \times 10^{23}/\text{mol})(2.1 \times 10^{-23}\text{J/T})}{55.847 \times 10^{-3}\text{kg/mol}}$

$= 2.682 \times 10^{-3}\text{J/T}$

(b) 나침반 바늘의 회전관성: $I = \frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12} (\rho V) l^2$

$I = \frac{1}{12} (7900\text{kg/m}^3)(1.5 \times 10^{-8}\text{m}^3)(3.0 \times 10^{-2}\text{m})^2 = 8.89 \times 10^{-9}\text{kg} \cdot \text{m}^2$

위의 문제 풀이에서 $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}} \rightarrow B = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\frac{I}{\mu}\right)$

$B = \left(\frac{2\pi}{2.2\text{s}}\right)^2 \left(\frac{8.89 \times 10^{-9}\text{kg} \cdot \text{m}^2}{2.68 \times 10^{-3}\text{J/T}}\right) = 2.70 \times 10^{-5}\text{T}$