

제 36 장. 회절(에돌이: Diffraction)

Huygens principle : 주어진 순간에 slit에 들어온 파의 모든 점은 구형 2차 파속(Spherical secondary wavelets)으로 작용한다. 이 본성 때문에 진행하는 파는 작은 slit 또는 장애물을 만났을 때 그 뒤에 그림자를 만들지 않고 다시 새로운 파를 형성하는 것을 볼 수 있다. 회절(에돌이)은 slit(싹틈)을 통과한 빛의 구형 2차 파의 간섭 현상이며 많은 소스 파를 다루는 것이 간섭과 다르다.

36.1 Fraunhofer와 Fresnel 회절의 차이

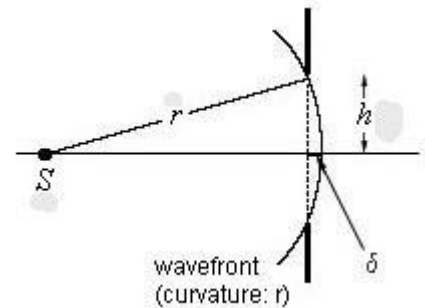
(i) Fraunhofer (Far-Field) Diffraction

Aperture(slit)와 광원(source) 그리고 관찰점 사이가 먼 Far-Field 회절로, 이 경우 파는 평면 파로 취급하고 회절 무늬(pattern)는 크기만 바뀌며 형태는 변하지 않는다. 빛이 aperture를 통과 시 다음의 수학적 조건을 만족하면 원거리 회절 값은 근사적인 평면 파로 취급하여 계산한다.

$$(r - \delta)^2 + h^2 = r^2$$

$$\delta = r - (r^2 - h^2)^{1/2} = r - r[1 - (\frac{h}{r})^2]^{1/2}$$

$$\delta = r[1 - \{1 - \frac{1}{2}(\frac{h}{r})^2 + \dots\}] \approx \frac{h^2}{2r}$$



Far-field란 다음을 의미한다.

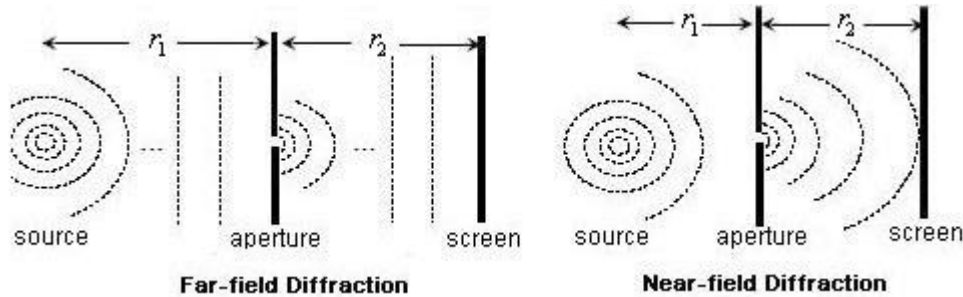
$$\delta \ll \lambda \text{ 또는 } r \gg \frac{h^2}{2\lambda} \text{ 또는 } r \gg \frac{A}{\lambda} \quad (A: \text{Aperture 면적}) \text{ 이면}$$

slit(aperture)과 screen에 도달하는 파는 평면 파(plane wave)로 취급할 수 있다는 뜻이다. 즉 aperture를 통과하는 파들은 평면 파로 근사(approximation)하고 관찰점에서의 결과는 그곳에 도달한 파의 위상들에 의해 결정된다. 이러한 조건에서 위상을 결정하는 광로 차는 선형성(linearity)을 갖기 때문에 하나의 선형함수(linear function)로 기술하며, 이것은 Fraunhofer 회절을 계산하는 데 사용하는 결정적인 수학적 도구이다.

(ii) Fresnel (Near-Field) Diffraction

관찰점과 aperture 사이가 가까운 회절로서, aperture의 상이 관찰 스크린에 투영되며 스크린에 들어오는 파가 평면 파라는 가정은 적용되지 않고, 일차 파속의 모든 점들은 구형 2차 파속의 emitter(진동자)들로 역할 한다. 수학적으로는 Huygens-Fresnel principle을 보다 더 구체화하여 분석하며, 2차 emission의 방향성을 기술하는 경사도(obliquity or inclination factor)가 소개됨으로써 Fraunhofer 회절과 구별된다.

아래 그림은 Fraunhofer (Far-Field)와 Fresnel (Near-Field) 회절에 대한 aperture(slit)를 통과하는 파와 screen에 도달하는 파의 모습을 보여준다.



36.2 회절의 고찰

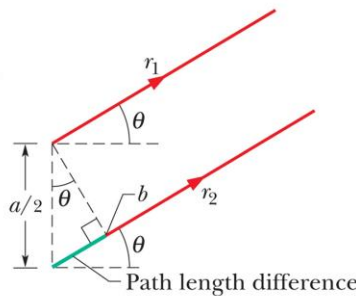
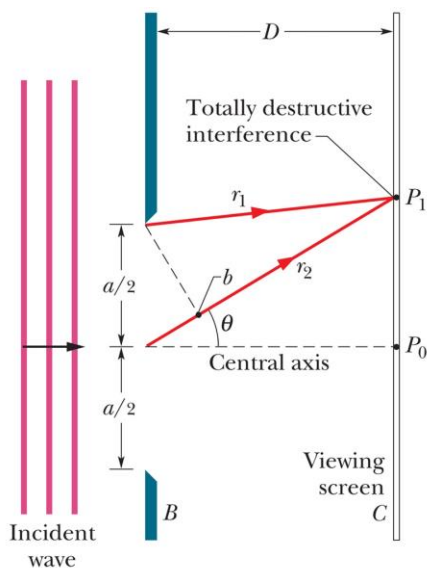
단일 슬릿에 의한 극소 위치의 결정

결맞음 파(coherent waves)의 정의: 파들이 더해져 간섭현상을 보일 수 있는 파.

좁은 slit(μm order 이하)을 통해 들어오는 파는 그 slit에서 파동을 다시 시작하는 것처럼 물결 무늬를 형성하고, slit 내의 각 점은 마치 일정한 간격으로 놓여 있는 진동자(oscillator)들이나 것처럼 행동한다. 회절의 경우 발산하는 결맞음 파는 중앙에 도달할 때 같은 위상을 갖기 때문에 중앙 부분에서 가장 밝은 간섭이 일어난다.

아래 그림은 중앙으로부터 위쪽으로 첫 번째 소멸간섭이 일어나는 점 P_1 의 위치를 구하는 방법을 나타낸 것이다. 간격이 a 인 slit을 두 부분으로 나누어 생각할 때 꼭지 점과 중심축에서 출발하는 파는 같은 위상을 가지며(Huygens 평면), 두 파의 경로차가 $\lambda/2$ 인 경우 점 P_1 에 모인 빛은 소멸간섭이 될 것이다. 이와 같은 분석은 어느 이웃한 임의의 두 빔살에 대해서도 똑 같이 적용할 수 있고, 한 쌍의 이웃 빔살들은 모두 같은 광로 차인 아래 수식으로 주어진다.

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow a \sin \theta = \lambda \quad (36.1)$$



$$\text{소열간섭의 일반 식: } a \sin \theta = m\lambda \quad (36.2)$$

의미: 단일 slit(싹) 회절에서 꼭대기 광선과 바닥 광선(중앙에서 온 광선)의 광로 차 $a \sin \theta$ 가 λ 의 정수 배이면 어두운 무늬가 생긴다.

소열간섭(Minima)이 놓이는 각도 θ 를 slit의 크기로 조사해 보면

$$a = \lambda \text{ 일 때 } \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2 \quad (36.3)$$

$$a = \sqrt{2}\lambda \text{ 일 때 } \sin \theta = 1/\sqrt{2} \rightarrow \theta = \pi/4 \quad (36.4)$$

$$a = 2\lambda \quad \sin \theta = 1/2 \rightarrow \theta = \pi/6 \quad (36.5)$$

첫 번째 소열간섭(first minima)은 slit의 크기가 작을수록 중심축에서 멀어지는 것을 확인할 수 있다. 즉 회절 무늬의 영역은 슬릿의 폭이 작을수록 더 넓어진다.

이번에는 두 번째 극소 점을 찾기 위하여 slit을 4 등분하고 이웃한 파의 광로 차가 $\lambda/2$ 라 하자. 그러면 소열간섭을 일으키는 극소 점은

$$\text{두 번째 극소(second minimum): } \frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow a \sin \theta = 2\lambda \quad (36.6)$$

이 경우에 P_2 가 위치하는 각을 입사파장에 대한 slit의 크기에 따라 조사해 보면

$$a = 2\lambda \text{ 일 때, } \sin \theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2 \quad (36.7)$$

$$a = 4\lambda \text{ 일 때, } \sin \theta = 1/2 \rightarrow \theta = \pi/6 \quad (36.8)$$

따라서 가시광선 사용시, slit 폭이 mm order 이상이면 회절 현상을 관찰하기가 어렵다.

슬릿의 크기를 늘려가며 계속해서 $\lambda/2$ 되는 행로 차의 파들을 적용하여 일반화하면

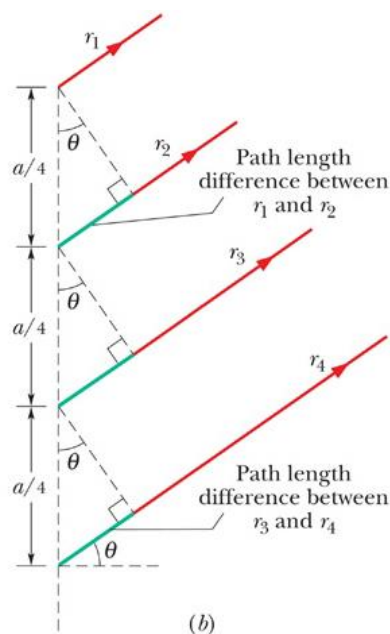
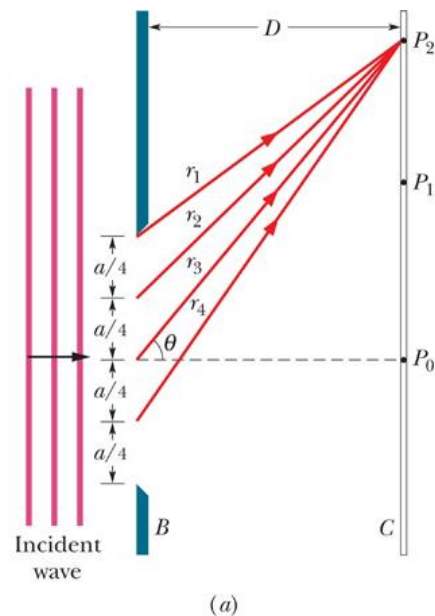
$$a \sin \theta = m\lambda \quad (36.9)$$

$m=1$: 1st minimum (점 P_1)

$m=2$: 2nd minimum (점 P_2)

$\vdots$

$m=N$: Nth minimum (점 P_N)



※ 첫 번째 소멸간섭 위치를 조사하는 이유: 중앙극대와 버금극대(2차 극대)는 중간에 소멸간섭의 거리에 의해 확연히 구분할 수 있다. 이 거리가 짧으면(각이 작으면) 중앙극대(차수 $m=0$)와 버금극대(차수 $m=1$)의 구분이 모호해져 회절을 일으키는 현상을 구분할 수 없게 된다. 따라서 slit의 크기가 입사파장보다 아주 크면 중앙극대와 버금극대를 구분하는 것이 불가능해 지므로 회절현상을 거의 볼 수 없게 된다.

보기문제 36.1 너비 a 의 슬릿에 백색광을 비추었다. (a) 빨간색 빛의 파장이 $\lambda = 650\text{nm}$ 라고 할 때 $\theta = 15^\circ$ 에서 첫 번째 극소가 일어나기 위한 a 값을 구하여라. (b) (a)의 경우와 같이 빨간색 빛이 첫 번째 극소가 일어나는 위치(15°)에 첫 번째 극대가 일어나는 파장 λ' 을 구하라.

(풀이) (a) 극소가 나타나는 일반 식: $a \sin \theta = m\lambda$

$$\text{첫 번째 극소이므로 } m=1: a = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{650\text{nm}}{\sin 15^\circ} = 2511\text{nm}$$

(b) 첫 번째 극대는 대략 첫 번째 극소와 두 번째 극소의 중앙에 위치할 것이므로 $m'=1.5$

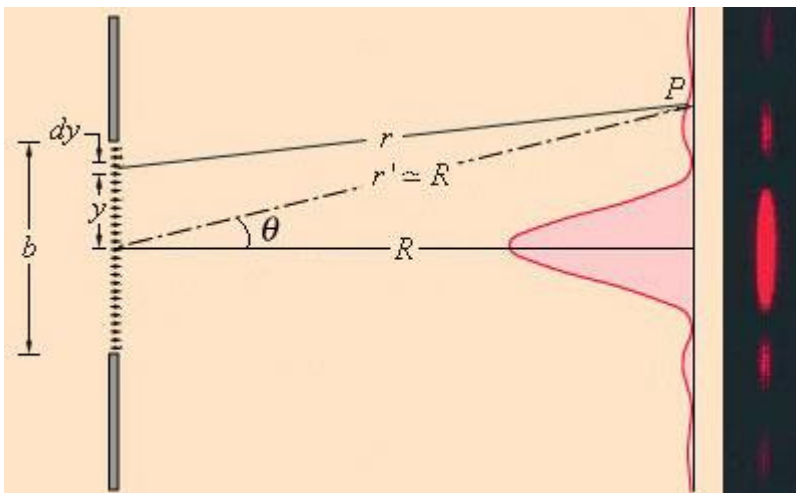
$$\lambda' = \frac{a \sin \theta}{m'} = \frac{(2511\text{nm}) \sin 15^\circ}{1.5} = 433\text{nm}$$

36.3 정량적 분석에 의한 단일 slit 회절의 세기

아래 그림에서 단일 slit에 있는 단위길이당 진동자의 진폭 세기(source strength)를 ξ_L 로 정의하면 dy 에 있는 진동자가 점 P 에 만드는 전기장은 다음으로 표시된다.

$$dE = \xi_L \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} dy \quad (36.10)$$

여기서 $r = r(y)$ 이고, slit(aperture)의 크기 b 는 입사파장의 수십 배 이내(μm 이내) 임을 명심하자.



(36.10)은 회절을 계산하는 강력한 수학적 도구(mathematical tool)이다. 여기서 R 은 슬릿의 중앙에서 점 P 까지의 거리로 그 거리에 따라 Fraunhofer와 Fresnel 회절을 구분한다.

$b \ll R$ 이면 Fraunhofer 회절로 $r(y)$ 는 R 로부터 크게 벗어나지 않으므로 dy 내의 진동자에 서 오는 파들은 모두 결맞음(coherent)하다고 가정한다. 이 경우 점 P 에 도달하는 파의 진폭 은 $r(y)$ 의 변화보다 위상 변화에 훨씬 더 민감하므로 분모는 $r=R$ 의 근사 값을 적용하고, 지수에 있는 kr 은 위상을 나타내기 때문에 r 을 변수로 그대로 사용한다. 이와 달리 Fresnel 회절에서는 $b \ll R$ 이 아니기 때문에 분모는 $r \ll R$ 의 근사 값을 사용할 수 없으며 분모의 r 도 변수로 사용된다.

단일 슬릿(Single Slit)의 Fraunhofer Diffraction

Fraunhofer 회절의 $b \ll R$ 조건에 의해 $r \ll R$ 의 근사를 사용하면, (36.10)은

$$dE = \frac{\xi_L}{R} e^{i(\omega t - kr)} dy \quad (36.11)$$

여기서 $(\xi_L/R)dy$ 는 P 점에 도달한 파의 진폭이다. Cosine rule에 의해

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + y^2 - 2Ry \cos(90^\circ - \theta) \\ \frac{r}{R} &= [1 - (\frac{2y \sin \theta}{R} + \frac{y^2}{R^2})]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{2y \sin \theta}{R} + \frac{y^2}{R^2}) + \dots \\ \frac{r}{R} &\approx 1 - \frac{y \sin \theta}{R} \quad \rightarrow r = R - y \sin \theta \end{aligned} \quad (36.12)$$

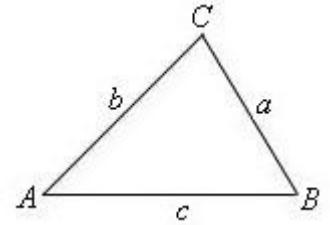
θ 는 xz 평면에서 점 P 방향으로 측정된 각이다.

※ Cosine rule

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos B \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos A \end{aligned}$$

※ Sine rule

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



(36.12)를 (36.11)에 대입하고 적분하면

$$dE = \frac{\xi_L}{R} e^{i[\omega t - k(R - y \sin \theta)]} dy \quad (36.13)$$

$$E = \frac{\xi_L}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{-b/2}^{b/2} e^{(ik \sin \theta)y} dy \quad (36.14)$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{\xi_L}{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \right] [e^{(ik \sin \theta)y}]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\xi_L}{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \right] [e^{i(kb/2) \sin \theta} - e^{-i(kb/2) \sin \theta}] \\ &= \frac{\xi_L}{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \right] [2i \sin(\frac{kb}{2} \sin \theta)] = \frac{\xi_L}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{2 \sin[(kb/2) \sin \theta]}{k \sin \theta} \\ E &= \frac{\xi_L b}{R} e^{i(\omega t - kR)} \frac{\sin[(kb/2) \sin \theta]}{(kb/2) \sin \theta} \end{aligned} \quad (36.15)$$

$$\beta \equiv (kb/2)\sin\theta \quad (36.16)$$

라 놓으면

$$E = \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right) e^{i(\omega t - kR)} \quad (36.17)$$

빛의 세기(intensity): $I(\theta) = EE^*$.

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \quad (36.18)$$

※ (36.18)식에서 앞에 $\frac{1}{2}$ 이 있는 이유: (36.17)의 $e^{i(\omega t - kR)}$ 를 삼각함수로 표현하면,

$e^{i(\omega t - kR)} = \cos(\omega t - kR) + i \sin(\omega t - kR)$. 여기서 허수부분을 택하면 (36.17)은

$$E = \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR)$$

$$\text{Intensity: } I = \left(\frac{\xi_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \langle \sin^2(\omega t - kR) \rangle = \left(\frac{\xi_L b}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)$$

사인함수 제곱의 평균치는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$\theta = 0 \text{ 이면 } \frac{\sin\beta}{\beta} = 1. \text{ 그 결과 } I_o = I(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_L b}{R} \right)^2 \quad (36.19)$$

이것은 screen에 나타난 중앙에서의 세기로 principal maximum이라 한다.

$$\text{일반 각에서의 세기: } I(\theta) = I_o \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \quad (36.20)$$

Sinc Function 을 사용하여

$$I(\theta) = I_o \text{ sinc}^2\beta \quad (36.21)$$

$$\beta = \frac{kb}{2} \sin\theta = \frac{2\pi b}{\lambda} \sin\theta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta \quad (36.22)$$

(36.20)의 해석

(a) $I(\theta)$ 는 z 축에 대해 대칭(symmetry)인 함수이다.

(b) $b \ll \lambda$ 이면 θ 가 0 을 조금만 벗어나도 빛의 세기는 급격히 감소하여 회절무늬를 거의 볼 수 없다. 이와 반대로 $b \gg \lambda$ 이면 β 는 작은 값이므로 $\sin\beta \approx \beta$, 따라서 $I(\theta) = I_o$ 로 거의 principal maximum만 남는다.

(c) $I(\theta) = 0$ 인 각도: $I(\theta) = I_o \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2$ 에서 $\sin\beta = 0$ 일 때이므로

$$\beta = \pm m\pi : \frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta = \pm m\pi \rightarrow b \sin\theta = \pm m\lambda \quad (36.23)$$

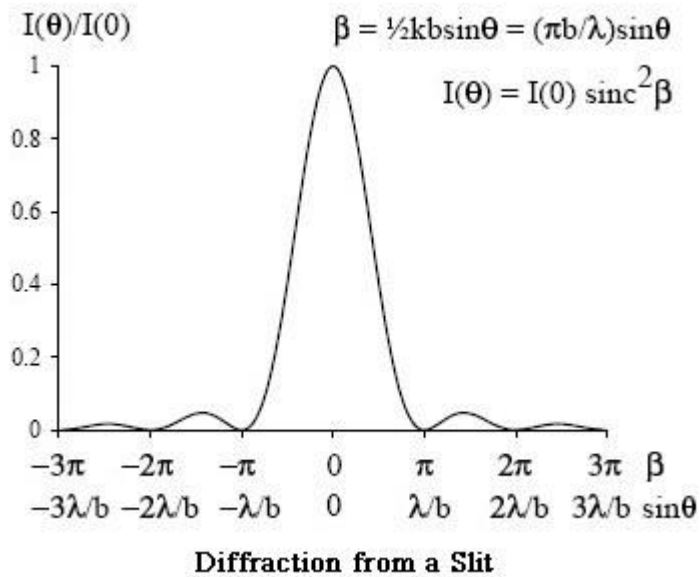
$$\sin\theta = m \frac{\lambda}{b} \quad (36.24)$$

$$\text{첫 번째 극소}(m=1)\text{가 일어나는 각도: } \sin\theta = \frac{\lambda}{b} \quad (36.25)$$

b 가 크면 클수록 회절 각 θ 는 작아지며 그 결과 중앙 극대의 폭이 좁아진다. b 가 λ 에 비해

아주 크면 회절은 없다.

아래 그림은 $I(\theta)/I_o$ 를 β 와 $\sin \theta$ 로 나타낸 그림이다.



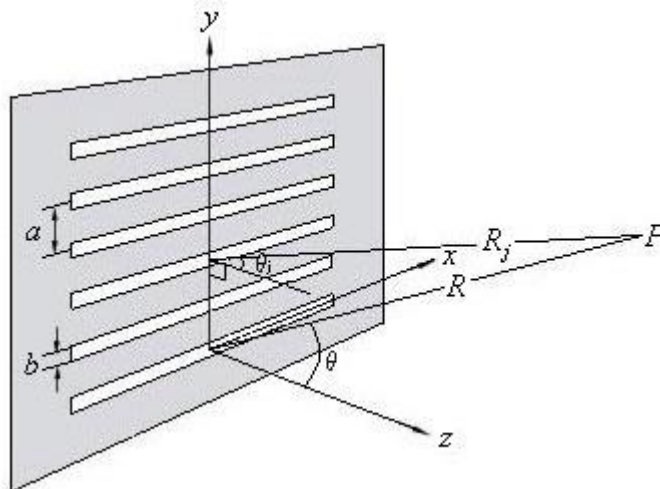
보기문제 36.2 단일 실험 회절 무늬에서 처음 세 개의 2차 극대의 세기를 중앙 극대의 세기에 대한 비로 나타내어라.

(풀이) 이차 극대는 어림잡아 서로 이웃하는 두 극소의 중간 정도에 있다. 따라서 위의 그림에서 개략적인 계산은

1차 극대($I(0)$)에 대한 2차 극대의 비: $\frac{I(\theta)}{I_o} = \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{\sin 1.5\pi}{1.5\pi}\right)^2 = 0.045$

1차 극대($I(0)$)에 대한 3차 극대의 비: $\frac{I(\theta)}{I_o} = \left(\frac{\sin 2.5\pi}{2.5\pi}\right)^2 = 0.016$

36.4 다중 슬릿(Double slit)의 회절



폭이 b 인 slit이 일정한 간격 a 로 M 개가 y 축으로 있다고 하고, 이들 slit이 점 P 에 만드

는 회절 세기를 계산한다. 여기서 y 축의 slit 폭 b 는 입사 파장의 수십 배 이내(μm order)로 대단히 좁아서 회절을 일으키지만 x 축은 길기 때문에 이 방향으로 회절은 거의 없다.

일반화하면 첫 번째 slit로부터 j 번째에 있는 slit이 점 P 에 만드는 중첩은 적분 구간을 제외하고 단일 slit에서 계산한 (36.14)와 동일하다.

$$E_j = \frac{\xi_L}{R} e^{i(\omega t - kR)} \int_{ja-b/2}^{ja+b/2} e^{(ik \sin \theta)y} dy = \frac{\xi_L}{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \right] [e^{(ik \sin \theta)y}]_{ja-b/2}^{ja+b/2} \quad (36.26)$$

$$\begin{aligned} E_j &= \frac{\xi_L}{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \right] [e^{ik(ja+b/2)\sin \theta} - e^{ik(ja-b/2)\sin \theta}] \\ &= \frac{\xi_L}{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{ik \sin \theta} \right] [e^{i(kb/2)\sin \theta} - e^{-i(kb/2)\sin \theta}] e^{i(jka \sin \theta)} \end{aligned}$$

여기서 $j = 0, 1, 2, \dots, (M-1)$. 위의 결과는

$$E_j = \frac{\xi_L b \sin \beta}{R \beta} e^{i(\omega t - kR)} (e^{ika \sin \theta})^j \quad (36.27)$$

$$\alpha \equiv (ka/2) \sin \theta \quad (36.28)$$

라 놓고, 모든 slit에서 점 P 에 모이는 전기장을 계산하면

$$E = \sum_{j=0}^{M-1} E_j = \frac{\xi_L b \sin \beta}{R \beta} e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{M-1} (e^{i2\alpha})^j \quad (36.29)$$

등비수열의 합: $\sum_{j=0}^{M-1} (e^{i2\alpha})^j = [1 + (e^{i2\alpha}) + (e^{i2\alpha})^2 + (e^{i2\alpha})^3 + \dots + (e^{i2\alpha})^{M-1}]$

$$= \frac{e^{i2\alpha M} - 1}{e^{i2\alpha} - 1} = \frac{e^{iM\alpha} (e^{iM\alpha} - e^{-iM\alpha})}{e^{i\alpha} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} = e^{i(M-1)\alpha} \left(\frac{\sin M\alpha}{\sin \alpha} \right) \quad (36.30)$$

(36.30)을 (36.29)에 대입.

$$E = \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin M\alpha}{\sin \alpha} \right) e^{i[\omega t - kR + (M-1)\alpha]} \quad (36.31)$$

$\theta = 0$ 에서 빛의 세기(intensity or flux density): 점 P 에 도달하는 파가 모두 같은 위상(in-phase)의 보강 간섭만 일어나는 경우이며, 중심부분에서 한 slit의 세기는 (36.19)의 I_0 이므로 중심에서 M 개에 의한 총 세기는

$$I(0) = M^2 I_0 \quad (36.32)$$

여기서 $[I_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_L b}{R} \right)^2]$

$$\text{일반 각에서의 합성된 빛의 세기: } I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin M\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (36.33)$$

폭 $b \rightarrow 0$ 이면 결맞음(coherent) 선형 진동자들(linear oscillators)의 빛의 세기가 된다.

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin M\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (36.34)$$

슬릿의 수에 따른 분석

(36.31)과 (36.33)을 다시 쓰면

$$\text{합성된 전기장: } E = \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin M\alpha}{\sin \alpha} \right) e^{i[\omega t - kR + (M-1)\alpha]} \quad [36.31]$$

$$\text{세기(Intensity): } I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin M\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad [36.33]$$

(a) 단일 슬릿(single slit: $M=1$)

$$\text{전기장: } E = \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) e^{i(\omega t - kR)} \quad (36.35)$$

$$\text{빛의 세기: } I(\theta) = I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (36.36)$$

이것은 위에서 본 (36.17)과 (36.20)이다.

(b) 이중 슬릿(double slit: $M=2$)

$$\text{전기장: } E = \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} \right) e^{i(\omega t - kR + \alpha)} = 2 \frac{\xi_L b}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) (\cos \alpha) e^{i(\omega t - kR + \alpha)} \quad (36.37)$$

빛의 세기: (36.32)의 $I(0) = M^2 I_o$ 에서 $M=2$ 이므로 $I(0) = 4I_o$ 이다. 따라서 (36.33)은

$$I(\theta) = 4I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 4I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (36.38)$$

36.5 이중 슬릿의 회절에 의한 Intensity

$$\text{이중 슬릿의 회절 세기(intensity): } I = 4I_o \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \alpha \quad (36.39)$$

전체적인 현상을 해석하자면, 간섭 항(interference term) $\cos^2 \alpha$ 가 회절 항(diffraction term)인 $(\sin \beta / \beta)^2$ 에 의해 조정(modulation)된 것으로 간주할 수 있다. b 가 일정하고 아주 좁다면 회절 형태는 넓은 중심영역에 걸쳐 균일할 것이고 이상적인 Young의 fringe를 닮은 밴드(band)들이 그 영역에 나타날 것이다.

회절 항 $\left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$ 의 해석

(a) Young의 간섭위치: $\frac{\sin \beta}{\beta} = 1$ 이 되려면 $\beta = 0$ 일 때 이므로 이때 $I(\theta)$ 는

$$I(\theta) = 4I_o \cos^2 \alpha \quad (36.40)$$

보강간섭 $I(\theta) = 4I_o$ 가 되는 위치(maxima의 위치)는

$$\alpha = \frac{ka}{2} \sin \theta = \pm m\pi \rightarrow \sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{a}, (m=0,1,2,\dots) \quad (36.41)$$

(b) Missing order 위치: $\frac{\sin \beta}{\beta} = 0$, 즉 $\sin \beta = 0$ 일 때 이므로 보강 간섭된 위치가 회절로 인해 사라지는 위치는

$$\sin \beta = 0 \rightarrow \beta = \pm m' \pi, (m'=0,1,2,\dots) \quad (36.42)$$

$$\beta = \frac{kb}{2} \sin \theta = \pm m' \pi \rightarrow \sin \theta = \pm m' \frac{\lambda}{b} \quad (36.43)$$

보기문제 36.3 슬릿 폭이 b 이고 슬릿과 슬릿 사이의 간격이 $a = 3b$ 인 이중 슬릿에 파장이 λ 인 빛이 들어올 때, Fraunhofer pattern에 대한 세기변화(irradiance distribution)를 나타내어라.

(풀이) 간섭의 Missing 위치(식 36.43의 적용): $\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b}, \pm \frac{2\lambda}{b}, \dots$

간섭위치(식 36.41의 적용): $\sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{a} \rightarrow \sin \theta = 0, \pm \frac{\lambda}{3b}, \pm \frac{2\lambda}{3b}, \pm \frac{\lambda}{b}, \dots$

각 간섭 위치에서 세기

(1) $\sin \theta = 0$: $I(0) = 4I_0$

(2) $\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{3b}$: $\alpha = \pi$ 로 $\cos^2 \alpha = 1$

$$\beta = \frac{(2\pi/\lambda)b}{2} \left(\pm \frac{\lambda}{3b} \right) = \pm \frac{\pi}{3}, \quad \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = \left\{ \frac{\sin(\pi/3)}{(\pi/3)} \right\}^2 = \frac{27}{4\pi^2}$$

$$I(\theta) = \left(\frac{27}{4\pi^2} \right) I(0) \approx (0.6846) I(0)$$

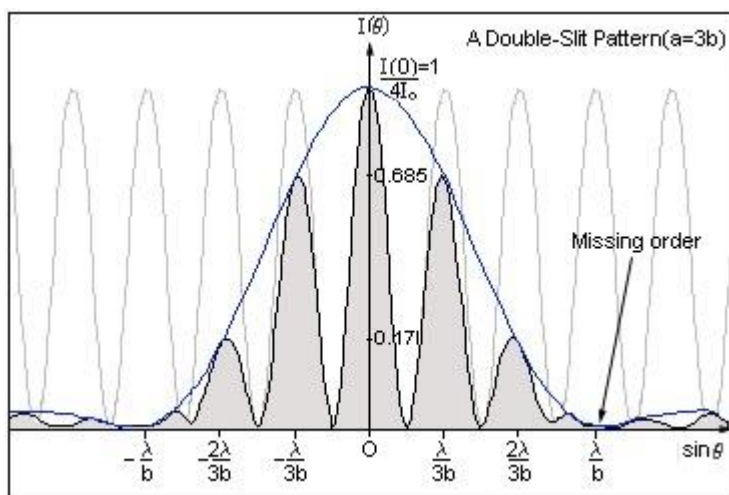
(3) $\sin \theta = \pm \frac{2\lambda}{3b}$: $\alpha = 2\pi$ 로 $\cos^2 \alpha = 1$

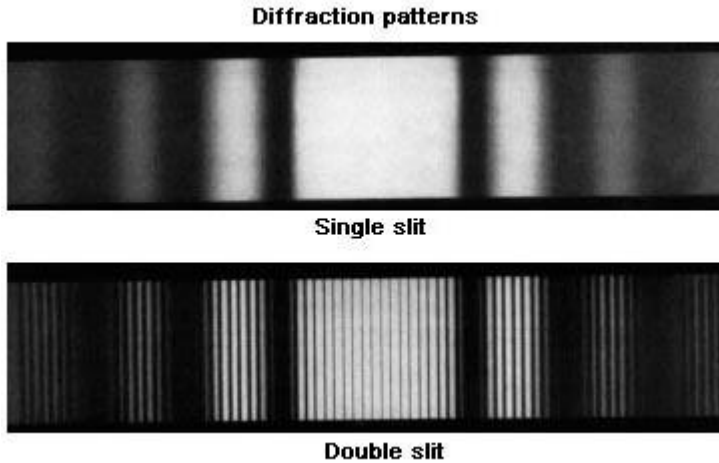
$$\beta = \frac{(2\pi/\lambda)b}{2} \left(\pm \frac{2\lambda}{3b} \right) = \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 = \left\{ \frac{\sin(2\pi/3)}{(2\pi/3)} \right\}^2 = \frac{27}{16\pi^2}$$

$$I(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{27}{4\pi^2} \right) I(0) \approx \frac{1}{4} (0.6846) I(0)$$

(4) $\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b}$: 위에서 본 바와 같이 $\sin \beta = 0$ 이므로 $I(\theta) = 0$. 즉 missing order이다.

위치에 따른 density distribution은 다음 그림과 같다.





보기문제 36.4 이중 슬릿에서 빛의 파장은 $\lambda = 405\text{nm}$, 슬릿의 간격은 $b = 19.44\mu\text{m}$, 슬릿의 너비는 $a = 4.050\mu\text{m}$ 이다. (a) 회절이 싸개선의 중앙극대에는 몇 개의 밝은 간섭 무늬가 있는가? (b) 얼마나 많은 밝은 간섭 무늬가 회절 싸개선의 첫 번째 버금 극대 안에 있는가?

(풀이) (a) 간섭위치: $\sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{a}$ (1)

Missing order 위치: $\sin \theta = \pm m' \frac{\lambda}{b}$ (2)

(1)=(2): $m \frac{\lambda}{a} = m' \frac{\lambda}{b} \rightarrow m' = \frac{b}{a} m$

첫 번째 Missing order 위치는 $m=1$ 일 때

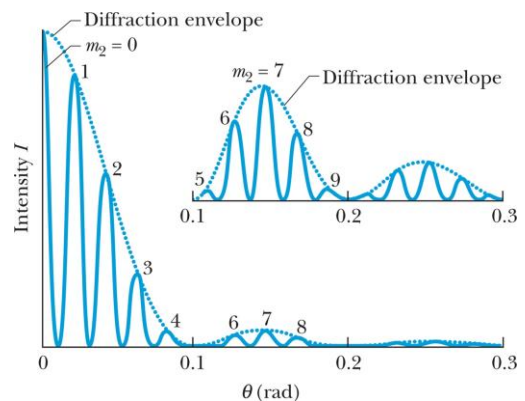
$$m' = \frac{19.44\mu\text{m}}{4.050\mu\text{m}} (1) = 4.8$$

좌표의 중앙을 기준으로 한쪽에서 계산된 값의 두 배가 된다. 즉 9개의 밝은 무늬가 있다.

(b) 두 번째 Missing order 위치는 $m=2$ 일 때 이므로 그 위치는

$$m' = \frac{19.44\mu\text{m}}{4.050\mu\text{m}} (2) = 9.6$$

따라서 두 번째 envelop에 있는 무늬 수는 $9.6 - 4.8 = 4.8$, 즉 4개가 있다.

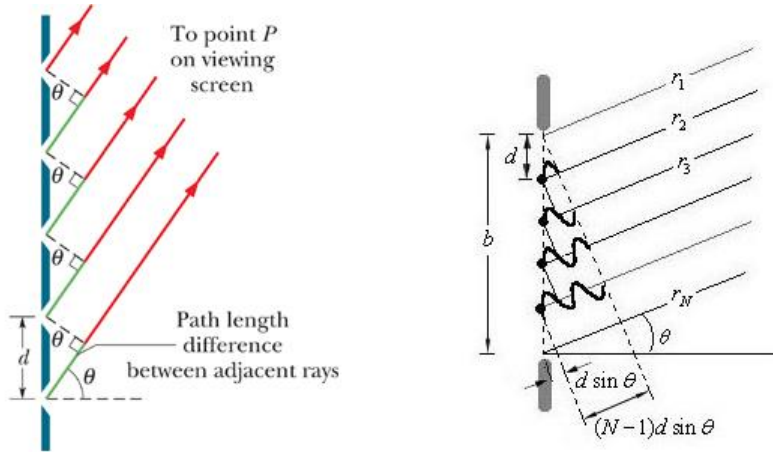


36.6 회절발(Diffraction Gratings)

mm당 수천 개의 slit을 갖고 있는 경우(이것을 발, 영어로 Gratings라고 함) 회절에 의한 극대는 매우 좁으며(회절 선이라 함) 이들은 상대적으로 어두운 영역에 의해서 분리된다.

Screen은 발로부터 충분히 멀리 떨어져 있어 Screen 위의 어떤 점 P 에 도달하는 광선들은 평행하다고 가정한다. 만일 길이 b 인 곳에 일정한 간격 d 로 N 개의 창(발)이 있을 때 간격 d 는 $d = b/N$ 이며 이때 창 크기는 입사 파장과 유사하거나 그보다 작은 경우이다. 이것은 마치 slit 폭 b 인 창에 일정한 간격 d 로 N 개의 결맞음 진동자(coherent oscillator)가 있는

것과 동등하다.



입사광 $E = E_o e^{i(kr - \omega t)}$ 에 그 진동자들이 반응하여 만든 2 차파(2nd wavelets)가 점 P 에 모인다고 가정하면, 이때 점 P 에 모인 총 전기장은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} E &= E_o [e^{i(kr_1 - \omega t)} + e^{i(kr_2 - \omega t)} + e^{i(kr_3 - \omega t)} + \dots + e^{i(kr_{N-1} - \omega t)} + e^{i(kr_N - \omega t)}] \\ &= E_o e^{i(kr_1 - \omega t)} [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \dots + e^{ik(r_{N-1} - r_1)} + e^{ik(r_N - r_1)}] \end{aligned} \quad (36.44)$$

인접한 두 파의 광로 차(Optical path length difference): Λ

$$\Lambda = r_N - r_{N-1} = d \sin \theta \quad (36.45)$$

연속적인 광로 차를 Λ 로 나타내면

$$\begin{aligned} \Lambda &= r_2 - r_1 = d \sin \theta \\ 2\Lambda &= r_3 - r_1 = 2d \sin \theta \\ &\vdots \\ (N-2)\Lambda &= r_{N-1} - r_1 = (N-2)d \sin \theta \\ (N-1)\Lambda &= r_N - r_1 = (N-1)d \sin \theta \end{aligned}$$

이웃 한 두 파 사이의 위상 차(phase difference): $\delta = k\Lambda = kd \sin \theta$ (36.46)

(36.46)을 사용하면 (36.44)는 다음과 같이 정돈된다.

$$E = E_o e^{-i\omega t} e^{ikr_1} [1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + \dots + (e^{i\delta})^{N-2} + (e^{i\delta})^{N-1}] \quad (36.47)$$

괄호 속은 등비수열의 합으로 표시할 수 있다.

※ 등비 수열의 합의 공식: $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, (a : 초항, r : 공비, n : 항수).

$$E = E_o e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[\frac{1 - (e^{i\delta})^N}{1 - e^{i\delta}} \right] = E_o e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \left[\frac{e^{i\delta N} - 1}{e^{i\delta} - 1} \right] \quad (36.48)$$

괄호 속을 계산하면

$$\frac{e^{i\delta N} - 1}{e^{i\delta} - 1} = \frac{e^{i\delta N/2}}{e^{i\delta/2}} \frac{(e^{i\delta N/2} - e^{-i\delta N/2})}{(e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})} = [e^{i(N-1)\delta/2}] \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]$$

따라서 (36.47)은

$$E = E_o e^{-i\omega t} (e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]}) \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right] \quad (36.49)$$

중앙 진동자로부터 P 점까지의 거리를 R 이라 하고 (36.46)의 $d \sin \theta = \delta/k$ 을 사용하면,

$$R = \frac{1}{2}(N-1)d \sin \theta + r_1 = (N-1) \frac{\delta}{2k} + r_1 \rightarrow (N-1) \frac{\delta}{2} = k(R-r_1) \quad (36.50)$$

(36.49)는 (36.50)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$E = E_o e^{i(kR - \omega t)} \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right] \quad (36.51)$$

$$\text{빛의 세기(Intensity): } I = I_o \left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right]^2 \quad (36.52)$$

Principal Maxima: 분자와 분모가 모두 0에 접근하는 조건을 만족하면 그곳에서 회절 세기가 강하게 나타난다. 그러한 조건은

$$\frac{\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = 2m\pi \quad (36.53)$$

$$kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta = 2m\pi$$

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (36.54)$$

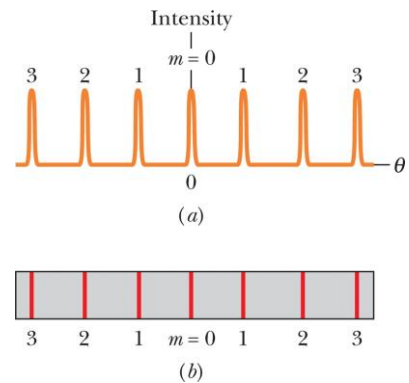
$$\text{※ L'Hospital rule: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(Nx)}{\sin x} = N$$

Zero-order Principal Maximum: $m=0$ 일 때 가장 강한 회절 강도가 나타나며 그것은 회절의 중앙 축이다. 만일 slit의 크기가 $b=d < \lambda$ 이면, (36.52)는 $m=0$ 로 zero-order

principal maxima만 존재한다. 왜냐하면 $m \neq 0$ 의 경우 $\sin \theta > 1$ 이므로 모순이다. 예로서 결정의 원자구조를 조사하는 경우 전자 진동자(Electron-Oscillator)들은 원자 거리만큼

떨어져 있고, 여기에 입사하는 X -선의 파장($\text{Cu}_{K\alpha}$: $1.5 \text{ \AA}$)은 원자거리 정도이기 때문에 원자의 회절 Peak들은 대부분 zero-order principal maxima이다. 이때 회절 세기는

$$I = N^2 I_o \quad (36.55)$$

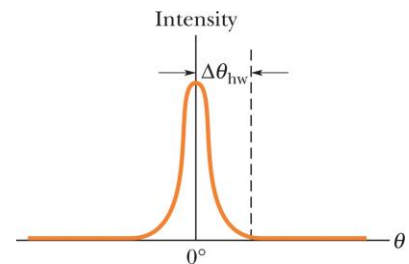


회절선의 너비

회절선의 반너비각 $\Delta\theta_{hw}$ (참조: 우측 그림): 중심으로부터 중심 회절선이 끝나는 동시에 1차 극소가 시작되는 곳까지의 각도.

다음 그림에서 꼭대기 빛살과 바닥의 빛살의 경로 차가 λ 일 때 (36.1)처럼 1차 극소가 일어난다. N 개의 발을 가진 회절

발에서 인접하는 발과의 거리가 d 일 때, 꼭대기와 바닥 발 사이의 빛살에 대한 경로 차는



$$\Lambda = Nd \sin \Delta\theta_{hw}$$

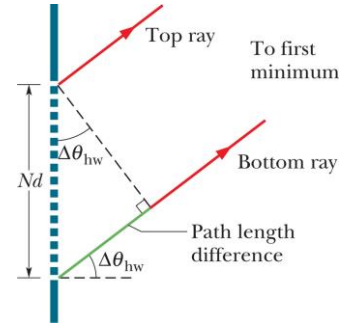
$$1차\ 극소: Nd \sin \Delta\theta_{hw} = \lambda \quad (36.56)$$

여기서 $\Delta\theta_{hw} \ll 1$ 이므로 $\sin \Delta\theta_{hw} \approx \Delta\theta_{hw}$.

결과적으로 (36.56)은 다음으로 계산된다.

$$중앙\ 무늬의\ 반너비각: \Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd} \quad (36.57)$$

$$일반\ 각\ \theta\ 에서\ 의\ 반너비각: \Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (36.58)$$



분산과 분해능

분산(Dispersion): 비슷한 파장들을 구별하는 데 회절발은 회절선들을 분리하여야 하며 분산을 다음과 같이 정의한다.

$$분산의\ 정의: D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \quad (36.59)$$

여기서 $\Delta\theta$ 는 파장이 $\Delta\lambda$ 만큼 다른 두 빛의 회절선의 분리 각이다. D 가 크면 클수록 파장이 $\Delta\lambda$ 만큼 다른 두 방출선 사이의 분리 거리가 커진다.

(36.54)에서 양변을 미분하면

$$d \sin \theta = m\lambda \rightarrow d \cos \theta d\theta = m d\lambda \quad (36.60)$$

(36.60)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (36.61)$$

$$각도\ \theta\ 에서\ 회절발의\ 분산: D = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (36.62)$$

분해능(Resolution)

파장이 비슷한 회절선을 분해해 내려면 회절선이 가능한 한 가늘어야 한다. 달리 표현하면 회절발이 큰 분해능 R 을 가져야 하며, 다음과 같이 정의 한다.

$$분해능: R = \frac{\lambda_{ave}}{\Delta\lambda} \quad (36.63)$$

λ_{ave} : 겨우 분해할 수 있는 두 방출선의 평균값

$\Delta\lambda$: 두 방출선의 파장 차.

R 이 크면 클수록 두 방출선이 더 가깝더라도 분해가 가능.

$$(36.58)식: \Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

$$(36.61)식: \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

만약 $\Delta\theta$ 가 두 선을 분리할 수 있는 최소 분리각이라면, 이것은 $\Delta\theta_{hw}$ 이어야 한다. 즉

$$\Delta\theta_{hw} = \Delta\theta: \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} = \frac{m\Delta\lambda}{d \cos \theta} \rightarrow \frac{\lambda}{N} = m\Delta\lambda$$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm \quad (36.64)$$

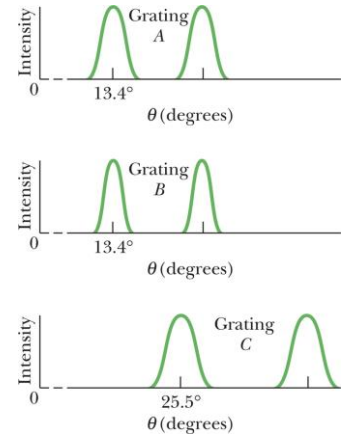
분산과 분해능의 비교

분해능을 분산과 혼동하지 말아야 한다. 아래 표는 세 가지 Grating에 $\lambda = 589\text{nm}$ 인 빛을 쏘고 $d \sin \theta = m\lambda$ 에서 $m=1$ 의 1차 회절 한 빛을 관찰한다. 표의 D 와 R 값은 (36.61)과 (36.64)로 계산한 것이다.

Grating	N	$d(\text{nm})$	θ	$D(^{\circ}/\mu\text{m})$	R
A	10,000	2,540	13.4°	23.2	10,000
B	20,000	2,540	13.4°	23.2	20,000
C	10,000	1,360	25.5°	46.3	10,000

※ $\lambda = 589\text{nm}$, $m=1$ 에 대한 결과.

우측 그림은 $\lambda = 589\text{nm}$ 근처의 두 파장 λ_1 과 λ_2 가 Grating에 의해 회절 되는 세기를 나타낸 것이다. Grating B는 더 큰 분해능으로 좁은 회절을 만들고 그림에 나타낸 것보다 더 파장이 비슷한 선들도 구분할 수 있다. Grating C는 더 큰 분산으로 선들 사이의 분리를 더욱 크게 한다.



보기문제 36.5 너비 $w = 25.4\text{mm}$ 에 1.26×10^4 개의 Gratings에 나트륨 증기 램프에서 나오는 노란 빛을 수직으로 비춘다. 노란 빛은 각각의 파장이 589.00nm 와 589.59nm 인 아주 비슷한 방출선(나트륨 이중선)으로 되어 있다.

- (a) 어떤 각도에서 파장 589nm 의 빛이 (중앙 극대의 양편에) 1차 극대를 가지는가?
- (b) 회절 Grating의 분산에 관한 식을 이용하여 1차 회절선 사이의 분리 각을 계산하여라.
- (c) 1차에서 나트륨 이중선을 구별하기 위한 Grating의 최소 개수는 얼마인가?

(풀이) (a) $d = \frac{w}{N} = \frac{25.4 \times 10^{-3}\text{m}}{1.26 \times 10^4} = 2016\text{nm}$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1} \frac{(1)(589.00\text{nm})}{2016\text{nm}} = 16.99^{\circ}$$

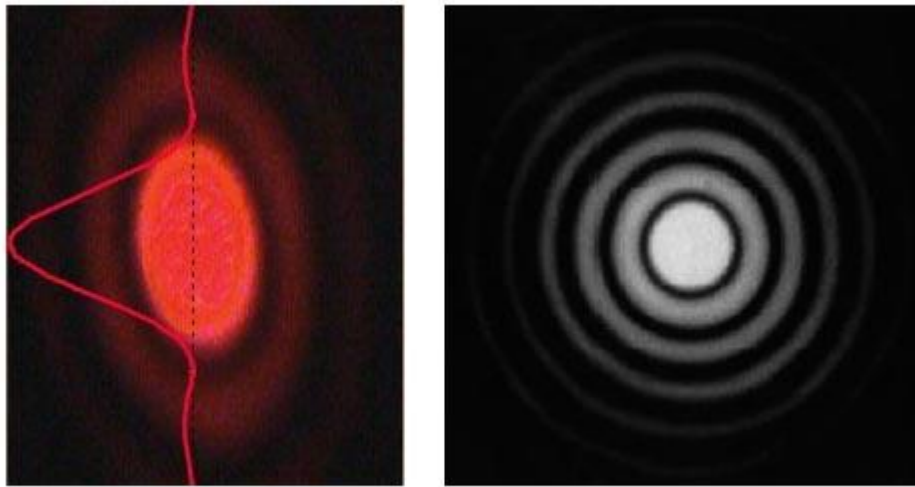
$$(b) D = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{1}{(2016\text{nm})(\cos 16.99^{\circ})} = 5.187 \times 10^{-4} \text{rad/nm}$$

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = (5.187 \times 10^{-4} \text{rad/nm})(589.59\text{nm} - 589.00\text{nm}) = 3.06 \times 10^{-4} \text{rad}$$

$$(c) N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{m\Delta\lambda} = \frac{589.30\text{nm}}{(1)(0.59\text{nm})} = 999$$

36.7 원형구멍이 만드는 회절

다음 그림은 circular aperture로부터 만들어진 회절의 모양을 보여준다.



Fringe Patterns from a Circular Aperture

지름 d 의 원형 구멍이 만드는 회절 무늬에서

$$\text{첫 번째 극소가 일어나는 각도: } \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (36.65)$$

θ 는 중심축으로부터 원형 극소점까지의 사이 각이다.

이것은 너비 a 인 단일 슬릿이 만드는 회절 무늬의 첫 번째 극소에 관한 식 (36.1)

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a} \quad (36.66)$$

과 비교해 보면, 슬릿의 모양이 다르기 때문에 상수 1.22 가 붙은 것만 다르고 나머지는 서로 같다.

원형 aperture의 분해능

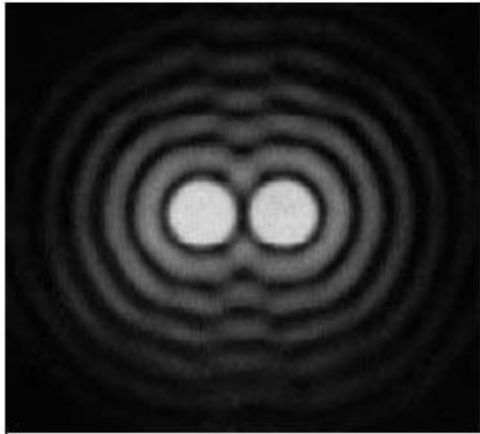
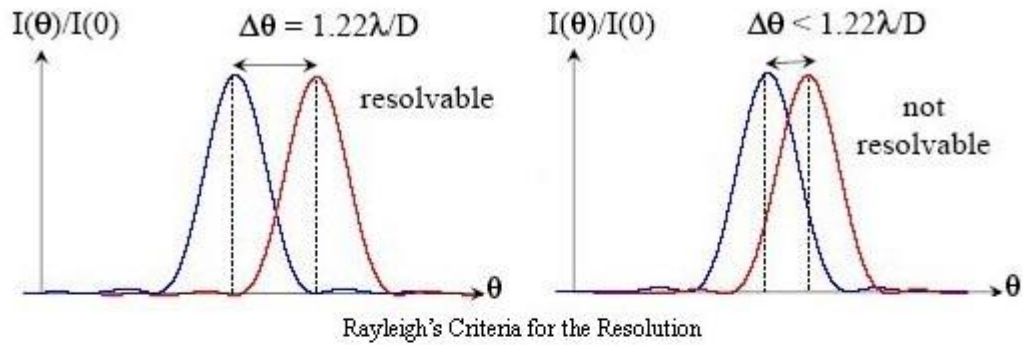
Rayleigh의 기준: 한 빛샘의 회절무늬의 중심극대가 다른 빛샘의 회절무늬의 첫 번째 극소와 일치할 때 이것을 Rayleigh의 기준이라 한다.

식 (36.65)로부터

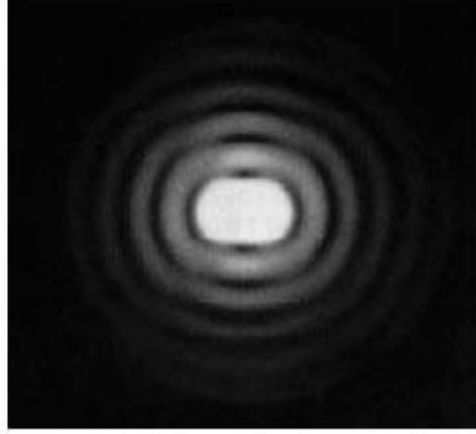
$$\sin \theta_R = \frac{1.22 \lambda}{d}$$

$$\theta_R \ll 1 \text{ 이므로, } \theta_R = \frac{1.22 \lambda}{d} \quad (36.67)$$

물체 사이의 분리 각 θ 가 θ_R 보다 크면 물체를 분해할 수 있고 이보다 작으면 불가능하다.

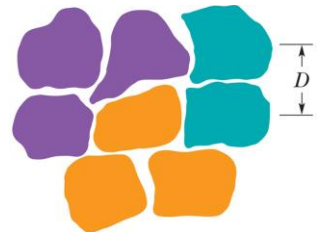


Two stars well separated

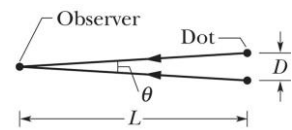


Two stars at Rayleigh limit

보기문제 36.6 우측 그림은 점묘화의 색점들을 나타낸 것이다. 점들의 중심간 평균 거리를 $D = 2.0\text{mm}$ 라고 하자. 그리고 눈동자의 지름을 $d = 1.5\text{mm}$, 점들 사이를 구분할 수 있는 최소 분리가 Rayleigh의 기준이라고 하자. 그림의 점들을 구별할 수 없게 하는 최소 관찰거리는 무엇인가? 그림에서 보라색은 $\lambda = 400\text{nm}$ 이다.



(풀이) 그림에서 멀어져 갈 때, 시야의 분리 각이 Rayleigh의 기준 각도 일 때까지 그 점들을 구별할 수 있다. 즉 우측그림의 θ 가 θ_R 이 될 때까지 구별이 가능하다.



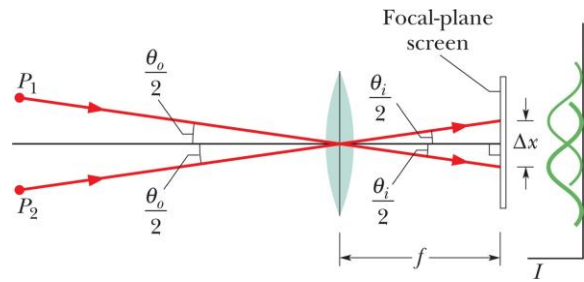
$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}, \quad \theta = \frac{D}{L}$$

$$\theta = \theta_R: \quad \frac{D}{L} = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad \rightarrow \quad L = \frac{Dd}{1.22\lambda}$$

$$L = \frac{(2.0 \times 10^{-3}\text{m})(1.5 \times 10^{-3}\text{m})}{1.22(400 \times 10^{-9}\text{m})} = 6.1\text{m}$$

보기문제 36.7 지름 $d = 32\text{mm}$ 이고 초점거리 $f = 24\text{cm}$ 인 집광렌즈를 사용하여 물체의 영상을 얻고자 한다. 이때 사용하는 빛의 파장은 $\lambda = 550\text{nm}$ 이다. (a) 렌즈의 회절을 고려할 때 멀리 있는 두 물체에 대해 Rayleigh의 기준을 만족시키는 분리각은 얼마인가? (b) 렌즈의 회절을 고려할 때 멀리 있는 두 물체에 대해 Rayleigh의 기준을 만족시키는 분리각은 얼마인가?

(풀이) (a) 우측 그림에서 두 물체 P_1 , P_2 의 분리각 θ_o 가 상의 분리각 θ_i 와 동일하다는 것을 주목하여, 분해능에 대한 Rayleigh의 기준을 만족시키면



$$\theta_o = \theta_i = \theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

$$\theta_o = \frac{(1.22)(550 \times 10^{-9} \text{ m})}{32 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.1 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

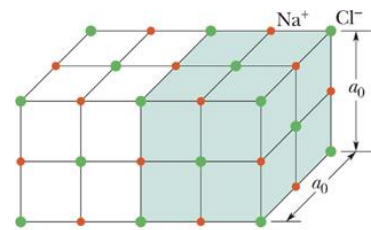
(b) 그림처럼 렌즈와 screen 사이의 삼각형으로부터

$$\tan \frac{\theta_i}{2} \approx \frac{\theta_i}{2} = \frac{\Delta x}{2f} \rightarrow \Delta x = f \theta_i$$

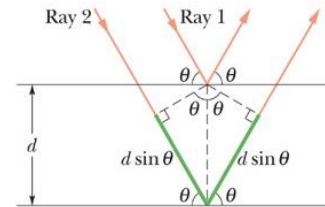
$$\Delta x = (0.24 \text{ m})(2.1 \times 10^{-5} \text{ rad}) = 5.0 \mu\text{m}$$

36.8 겹층 회절

결정에 X-ray (파장이 1 Å 정도)를 쏘이면 겉면과 내층에 있는 원자들에 의해 반사된 빛이 회절을 일으킨다. 예를 들면 소금(NaCl) 결정에 X-ray를 조사하면 결정에 있는 원자들의 간격(그림에서 a_o)를 찾을 수 있다. 극대는 마치 X-ray가 결정원자가 이루는 반사평면(결정면)에서 반사하는 것처럼 정해진 방향에서 나타난다.



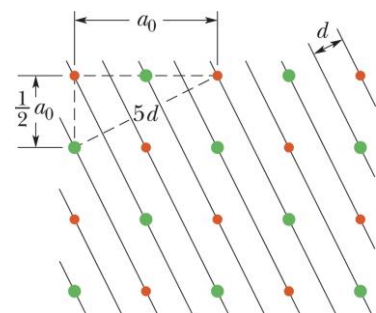
우측 그림은 이것을 형상화한 것으로 경로 차에 의한 X-ray 회절의 극대 조건은 Bragg 법칙을 따른다.



$$\text{Bragg 법칙: } 2d \sin \theta = m\lambda \quad (36.68)$$

여기서 m 은 극대의 차수이고, NaCl 결정의 경우 d 는 Na와 Cl 원자 사이의 간격이다.

우측 그림은 회절을 측정했을 때 면 간격 d 로 어떻게 a_o 를 찾는지 그 방법을 보여준다. 즉 피타고라스 정리에 의해



$$5d = \sqrt{5a_o^2 / 4}$$

$$d = \frac{a_o}{\sqrt{20}} = 0.2236 a_o \quad (36.69)$$

회절이 만드는 구조적 색깔변이

두 면 사이의 거리가 d 로 일정한 물질에 가시광선을 비치면

가시광선은 겉면과 동시에 일정한 깊이까지 투과한 후 반사하며, 따라서 (36.68)을 만족하는 파장 λ 에 해당하는 빛이 보강간섭을 일으킨다. 고무처럼 줄거나 늘어나는 물질이면 d 는 d' 으로 변하고 여기에 해당하는 λ' 이 보강간섭을 일으켜 관찰자로 하여금 처음과 다른 색깔의 빛을 보게 한다.