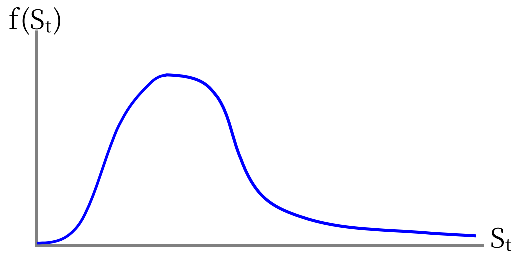


로그정규분포의 밀도함수

(2) 블랙-숄즈 모형 도출과정의 개념적 이해

ⅰ. 블랙-숄즈 미분방정식 : 주가가 이토 프로세스에 따른다는 가정 하에서 주식과 옵션으로 구성된 다음의 무위험 포트폴리오 V를 구성하여 옵션가격 결정모형을 도출함.

$$V = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S$$

이상의 조건에 따라 옵션의 가격을 결정하는 모형을 도출하기 위해서는 다음의 블랙-숄즈 미분방정식을 풀어야 함.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

이 미분방정식의 해(solution)는 다음과 같은데, 이 해가 유럽형 콜옵션의 이론가격을 평가하는 공식임.

$$C = S\,N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma t^{0.5}} \qquad d_2 = \frac{\ln(S/X) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma t^{0.5}}$$

S : 기초자산의 현재가격 X : 옵션 행사가격
σ : 기초자산 가격 변화율의 표준편차
t : 옵션 만기일까지의 기간(연단위) r : 무위험 이자율
$N(d_i)$: 표준정규분포에 따르는 확률변수의 누적분포함수(i=1, 2)

ⅱ. 풋옵션의 가격 : 풋-콜 패러티에 의해 풋옵션의 가격 P는

$$\begin{aligned} P &= C - S + Xe^{-rt} \\ &= [S\,N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2)] - S + Xe^{-rt} \\ &= -S[1 - N(d_1)] + Xe^{-rt}[1 - N(d_2)] \\ &= Xe^{-rt} N(-d_2) - S\,N(-d_1) \end{aligned}$$

예 : 현재 주가 42$, 행사가격 40$, 무위험이자율 연 10%, 주가변동의 표준편차 20%, 만기까지 남은 기간 6개월인 경우에 BSOPM을 이용하여 유럽형 옵션의 이론가격을 구해보자. S=42, X=40, r=0.1, σ=0.2, t=0.5이므로

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + [0.1 + 0.5\times(0.2)^2]\times 0.5}{0.2\times(0.5)^{0.5}} = 0.7693$$

$$d_2=\frac{\ln(42/40)+[0.1-0.5\times(0.2)^2]\times0.5}{0.2\times(0.5)^{0.5}}=0.6278$$

그리고

$N(0.7693)=0.7791$　　　$N(0.6278)=0.7349$

$N(-0.7693)=0.2209$　　　$N(-0.6278)=0.2651$

따라서 유럽형 콜옵션과 풋옵션의 이론가격은 각각

$C=42\times0.7791-40\times e^{-0.1\times0.5}\times0.7349=4.76$

$P=4.76-42+40\times e^{-0.1\times0.5}=0.81$

여기에서 콜옵션 가격 4.76$는 내재가치 2$와 시간가치 2.76$로 구성되어 있고 풋옵션 가격 0.81$는 모두 시간가치이다.

(3) 블랙-숄즈 모형과 관련된 논의

ⅰ. BSOPM의 델타(delta) : BSOPM에서는 콜옵션 1계약을 매도하고 주식 $\partial C/\partial S$만큼 매입하여 무위험 포트폴리오를 구성하였음. 여기에서 $\partial C/\partial S$는 콜옵션의 델타에 해당하고, BSOPM에서 이 값은 $N(d_1)$이며 풋옵션의 델타는 $-N(d_1)=N(d_1)-1$임.

ⅱ. BSOPM의 위험중립적 가치평가 : BSOPM의 미분방정식은 기대수익률 μ가 포함되지 않는데, 이는 투자자가 위험선호도에 관계없이 옵션가치를 결정한다는 것을 의미함. 즉, 모든 증권의 수익률은 무위험 수익률로 간주하고 위험중립적 가치평가를 한다는 것임.

ⅲ. J. C. Cox와 S. A. Ross의 옵션가격 공식 유도방법 : Cox와 Ross는 비교적 쉬운 방법으로 BSOPM과 동일한 모형을 다음과 같이 유도할 수 있음을 보여주었음. 먼저 만기시점 T에서 유럽형 콜옵션의 기대가치는

$$E(C_T)=p\times[E(S_T \mid S_T>X)-X]$$

p : 만기시에 콜옵션이 내가격($S_T>X$)이 될 확률

위험중립적 가치평가 가정에 의해 현재의 유럽형 콜옵션 가격 C는

$$C=p\times[E(S_T \mid S_T>X)-X]e^{-rt}$$

BSOPM에서는 주가가 이토 프로세스에 따른다는 가정에 의해 만기의 주가는 로그정규분포에 따르므로

$$p=\Pr(S_T>X)=N(d_2)$$

$$E(S_T \mid S_T>X)=Se^{rt}\frac{N(d_1)}{N(d_2)}$$

이들 값을 위 식에 대입하여 정리하면 다음과 같이 BSOPM과 동일한 결과가 도출됨.

$$C=N(d_2)\times\left[S\,e^{rt}\frac{N(d_1)}{N(d_2)}-X\right]\times e^{-rt}$$

$$=S\,N(d_1)-X\,e^{rt}N(d_2)$$

ⅳ. BSOPM의 확장

① 배당이 있는 경우 : 옵션기간 동안에 지불될 배당이 예측가능하다면 블랙-숄즈 모형

은 배당을 지급하는 주식에 대한 유럽형 옵션의 가치를 평가할 수 있도록 확장될 수 있음. 이를 위해서는 현재의 주가 S 대신에 옵션기간 동안 기대되는 배당금의 현재가치에 의해 감소된 주가를 대입하면 됨. 이러한 논리는 통화옵션 등과 같이 현금흐름을 갖는 다른 기초자산에 대한 옵션에도 그대로 적용될 수 있음.

② 기초자산 가격이 로그정규분포에 따르지 않는 경우 : 예를 들어 기초자산 가격이 점프(jump)하는 경우에 수익률이 정규분포보다 다소 두꺼운 꼬리를 갖는 분포에 따르게 됨. 이런 문제를 해결하기 위해 실무적으로는 내가격이나 외가격 옵션을 평가하는 경우에는 변동성 크기를 다소 크게 하여 공식에 대입하는 방법을 사용하기도 함.

예 : 여타 상황은 앞의 예와 같으나 옵션 만기일 전인 3개월 후를 배당기준일로 하여 주당 0.5$의 배당금 지급이 예상되는 주식옵션이 있다. 우선 무위험 이자율 r=0.1로 할인된 배당금의 현재가치는

$$0.5 \times \frac{1}{1+0.1 \times \frac{3}{12}} = 0.4878$$

따라서 S=42$ 대신에 41.5122$를 대입하면, 콜옵션과 풋옵션의 가격은 각각 C=4.38$와 P=0.92$이다. 결과적으로 이 경우는 무배당의 경우에 비해 콜옵션 이론가격은 0.38$ 낮아졌고 풋옵션 이론가격은 0.11$ 높아졌음을 알 수 있다.

10.3 변동성

(1) 변동성과 옵션가격

ⅰ. 변동성과 옵션가격 : BSOPM에서 옵션가격은 기초자산 가격, 행사가격, 무위험 이자율, 잔존기간, 기초자산 수익률의 변동성에 의해 결정됨. 이들 변수 중에서 현재 시점에서 유일하게 관찰이 불가능한 것이 기초자산 수익률의 변동성인데, 이는 미래변동성이기 때문이며 이를 정확히 측정한다는 것은 거의 불가능함. 그럼에도 불구하고 옵션의 이론가격을 측정하는 데 정확한 변동성의 값을 추정하여 적용하는 것이 매우 중요함.

ⅱ. 역사적 변동성(historical volatility) : 과거 자료를 통해 통계적 방법으로 추정하는 것을 의미함. 역사적 변동성을 구하기 위해 해결되어야 하는 문제는 다음과 같음.

① 변동성을 측정하는 통계치가 결정되어야 한다. 기초자산의 표준편차가 일반적으로 이 통계치로 사용되고 있다.

② 기초자산 가격변동을 관찰하는 시간의 간격(매일, 매주, 매월)이 결정되어야 한다. 이 경우 어떤 것을 선택하더라도 변동성은 크게 달라지지 않는다는 것이 통설이지만, 일일종가(daily closing price)가 변동성을 측정하는 자료로 흔히 사용된다.

③ 변동성을 계산하는 기간을 선택해야 한다. 자료의 양이 많아지면 정확도가 증가한다는 장점이 있지만 미래 예측의 적합성이 떨어진다는 점도 고려되어야 한다.

ⅲ. 역사적 변동성의 문제점 : 실제로 기초자산의 변동성은 안정적이지 못하고 기간별로 크

게 변한다는 문제가 있음. 이런 문제를 해결하기 위해 추정방법을 바꾸거나 자료를 달리 하여 변동성을 추정하기도 함.

(2) 내재변동성

ⅰ. 내재변동성(implied volatility)의 정의 : 시장에서 관찰가능한 옵션의 가격에 내재된 변동성. 즉 BSOPM에서 옵션의 이론가격 C 또는 P는 다섯 가지 요인 S, X, t, σ, r에 의해 결정되므로 옵션의 시장가격과 관찰가능한 값들이 주어진 상황에서 σ의 값을 계산할 수 있는데, 이를 내재변동성이라 함. 이러한 논리가 성립하기 위해서는 옵션의 시장가격이 균형가격이라는 것이 전제가 되어야 함.

ⅱ. 내재변동성의 문제점 : 동일한 기초자산에 대해 다양한 옵션종목이 존재하는데, 이 경우 각각의 옵션으로부터 계산된 내재변동성이 서로 다르게 나타나는 경우가 대부분임. 이러한 문제점을 해결하기 위해 여러 개의 변동성에 가중치를 부여하여 평균하는 방법이 사용되기도 함. 그리고 시장가격을 이용하여 내재변동성을 구하는 과정에서 자료상의 오류, 호가공백, 일시적 수급불균형 등의 다양한 문제점도 고려되어야 함.

11 옵션을 이용한 투기전략

11.1 기본적 투자의 손익구조

(1) 현물과 선물의 손익구조

ⅰ. 선물(현물)매입의 손익구조 : 선물(현물)매입자는 선물(현물)가격이 상승하면 이익을 획득하고 선물(현물)가격이 하락하면 손실을 입게 되므로, 선물(현물)매입의 손익구조는 우상향하는 45˚선으로 나타남. 즉 거래비용이 존재하지 않으며 금융비용을 고려하지 않는다면, 만기시 선물(현물)매입의 이익은

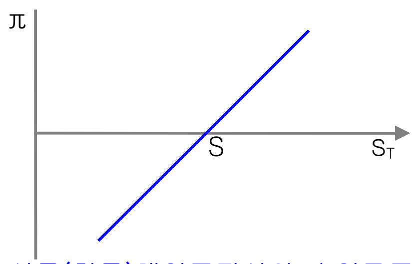
$\pi=N_S(S_T-S)$ (단, $N_S>0$)

π : 선물(현물)거래의 만기시 이익 N_S : 거래계약수

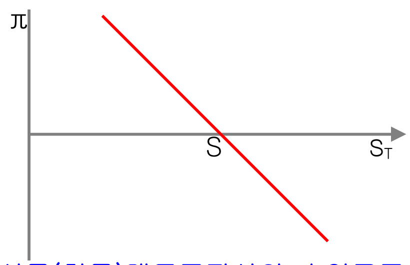
S : 선물(현물)의 거래가격 S_T : 만기시 선물(현물)가격

ⅱ. 선물(현물)매도의 손익구조 : 선물(현물)매도자는 선물(현물)가격이 하락하면 이익을 획득하고 선물(현물)가격이 상승하면 손실을 입게 되므로, 선물(현물)매도의 손익구조는 우하향하는 45˚선으로 나타남. 즉 거래비용이 존재하지 않는다면, 만기시 선물(현물)매도의 이익은

$\pi=N_S(S_T-S)$ (단, $N_S<0$)



선물(현물)매입포지션의 손익구조



선물(현물)매도포지션의 손익구조

(2) 옵션의 손익구조

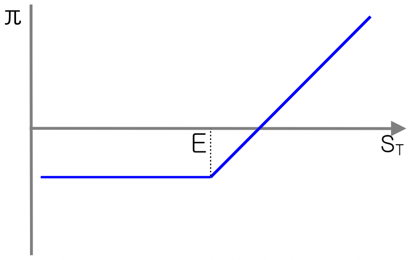
ⅰ. 콜옵션 : 행사가격 이상으로 기초자산의 가격이 상승하면 콜옵션 매입자는 권리를 행사할 것이며, 반대의 경우에는 콜옵션 매입자는 권리행사를 포기할 것임. 그리고 행사가격 이상으로 기초자산의 가격이 상승하면 콜옵션 매도자는 의무를 이행해야 할 것이며, 반대의 경우에는 콜옵션 매도자의 의무가 소멸되고 프리미엄이 매도자의 이익으로 확정됨. 그러므로 거래비용이 존재하지 않으며 금융비용을 고려하지 않는다면, 만기시 콜옵션의 손익구조는

$\pi=N_C[\mathrm{Max}(0,\ S_T-E)-C]$

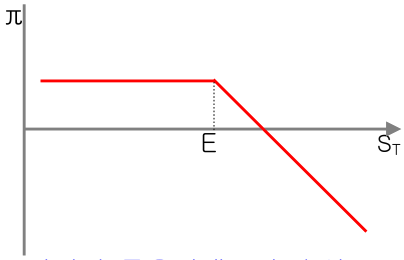
π : 만기시 이익 N_C : 거래계약수($N_C>0$: 매입, $N_C<0$: 매도)

E : 옵션의 행사가격 S_T : 만기시 기초자산 가격

C : 콜옵션의 프리미엄



만기시 콜옵션매입의 손익구조

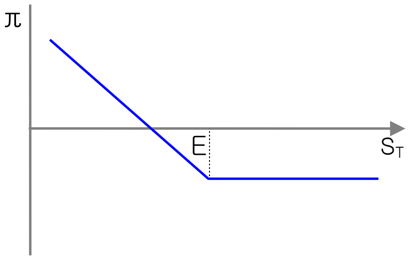


만기시 콜옵션매도의 손익구조

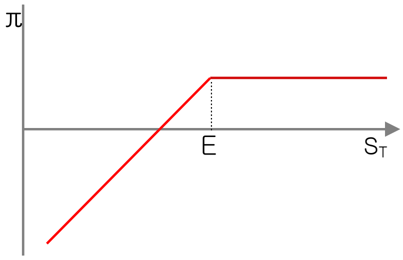
ⅱ. 풋옵션 : 행사가격 이하로 기초자산의 가격이 하락하면, 풋옵션 매입자는 권리를 할 것임. 반대의 경우에는 풋옵션 매입자는 권리행사를 포기할 것임. 그리고 행사가격 이하로 기초자산의 가격이 하락하면, 풋옵션 매도자는 의무를 이행해야 할 것임. 반대의 경우에는 풋옵션 매도자의 의무가 소멸되고 프리미엄이 매도자의 이익으로 확정됨. 그러므로 거래비용이 존재하지 않으며 일체의 금융비용을 고려하지 않는다면, 만기시 풋옵션의 손익구조는

$$\pi = N_P[Max(0,\ E - S_T) - P]$$

P : 풋옵션의 프리미엄 N_P : 거래계약수($N_P > 0$: 매입, $N_P < 0$: 매도)



만기시 풋옵션매입의 손익구조



만기시 풋옵션매도의 손익구조

11.2 합성선물과 합성옵션

(1) 합성선물 포지션

ⅰ. 합성선물(synthetic futures)의 정의와 합성목적 : 만기가 동일하고 행사가격이 다른 옵션을 합성하여 선물매입 또는 선물매도와 유사한 손익구조를 만들기 위함임.

ⅱ. 합성선물 매입포지션(synthetic long futures) : 선물매입 포지션과 유사한 손익구조

① 합성방법 : 풋매도(A)+콜매입(B)

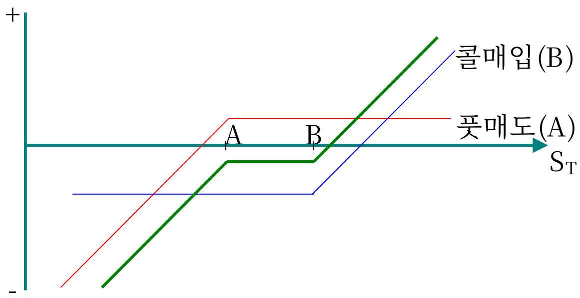
② 사용시기 : 기초자산의 가격하락이 예상될 때 사용

③ 만기시 손익구조 : 거래비용이 존재하지 않으며 금융비용을 고려하지 않는다면,

$$\pi = N_C[Max(0,\ S_T - A) - C] + N_P[Max(0,\ B - S_T) - P]$$

$N_C > 0,\ N_P < 0,\ N_C = -N_P$

A : 콜옵션의 행사가격 B : 풋옵션의 행사가격



iii. 합성선물 매도포지션(synthetic short futures) : 선물매도 포지션과 유사한 손익구조

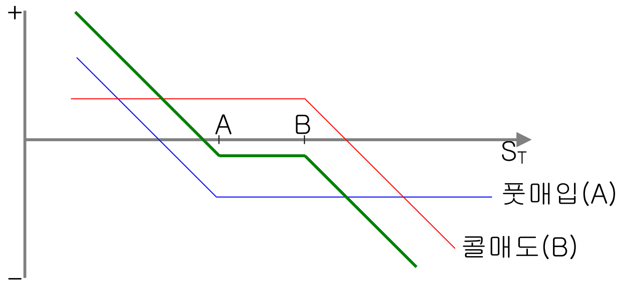
① 합성방법 : 풋매입(A)+콜매도(B)

② 사용시기 : 기초자산의 가격하락이 예상될 때 사용

③ 만기시 손익구조 : 거래비용이 존재하지 않으며 금융비용을 고려하지 않는다면,

$$\pi = N_P[Max(0,\ A - S_T) - P] + N_C[Max(0,\ S_T - B) - C]$$

$N_C < 0,\ N_P > 0,\ -N_C = N_P$



(2) 합성옵션(synthetic options) 포지션

ⅰ. 합성옵션(synthetic options)의 정의와 합성목적 : 만기가 동일한 선물과 옵션을 합성하여 별도의 옵션을 만들기 위하여 활용됨.

ⅱ. 합성 콜옵션 매입(synthetic long call)

① 합성방법 : 선물매입(S)+풋매입(E)

② 사용시기 : 강세시장이 예상될 때 사용

③ 만기시 손익구조 : 거래비용이 존재하지 않으며 금융비용을 고려하지 않는다면,

$$\pi = N_S(S_T - S) + N_P[Max(0,\ E - S_T) - P]$$

$N_S > 0,\ N_P > 0,\ N_S = N_P$