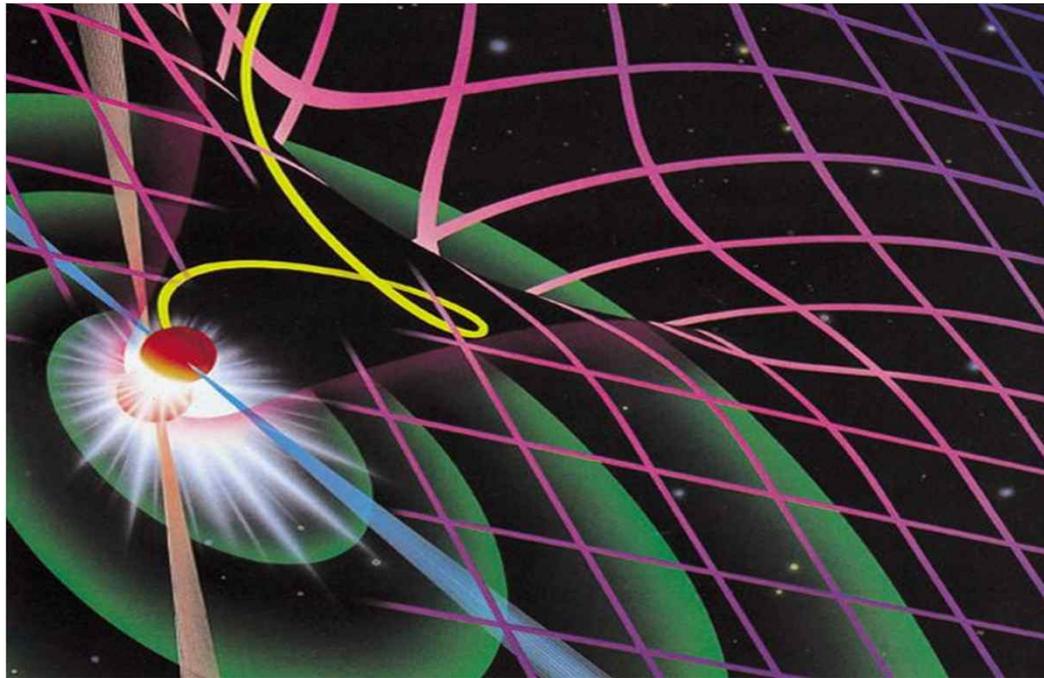


전기물성론

3학년 2학기



제1장 물성론 기초지식

1.1 전자의 특성

1.2 원자구조

1.3 분자의 성질

1.4 에너지와 분자운동

1.5 고체 구조

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

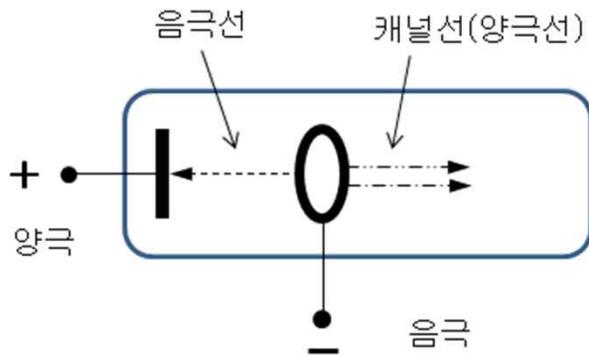


그림 1.12

방전관에서,

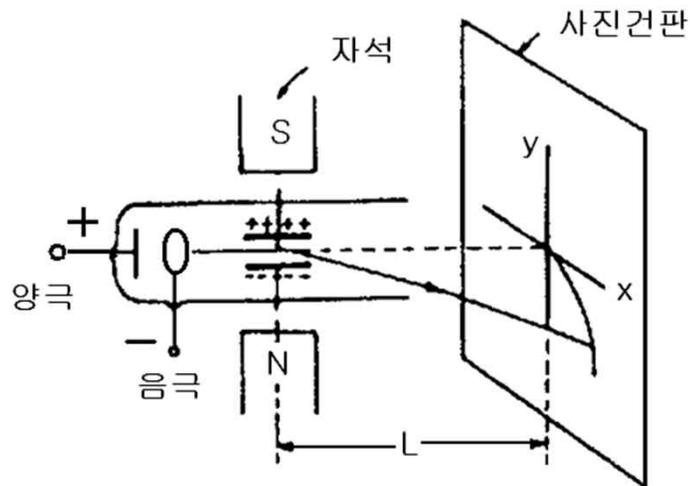
음극에서 음극선의 반대방향으로
방사선(캐널선)이 방출됨.

→ 캐널선이 정(+)으로 대전된 입자임을 확인(طوم슨)

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

통스에 의한 캐널선 입자의 질량측정



(1) 대전입자의 방사속도

캐널선이 정(+)으로 대전된 입자이므로 전계를 가하면 (-)측으로 끌려가면서 힘 eE 를 받게 된다. 이때, 입자의 속도 v 는 eE 에 비례하게 된다.

$$v \propto eE$$

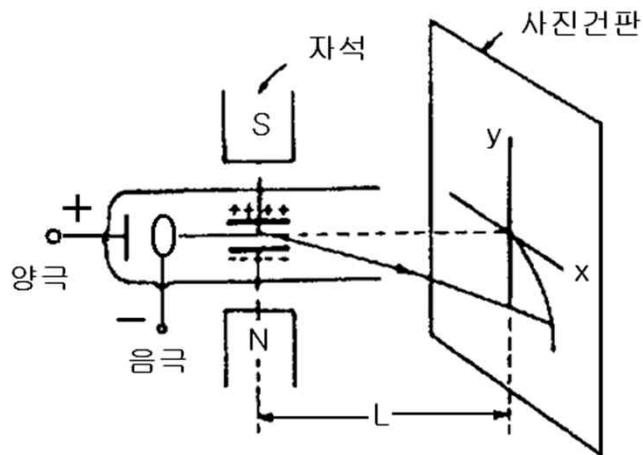
입자의 질량 m_p 가 클수록 속도가 늦어지므로 다음의 비례 식으로 된다.

$$v \propto \frac{eE}{m_p}$$

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

통스에 의한 캐널선 입자의 질량측정



(2) 대전입자의 하향속도 v_y

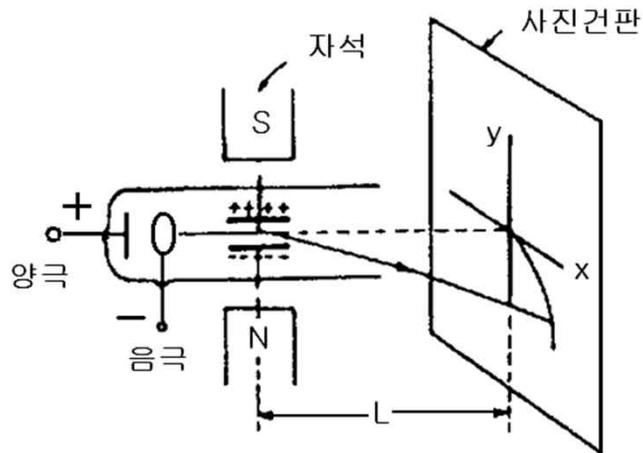
전극에서 튀어나온 입자의 하향속도는 v_y 는 평행판 전극을 통과하는 속도 v 가 빠를 수록 빨라지므로 v 에 반비례한다.

$$v_y \propto \frac{eE}{m_p v} \quad (1.36)$$

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

통스에 의한 캐널선 입자의 질량측정



(3) 양극선이 사진 건판에서 아래로 향하는 거리 y

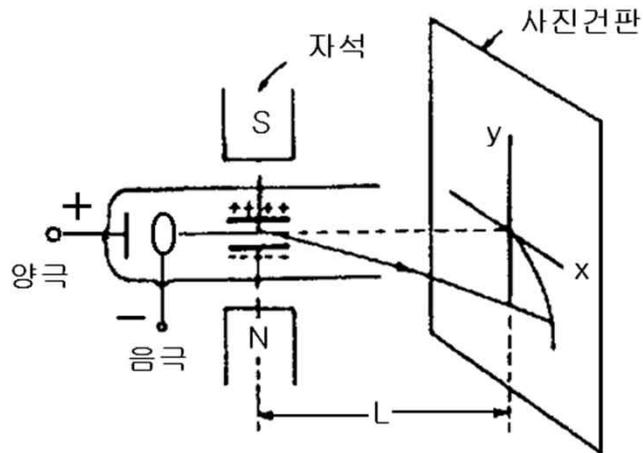
사진 건판상의 이동거리 y 는 v_y 에 비례하고
방사속도 $1/v$ 에 비례하므로

$$y \propto v_y \frac{1}{v} \propto \frac{eE}{m_p v} \frac{1}{v} \propto \frac{eE}{m_p v^2} \quad (1.37)$$

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

통스에 의한 캐널선 입자의 질량측정



(4) 입자의 앞 방향으로의 이동거리 x

자계 B를 가하면 양극선은 전자력을 받아 앞 방향으로 휘어진다.

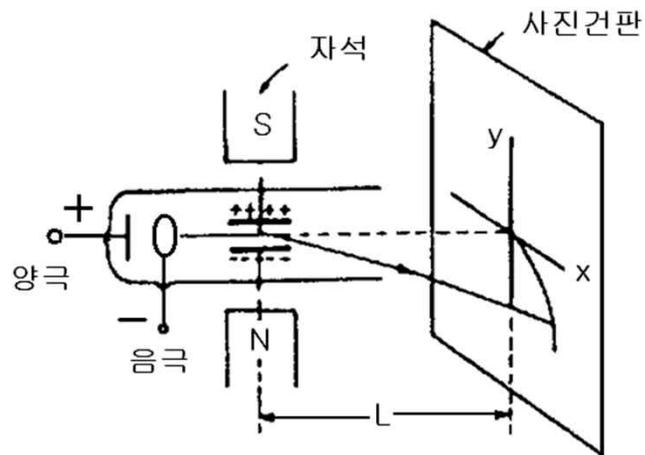
이때 전자력은 evB 가 되는데, 이 값은 eE 와 같은 값이 되므로

$$x = \frac{evB}{m_p v} = \frac{eE}{m_p v} \quad (1.38)$$

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

통슨에 의한 캐널선 입자의 질량측정



(5) x와 y의 관계

$$y \propto \frac{1}{v^2} \quad \text{이고} \quad x \propto \frac{1}{v} \quad \text{이므로}$$

$$y \propto x^2 \quad (1.39)$$

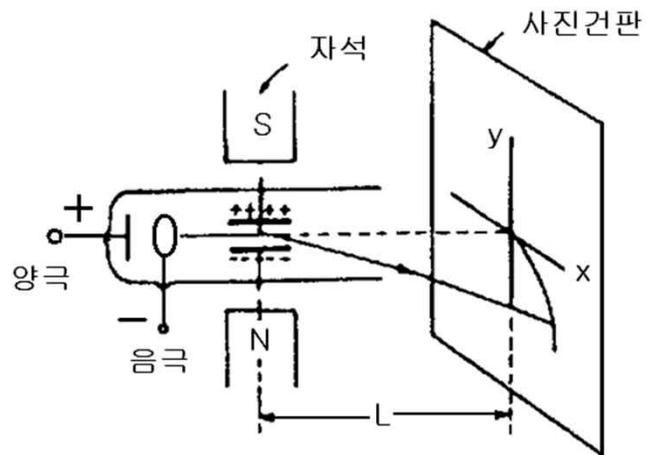
따라서 양극선의 궤적은 포물선이 된다.

그리고 양극선을 이루는 입자의 전하를 전자의 전하와 같다고 보면, 양극선 입자의 질량은 전자의 1840배가 되며, 이 입자를 양자(Proton)라 한다.

1.2 원자의 구조

1.2.1 양극선

통슨에 의한 캐널선 입자의 질량측정



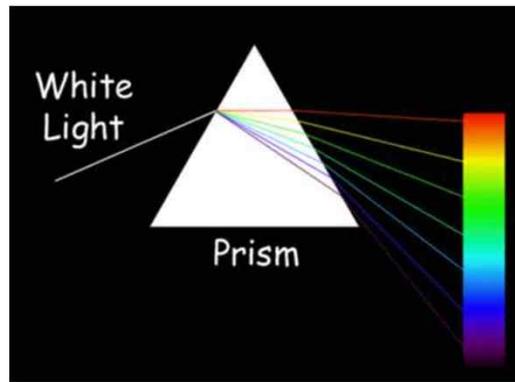
(6) 양극선의 생성

양극선은 기체의 방전에 의해 생성된다는 사실이 실험적으로 확인되었다.

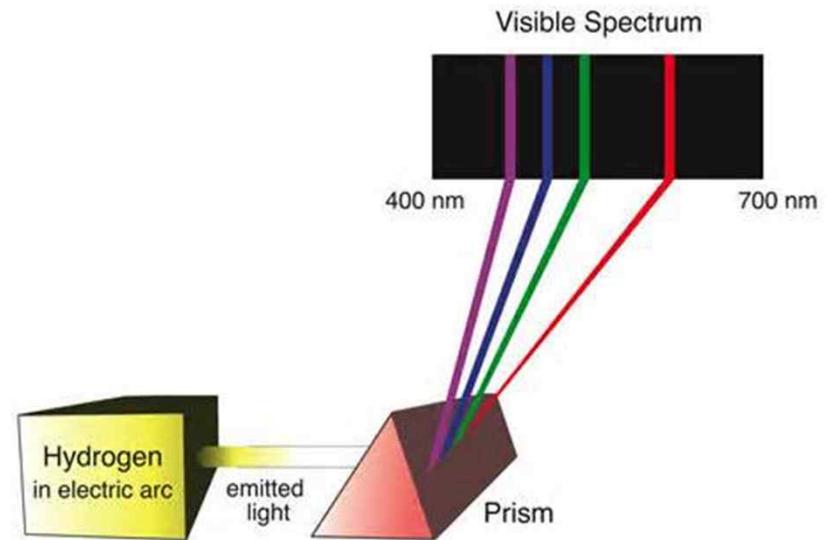
1.2 원자의 구조

1.2.2 수소원자 스펙트럼

연속 스펙트럼과 선스펙트럼



백색광(일광) 스펙트럼(연속스펙트럼)

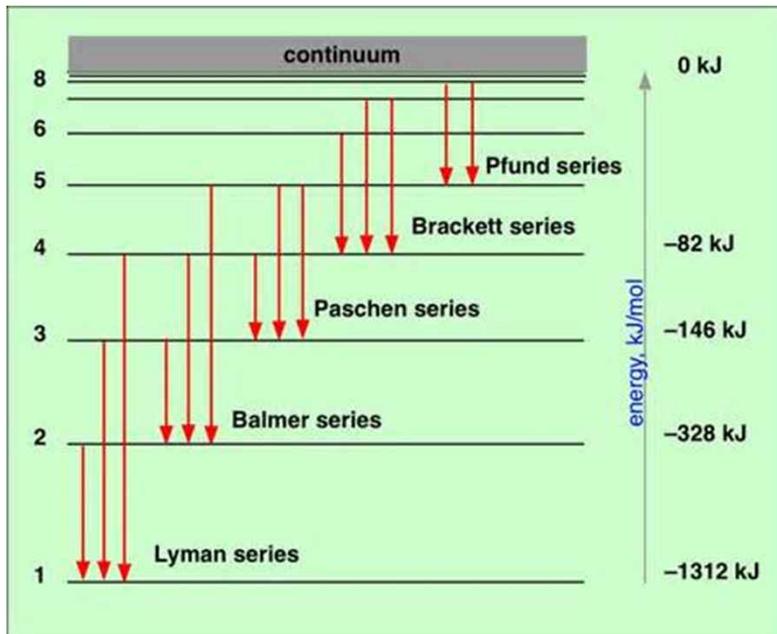


수소의 스펙트럼(선스펙트럼)

1.2 원자의 구조

1.2.2 수소원자 스펙트럼

수소원자 스펙트럼(선스펙트럼)

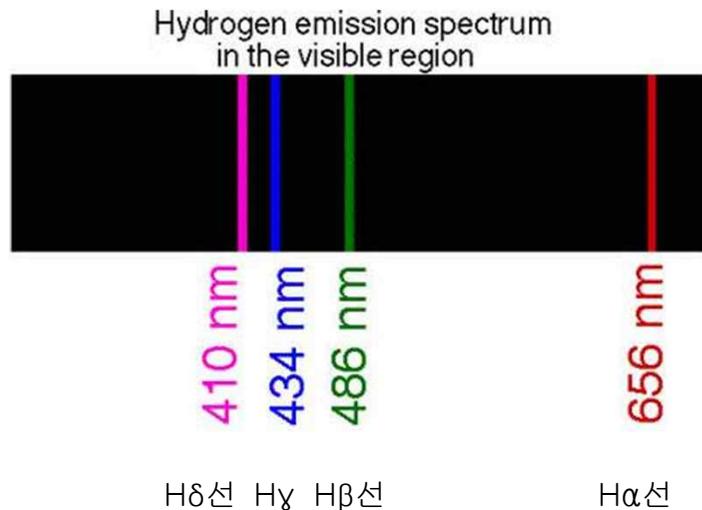


에너지준위가 높은 궤도에서 낮은 궤도로 전자가 전이하면서 방출하는 광자로 인해 생긴다.

1.2 원자의 구조

1.2.2 수소원자 스펙트럼

수소원자 스펙트럼 - 발머계열(Balmer series)



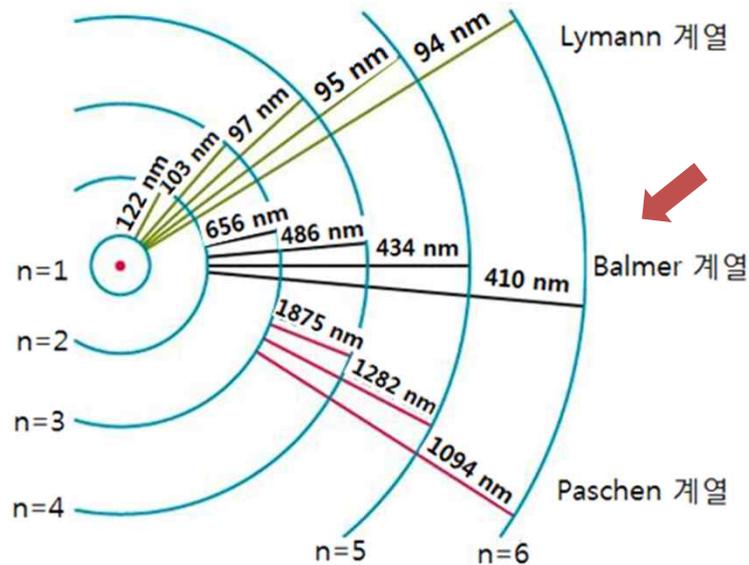
발머계열이란 수소원자의 선스펙트럼에서, 가시광의 영역에 나타나는 것으로 이하 4개의 선이 확인되고 다음과 같이 명명되었다.

H α 선 : 파장 656.3nm
H β 선 : 파장 486.1nm
H γ 선 : 파장 434.0nm
H δ 선 : 파장 410.2nm

1.2 원자의 구조

1.2.2 수소원자 스펙트럼

발머계열(Balmer series) 수소 스펙트럼의 **가시광선** 중에 존재하는 세부계열의 스펙트럼



파수 $\bar{f} = 1/\lambda$ 의 관계를 이용하여 수소원자의 스펙트럼을 파장 λ 대신 파수 \bar{f} 로 나타낸다.

$$\bar{f} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5 \dots \quad (1.40)$$

여기서, R은 리드버그상수(Rydberg constant)
 $= 1.0976 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

N=3일 때 : $\lambda=656.3 \text{ nm}$, $\bar{f} = 15,233$

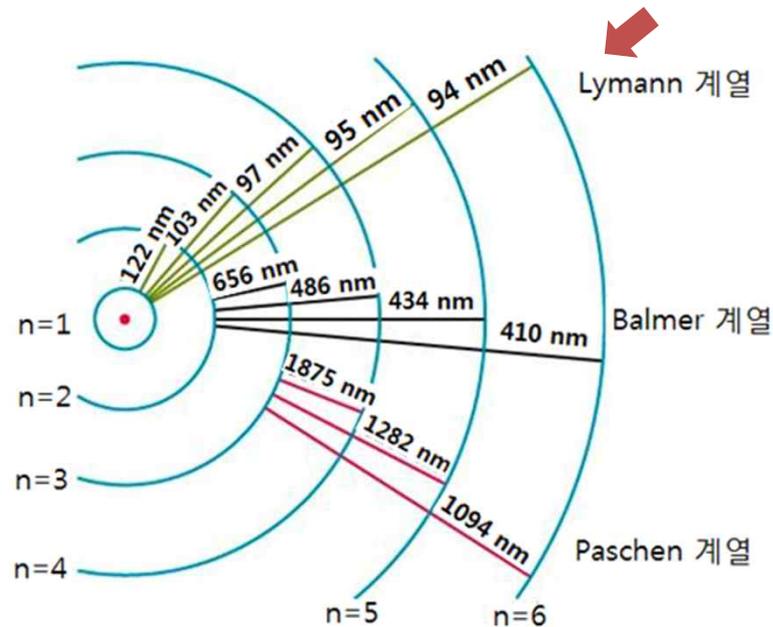
N=4일 때 : $\lambda=486.1 \text{ nm}$, $\bar{f} = 20,564$

N=5일 때 : $\lambda=434.0 \text{ nm}$, $\bar{f} = 23,932$

1.2 원자의 구조

1.2.2 수소원자 스펙트럼

라이만 계열(Lyman series) : 수소 스펙트럼의 자외선 중에 존재하는 세부계열의 스펙트럼



$$\bar{f} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4 \dots \quad (1.41)$$

여기서, R은 리드버그상수(Rydberg constant)
 $= 1.0976 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

N=2일 때 : $\lambda=122 \text{ nm}$, $f = 81.96$

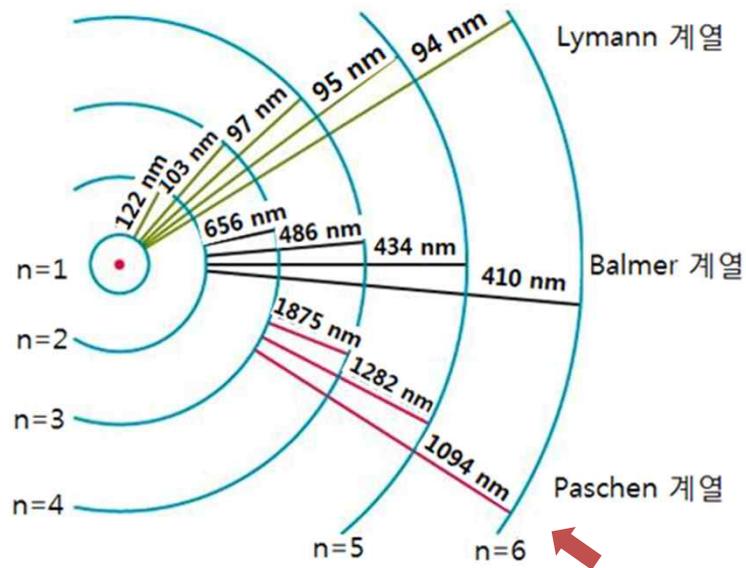
N=3일 때 : $\lambda=103 \text{ nm}$, $f = 97.08$

N=4일 때 : $\lambda=97 \text{ nm}$, $f = 103.09$

1.2 원자의 구조

1.2.2 수소원자 스펙트럼

파센 계열(Paschen series) : 수소 스펙트럼의 적외선 중에 존재하는 세부계열의 스펙트럼



$$\bar{f} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6 \dots \quad (1.42)$$

여기서, R은 리드버그상수(Rydberg constant)
= $1.0976 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

N=4일 때 : $\lambda=1875 \text{ nm}$, $f = 5.33$

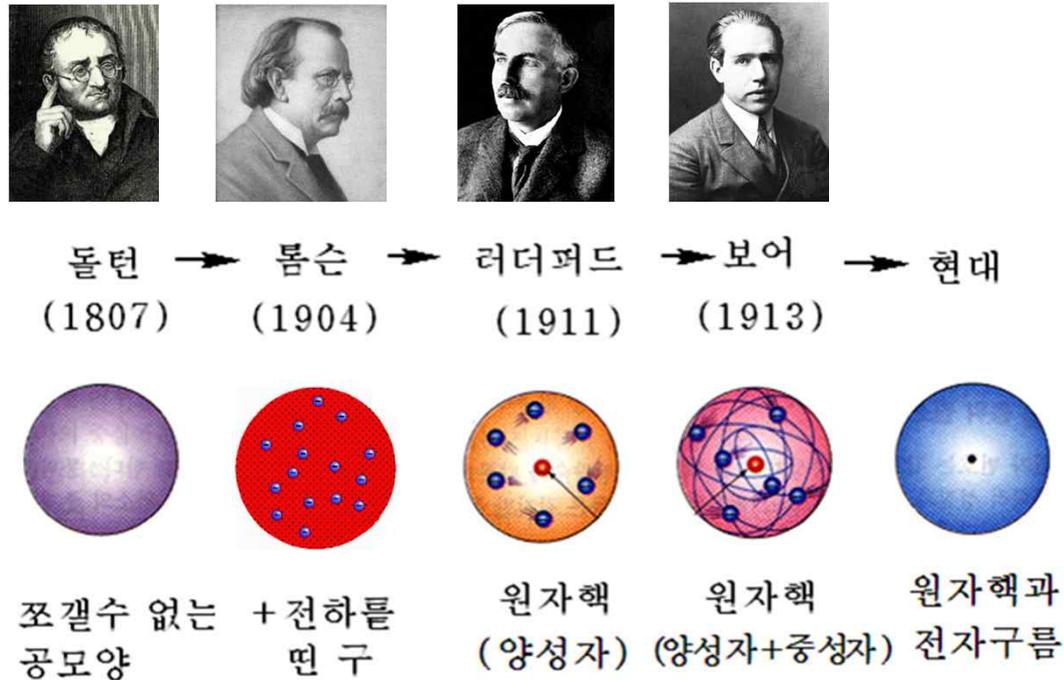
N=5일 때 : $\lambda=1282 \text{ nm}$, $f = 7.80$

N=6일 때 : $\lambda=1094 \text{ nm}$, $f = 9.14$

1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

원자모형의 변천



1.2 원자의 구조

1.2.3 러더포드 원자모형

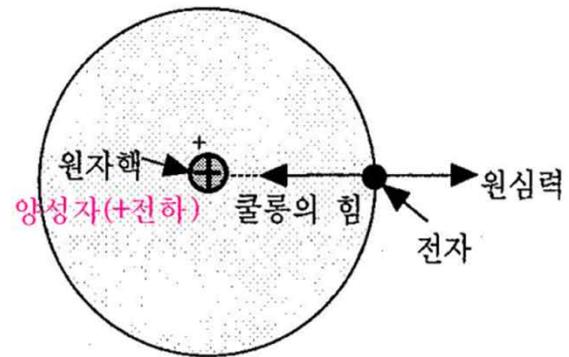
원자모형의 설명

- 돌턴 - 찢갈 수 없는 공 모양
- 톰슨 - 양전하로 대전된 공에 건포도 형태로 등성등성 박힌 전자가 운동
- 러더퍼드 - 원자핵(양성자) 발견, 태양계 모형으로 원자핵 주위를 전자가 회전.
- 보어 - 원자핵(양성자+중성자)주위를 일정한 에너지를 가진 전자가 회전
- 현대 - 전자발견확률에 따른 전자구름 모형

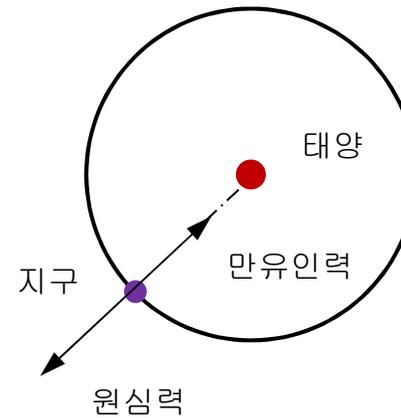
1.2 원자의 구조

1.2.3 러더포드 원자모형

러더퍼드(Rutherford)의 원자모형



러더퍼드 원자모형



태양계 운동

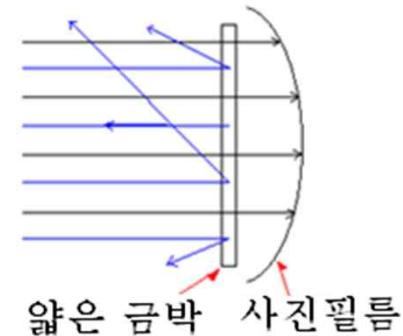
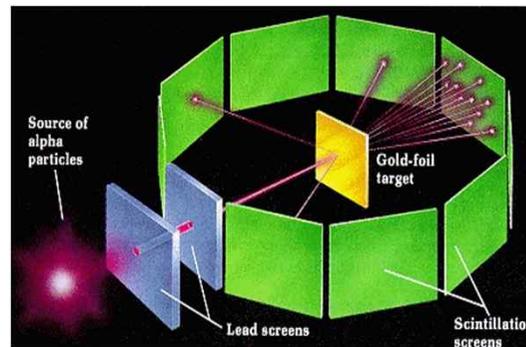
그림 1.17

1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

러더퍼드의 알파선 산란실험

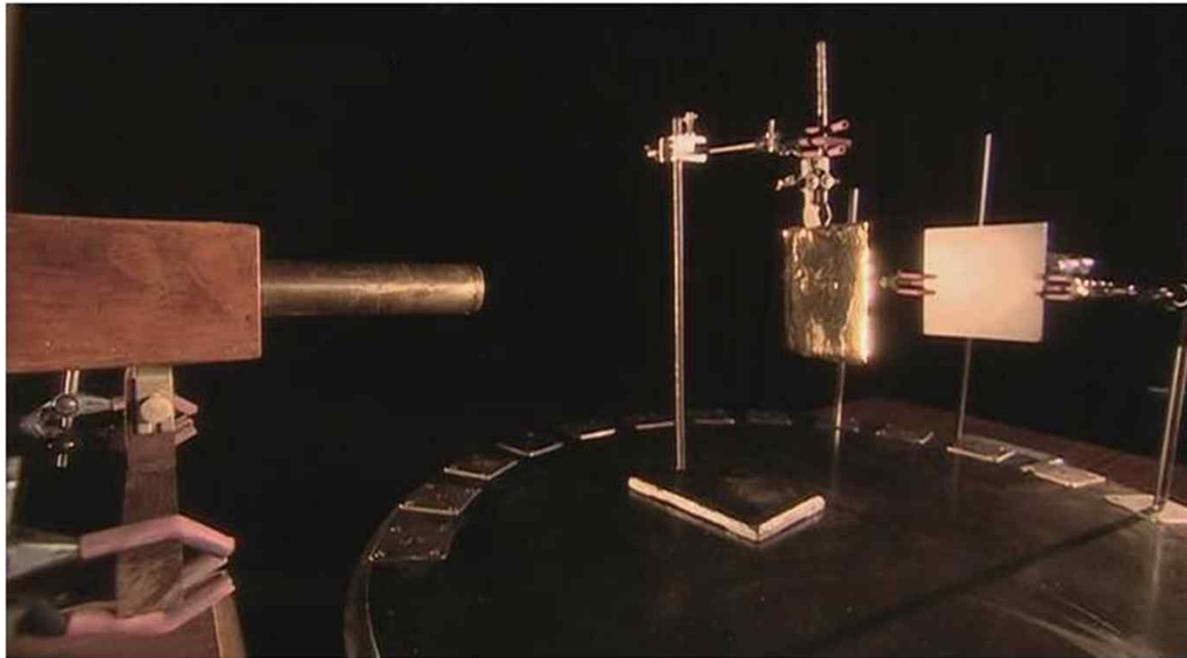
1910년, 방사성 원소인 라듐에서 나오는 알파선을 얇은 금박에 때리는 실험



- 결과 (1) 알파입자의 99.99% 이상이 그대로 통과하였다
→ 원자는 대부분 빈 공간이다
- (2) 알파입자의 0.01% 이하는 90도 이상 큰 각도로 꺾였다
→ 크기가 매우 작은 (+)전하가 한 곳에 집중되어있다

1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

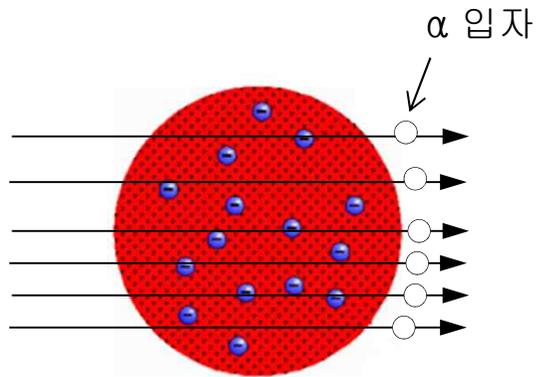


1910년 러더퍼드의 실험장치

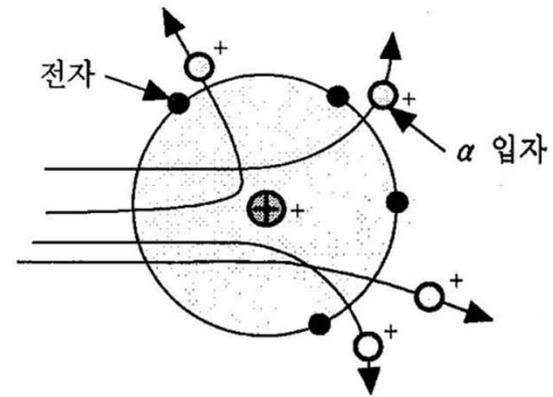
1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

러더퍼드 원자모형



중심에 핵이 없는 경우



중심에 핵이 있는 경우

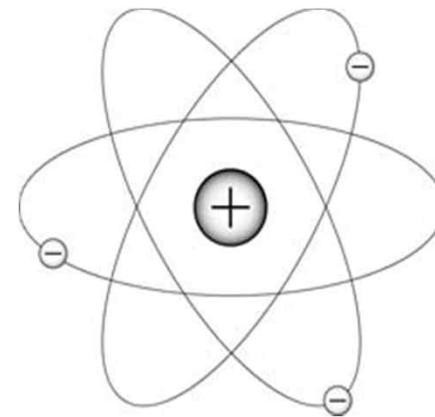
1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

러더퍼드 원자모형

실험 결론

1. 원자의 중심에 원자의 질량의 대부분을 차지하는 (+) 전하를 띤 원자핵이 있고 그 둘레를 (-) 전하를 띤 전자가 돌고 있는 모형으로 전자는 핵과 전기적으로 중성을 이룬다.
2. 원자핵의 정전하는 전자전하의 정수배이고 전자의 수는 원자번호와 같다.



러더퍼드 원자모형

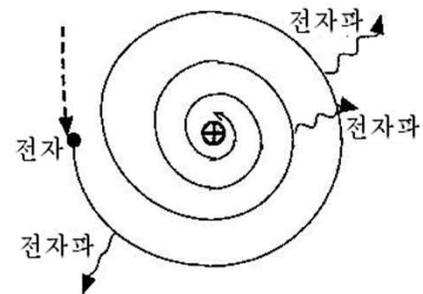
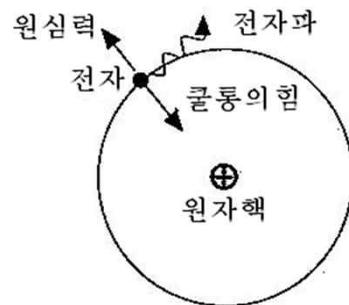
1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

러더퍼드 원자모형의 모순

(1) 전자는 원자핵 주위를 안정되게 돈다.

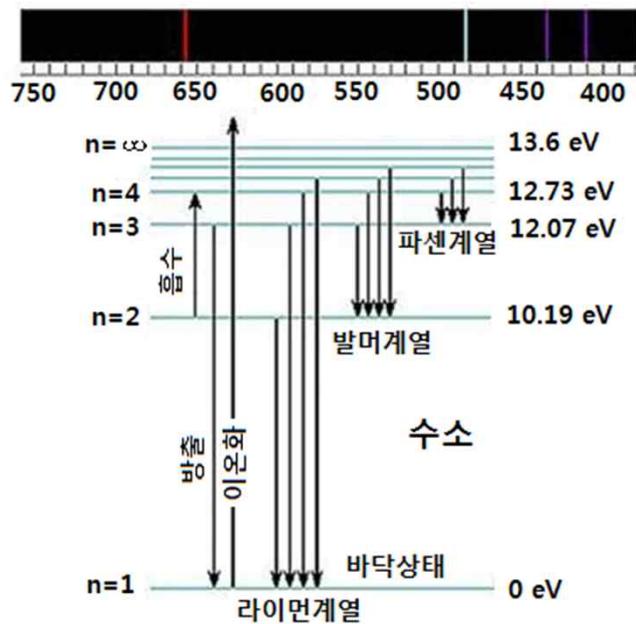
고전 물리학의 전자기 이론에 의하면 전자가 가속도 운동을 하면 전자기파를 방출하고 에너지를 잃어버려야 하는 것이 정설이다. 따라서 원 운동으로 핵 주위를 도는 전자는 연속적으로 전자기파를 방출하면서 에너지를 잃고 나선을 그리면서 핵으로 끌려들어가야만 한다. 이것은 원자가 안정되고 일정한 크기를 유지하고 있다는 러더퍼드가 제시한 원자모형은 이 사실과 과 모순이 된다.



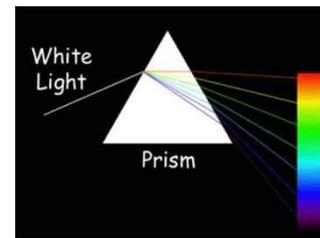
1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

(2) 원자운동에 따른 전자파 선스펙트럼의 모습



또한 러더퍼드의 원자모형에 의하면, 전자가 원자핵으로 끌려들어가는 과정에서 방출하는 빛은 원자의 종류에 관계없이 같은 모양의 연속 스펙트럼이 되어야 하는데 실제로 러더퍼드의 관찰결과는, 원자가 방출하는 빛의 스펙트럼은 원자의 종류에 따라 형태가 다른 선 스펙트럼이 나온다는 사실이다.



1.2 원자의 구조

1.2.3 러더퍼드 원자모형

보어에 의한 러더퍼드 원자모형의 모순점 해결

보어는 러더퍼드의 원자모형의 문제점을 해결하기 위하여 양자화 가설을 원자모형에 도입했다.

원자핵 주위를 돌고 있는 전자는 띄엄띄엄하게 존재하는 특정의 에너지 상태에서만 존재할 수 있다고 가정했다. 그리고 이때의 전자는 에너지를 잃거나 얻지 않기 때문에 전자기파를 방출하지 않는다. 두 에너지 상태(에너지 준위)를 이동할 때에만 전자는 빛을 방출하거나 흡수하여 에너지를 잃거나 얻게 된다.

전자의 이동에 의해서 방출하거나 흡수하는 빛의 진동수를 ν 라고 하고 플랑크 상수를 h 라고 하면 다음과 같은 식이 성립하게 된다.

$$h\nu = E_1 - E_2$$

이를 바탕으로 보어는 러더퍼드의 원자모형의 문제를 해결하고 새로운 원자모형을 제시하게 된다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

(1) 흑체 방사(Black body radiation)

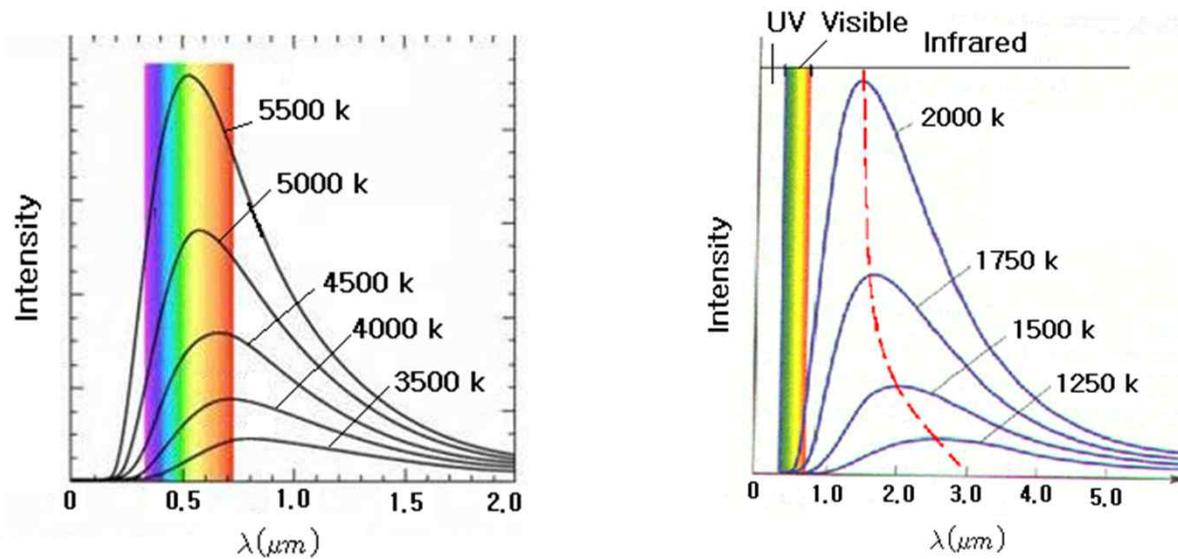


그림 1.22

→ 온도가 높아짐에 따라 최대에너지 강도는 단파장 쪽으로 이동하게 된다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

Planck 방사이론

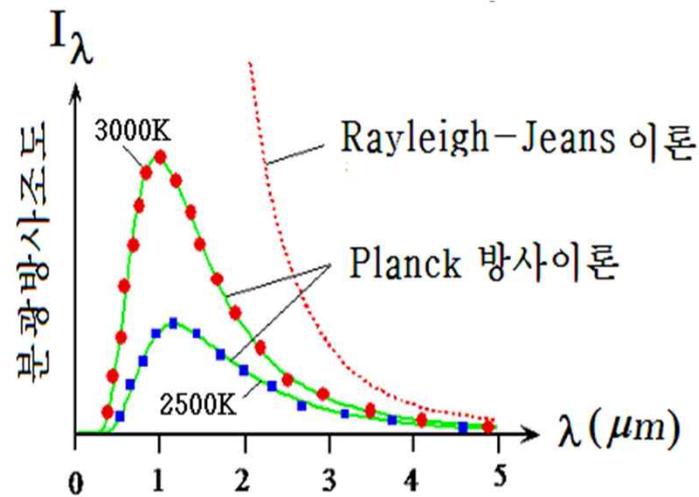


그림 1.23

Rayleigh-Jeans 실험식

$$I_\lambda \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

이 이론은 파장이 짧은 측의 에너지가 훨씬 크다는 것으로써, 실험결과와 일치하지 않는다.

Planck 방사이론

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]}$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

에너지 양자(Energy quantum)

1900년 Planck에 의해서 빛의 입자성을 규정한 개념

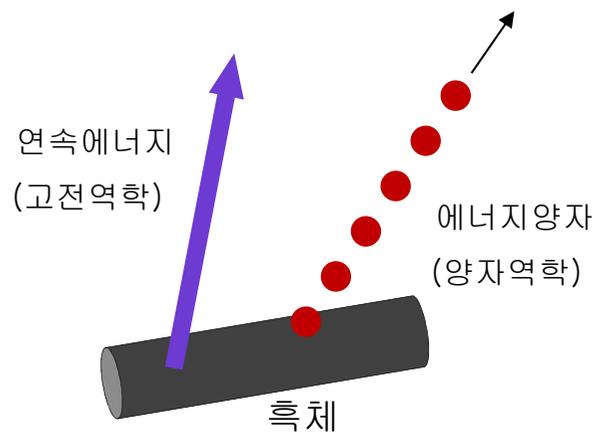


그림 1.24

빛 에너지가 흡수 또는 방사될 때 그 에너지 W 와 주파수 f 는 비례한다

$$W = hf \quad (1.43)$$

($h = 6.624 \times 10^{-34} [\text{J}\cdot\text{sec}]$) : 프랭크 상수

방사되는 빛의 주파수가 f 일 때, hf 라는 에너지 덩어리가 방사되거나 흡수된다.

이 에너지 덩어리를 **에너지 양자(energy quantum)** 또는 **광자 (Photon)**라 한다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

$W = hf$ 의 의미

일정 온도에서 서로 다른 진동수(파장)를 가진 여러 종류의 빛이 발생될 때 최대에너지를 갖는 파장이 정해져 있음을 의미한다.

즉, 방출되는 빛의 주파수 f 에 따라서 에너지 W 가 달라지는 것이다.

hf 의 에너지 다발이 입자와 같이 움직이기도 하고 파동처럼 움직이기도 한다.

빛의 입자-파동 이중성은 전자에 대해서도 똑같이 적용된다.

그러므로 빛에 대한 이론은 그대로 전자에 대해서 적용해도 된다. **빛의 파동성**

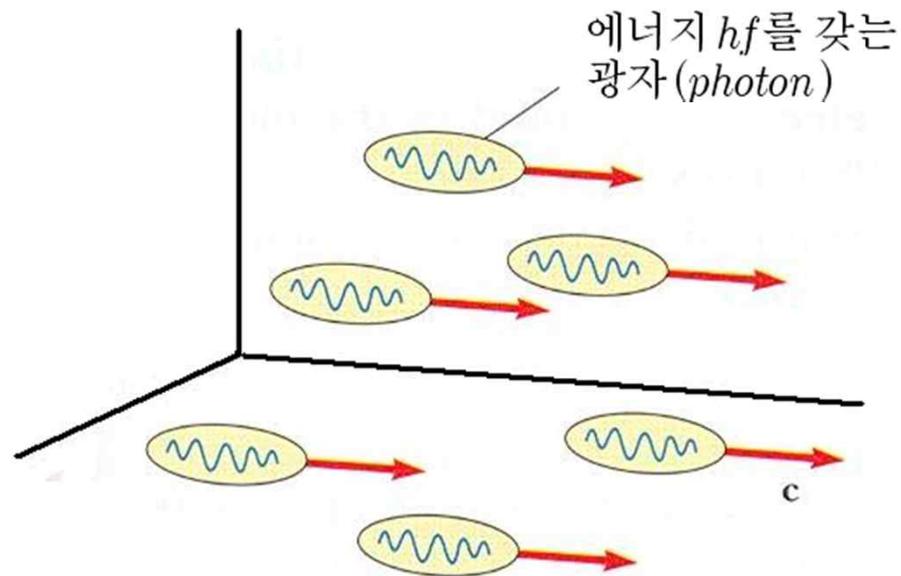


빛의 입자성

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

에너지 양자(광자)의 묘사

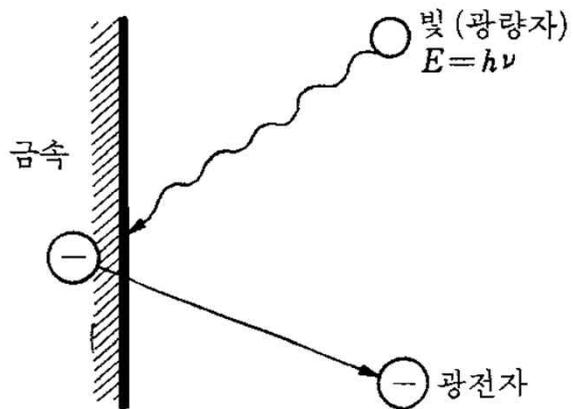


각각의 광자는 불연속적인 에너지 hf 를 갖는다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

(2) 광전효과

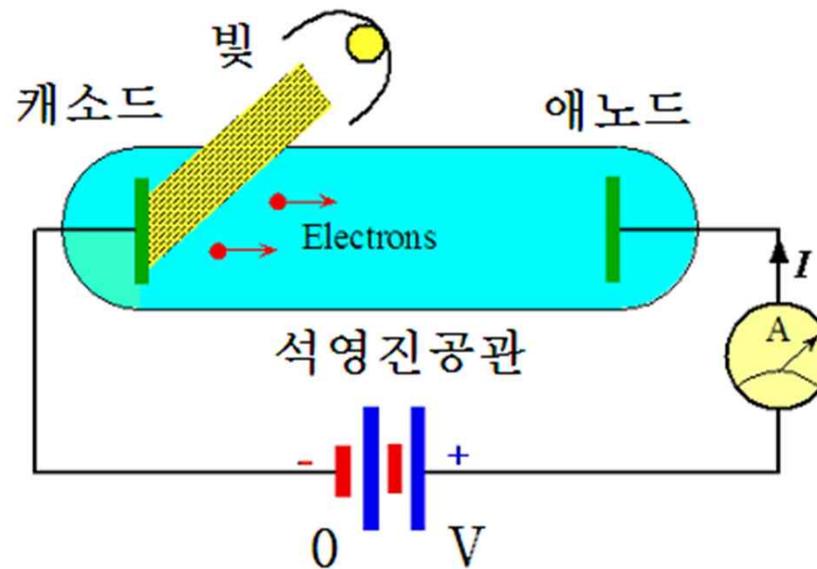


금속 표면에 빛을 비추었을 때 금속표면에서 전자가 튀어나오는 현상이 광전효과(Photoelectric effect)이다. 이때 방출된 전자를 광전자(Photoelectron)라 한다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

Lenard의 음극선관 실험

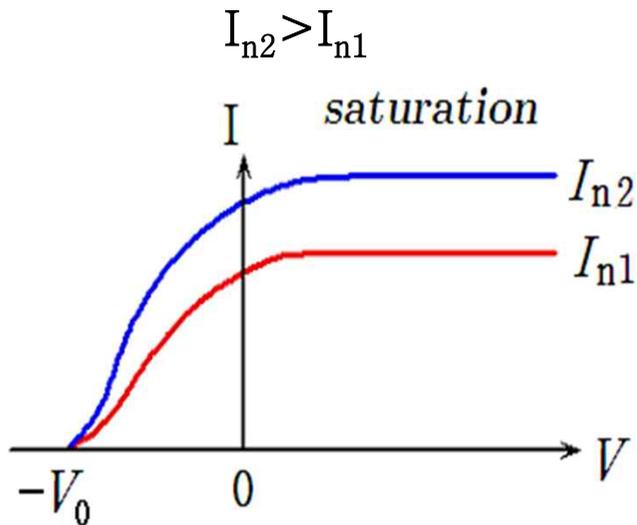


양극 전압 V 를 $(+V) - (0) - (-V)$ 로 변화했을 때의 전류변화를 관찰하는 실험

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

실험 1 : 양극전압에 따른 전류변화

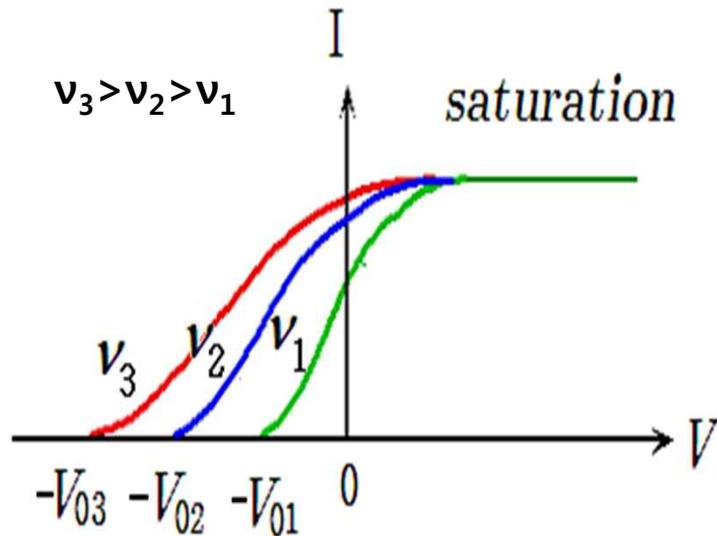


- (1) $V=0$ 인 경우 (전원이 연결되지 않은 경우)
전류 I 가 흐른다는 것은 빛이 음극에 조사되면 반대측 전극까지 갈 수 있을 정도로 충분한 운동에너지를 갖는 전자가 방출된다는 것을 의미한다.
- (2) V 를 $+V$ 으로 증가하는 경우
 $+V$ 전압이 증가하면 많은 전자들이 양극으로 이동하므로 전류가 증가한다. 어느 전압 이상이 되면 전류값이 포화된다. 이 현상은 어느 전압 이상에서는 방출전자가 증가하지 않는다는 것을 의미한다.
- (3) V 를 $-V$ 으로 증가하는 경우
양극의 전위가 음극보다 낮아지므로 방출된 전자들을 [밀어내는 효과]로 인해서 전류가 감소하다가 $-V_0$ 가 되면 전자의 흐름이 완전히 억제되므로 전류는 0으로 된다.
- (4) 빛의 강도 I_n 을 크게 하면 전자의 수가 증가되므로 전류가 증가한다($I_{n2} > I_{n1}$).

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

실험 2 : 빛의 파장에 따른 전류변화



- (1) 빛의 강도를 일정하게 유지한 상태에서 빛의 진동수를 증가시킨 경우, 방출된 전자의 운동에너지($-eV_0$)는 빛의 파장이 짧을 수록(진동수 ν 가 클 수록) 증가한다.
- (2) $-eV_0$ 는 전자의 포텐셜에너지로서 전자가 잃은 운동에너지와 같다.

$$eV_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

Lenard의 실험결과

실험 1의 결과

- (1) 빛의 세기를 증가시키면 방출되는 전자의 수가 증가한다.
- (2) 방출된 전자의 운동에너지는 조사된 빛의 세기와 무관하다.

이 결과는 빛이 전파라고 하는 파동성을 설명하지 못하고 있다.

즉 파동설에서는, 빛의 세기 증가→빛의 진폭증가→전자에 가해지는 힘의 증가→방출되는 전자에너지 증가로 이어져야 한다. 즉, 방출되는 전자 에너지는 빛의 세기에 비례해야 한다)

실험 2의 결과

방출된 전자의 운동에너지는 빛의 진동수가 클수록(또는 빛의 파장이 짧을 수록) 크다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

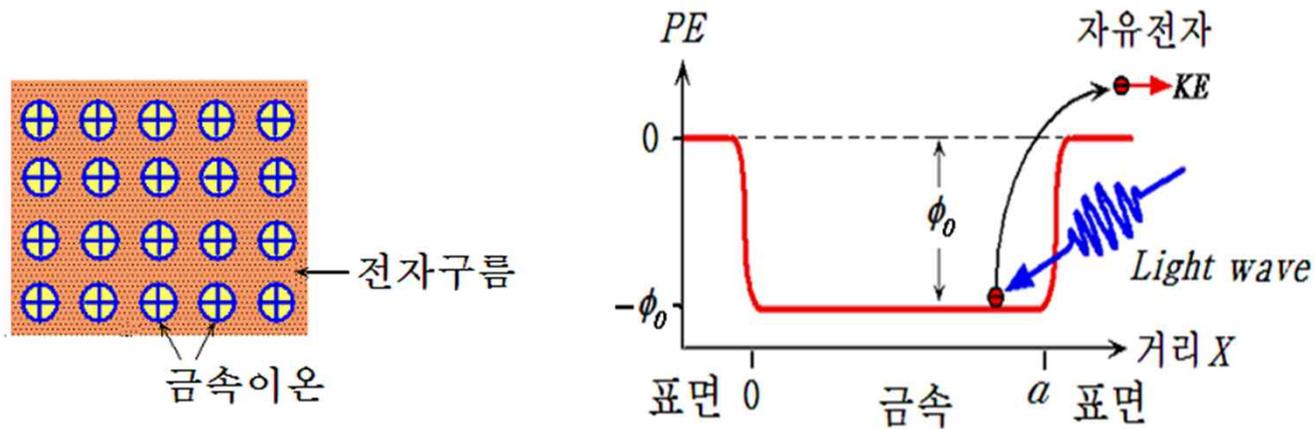
Einstein에 의한 빛의 입자설

- (1) 빛은 $h\nu$ 의 크기를 갖는 에너지 양자(광자)로 되어 있다. ($W = hf$)
- (2) 한 개의 광자가 전자에 부딪칠 때, 광자의 에너지는 전자에 전달되므로 결국 광자는 전자에 흡수된다.
- (3) 금속에서 전자가 방출되기 위해서는 일함수(Work function) $W = \phi$ 의 에너지가 필요하다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

금속의 일함수(work function)



금속 내부에 있는 전자는 진공의 포텐셜 에너지 보다 ϕ_0 만큼 낮은 포텐셜 에너지를 갖고 있다. 이 에너지 ϕ_0 를 금속의 일함수(Work function)라 한다.

이러한 낮은 포텐셜 에너지는 (+)로 대전된 금속이온들과 전자간의 Coulomb 인력으로 인해 생겨난 것이다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

전자의 운동에너지

에너지 $W = hf$ 를 가진 광자가 금속에 충돌하면 금속 안의 전자는 hf 의 에너지를 얻어서 밖으로 튀어나온다.

광자의 에너지 hf , 금속의 일함수 ϕ_0 인 경우

$hf > \phi_0$ 이면 전자가 밖으로 튀어날 수 있다. 이때 밖으로 튀어나온 전자가 갖는 운동에너지 E 는

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 = hf - \phi_0 \quad (1.45)$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \text{이므로,}$$

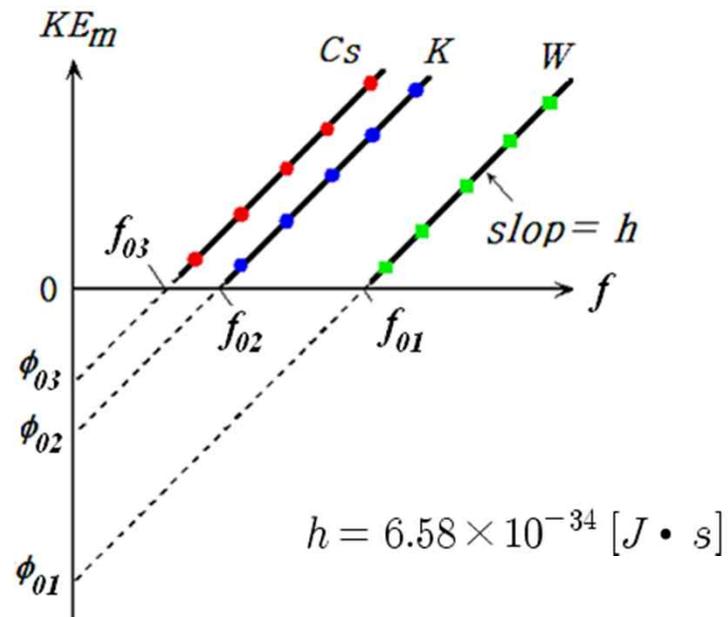
$$E = \frac{ch}{\lambda} - \phi_0 \quad (1.46)$$

즉, 파장 λ 가 짧을수록(주파수 f 가 클수록) 전자의 운동에너지는 커진다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

Milikan의 실험 (빛의 진동수와 음극물질과의 관계)



실험결과

- (1) 음극물질에 따른 각 절편은 다르고 기울기는 같다.
- (2) h 는 직선의 기울기로서 전극물질에 관계없이 일정하다.
- (3) f_{01} , f_{02} , f_{03} 는 전극물질에 따라 달라진다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

Milikan의 실험 결과식

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 = hf - hf_0 = h(f - f_0) \quad (1.47)$$

여기서, 기울기 $h : 6.582 \times 10^{-34} [\text{J}\cdot\text{sec}]$: planck's constant와 일치 (1.48)

결국 $hf_0 = \phi_0$ 로써, 일함수(Work function)가 된다. (1.49)

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

한계파장의 결정

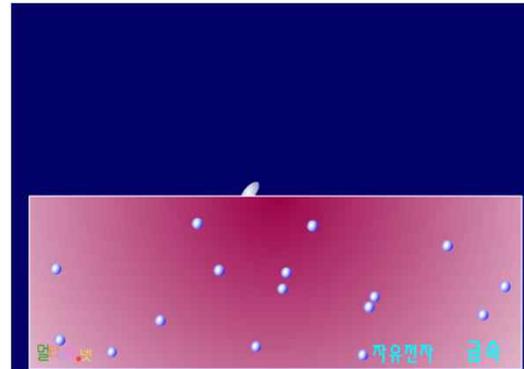
어떤 빛의 주파수 f_0 보다 작으면 전자의 운동에너지가 (+)값이 되지 못하므로 광자가 방출되지 않는다.

즉, 어느 한계파장(λ_0)보다 긴 파장의 빛에서는 광자방출이 일어나지 않는다.

$$f_0 = \frac{W}{h} \text{ 이고 } \frac{c}{\lambda_0} = \frac{W}{h} \text{ 이므로}$$

한계파장 :

$$\lambda_0 = \frac{h}{W} c$$



1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

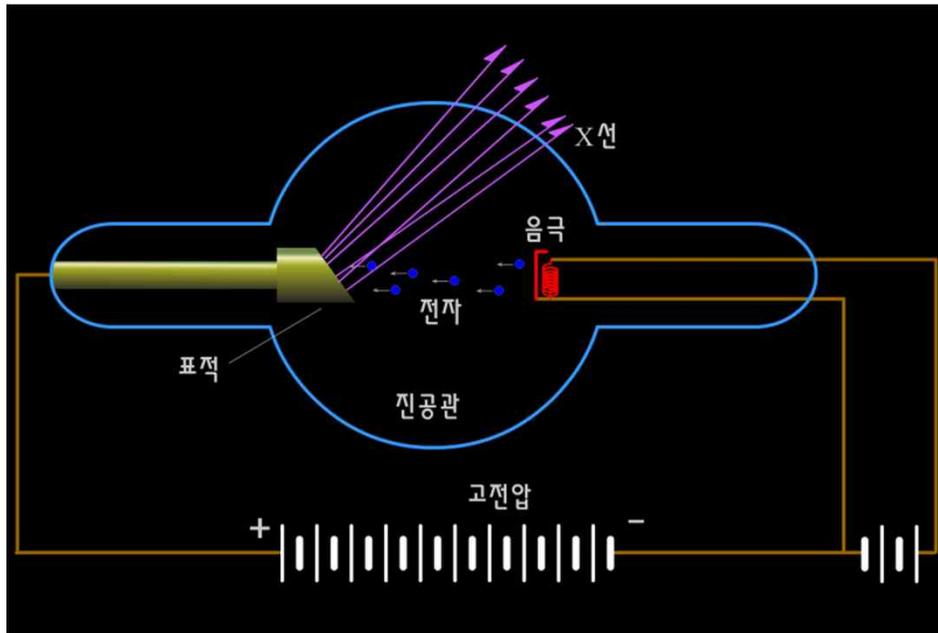
각종 원소의 일함수

원소	일함수(eV)	원소	일함수(eV)
백금 platinum	6.35	니오브 niobium	4.3
셀레늄 selenium	5.11	아연 zinc	4.3
니켈 nickel	5.01	납 lead	4.14
금 gold	5.1	알루미늄 aluminum	4.08
베릴륨 beryllium	5.0	카드뮴 cadmium	4.07
코발트 cobalt	5.0	마그네슘 magnesium	3.68
탄소 carbon	4.81	우라늄 uranium	3.6
은 silver	4.73	칼슘 calcium	2.9
구리 copper	4.7	칼륨 potassium	2.3
철 iron	4.5	나트륨 sodium	2.28
수은 mercury	4.5	세슘 cesium	2.1

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

(3) 콤프톤(Compton)효과



뢴트겐이 발명한 X선 발생장치

음극 부분의 필라멘트의 열에 의해 방출된 전자가 + 전압이 걸려 있는 표적으로 가속되어 표적과 충돌한다. 표적은 금속으로 만들어져 있으며, 그림처럼 전자선에 비하여 약간 기울어져 있다. 표적과 충돌한 전자는 갑자기 멈추면서 그 에너지가 X선을 만들어서 방출케 한다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

(3) 콤프톤(Compton)효과

Compton효과란 **빛이 입자로써 움직인다는 현상**에 관한 것으로 1923년 Compton에 의해서 증명되었다. (광자의 실재를 증명하는 중요한 실험)
일정 파장의 X선 광자를 탄소에 쬐었을 때 탄소에 의해서 산란된 X선 중에는 입사 X선보다 파장이 긴 X선이 포함되는 현상을 말한다.

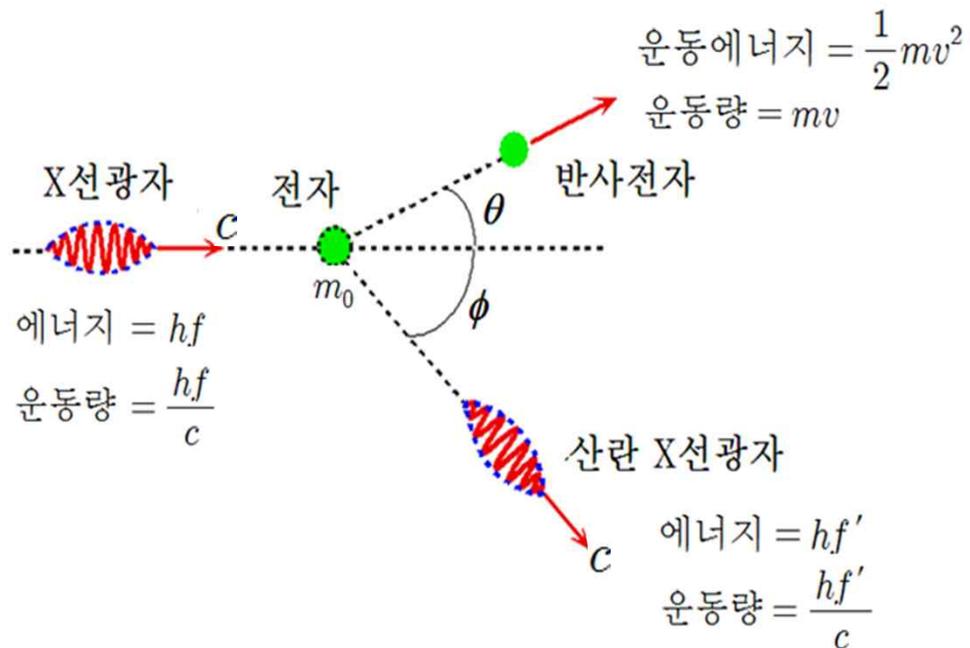
$$f_0(\text{입사선 진동수}) > f(\text{산란선 진동수})$$

$$\text{즉, } \lambda_0(\text{입사선 파장}) < \lambda(\text{산란선 파장})$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

(3) 콤프톤(Compton)효과

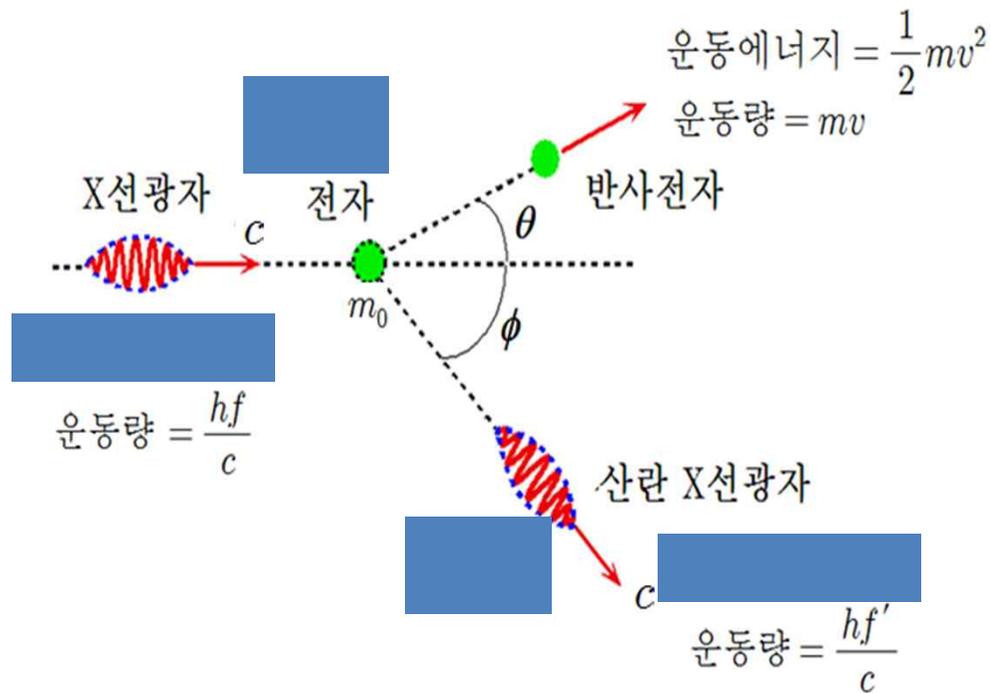


전자와의 충돌에 의해서 산란된 X선은 전자에 에너지를 준 만큼 에너지를 잃기 때문에 결국 진동수는 적어진다(대신 파장 λ 는 커진다). 그리고 전자는 X선의 에너지를 받아서 운동에너지가 생겨난다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

충돌에 의한 에너지보존



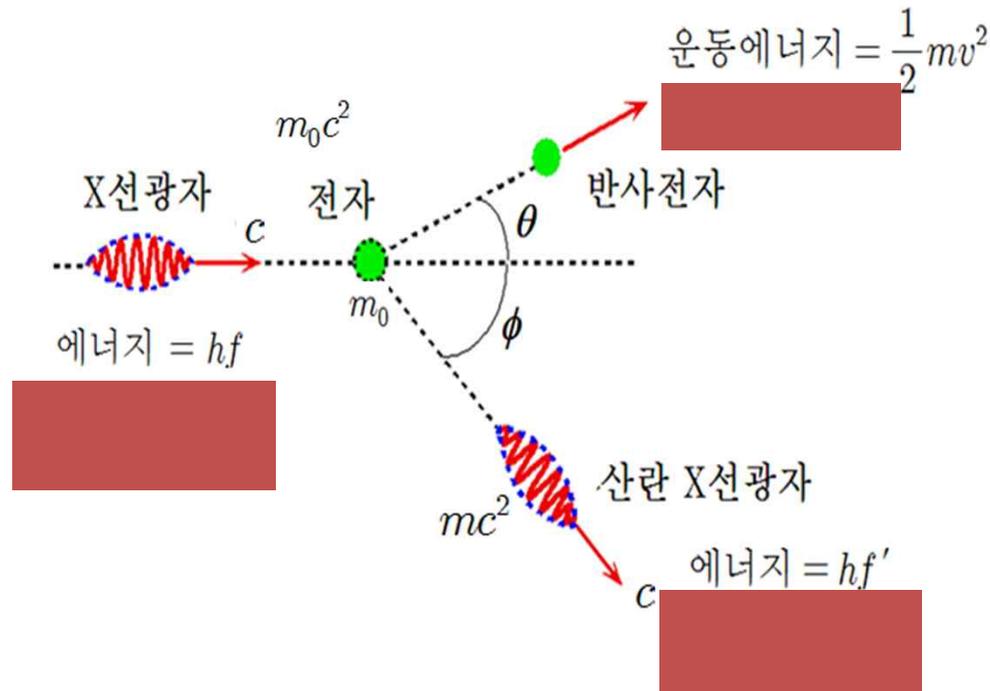
에너지보존의 법칙

$$hf + m_0c^2 = hf' + mc^2 \quad (1.51)$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

충돌에 의한 운동량보존



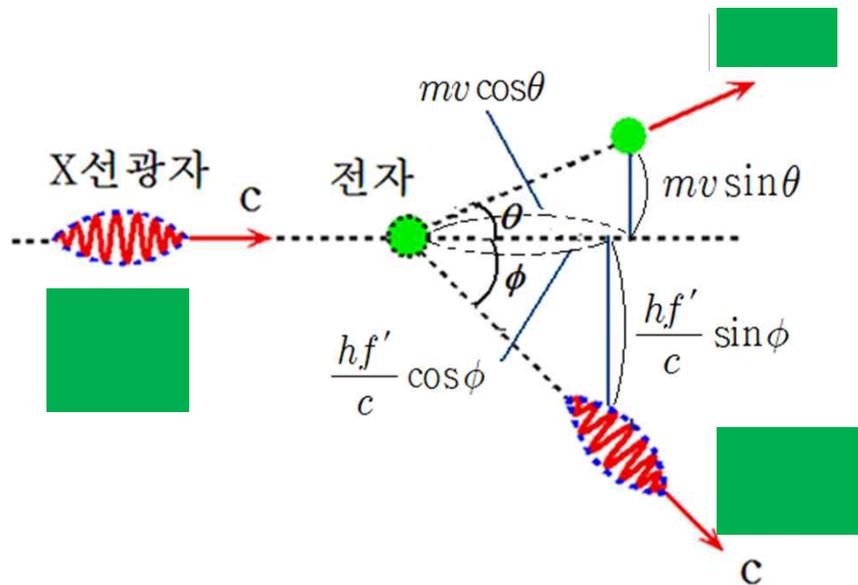
운동량보존의 법칙

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} + mv$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

충돌에 의한 운동량보존



운동량보존의 법칙으로부터

x 방향 성분

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos \phi + mv \cos \theta \quad (1.52)$$

y 방향 성분

$$0 = \frac{hf'}{c} \sin \phi - mv \sin \theta \quad (1.53)$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

Compton 파장

에너지보존법칙에 따라서 충돌 전 총 에너지 = 충돌 후 총 에너지

$$hf + m_0c^2 = hf' + mc^2 \quad \text{①}$$

운동량 보존법칙에 의해서,

$$\text{X방향성분} \quad \frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos\phi + mv \cos\theta \quad \text{②}$$

$$\text{Y방향성분} \quad 0 = \frac{hf'}{c} \sin\phi - mv \sin\theta \quad \text{③}$$

식 ②와 식 ③을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$hf - hf' \cos\phi = mvc \cos\theta \quad \text{④}$$

$$hf' \sin\phi = mvc \sin\theta \quad \text{⑤}$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

식 ④와 식 ⑤를 제곱을 해서 합하고,

$$\begin{aligned} & (h^2 f^2 + h^2 f'^2 \cos^2 \phi - 2h^2 f f' \cos \phi = m^2 v^2 c^2 \cos^2 \theta) \\ & + (h^2 f'^2 \sin^2 \phi = m^2 v^2 c^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

정리하면,

$$\begin{aligned} & h^2 f^2 + h^2 f'^2 \cos^2 \phi - 2h^2 f f' \cos \phi + h^2 f'^2 \sin^2 \phi = m^2 v^2 c^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ & h^2 f'^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + h^2 f^2 - 2h^2 f f' \cos \phi = m^2 v^2 c^2 \end{aligned}$$

따라서

$$m^2 v^2 c^2 = h^2 (f^2 + f'^2 - 2f f' \cos \phi) \quad \text{⑥}$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

식 ①로부터

$$hf + m_0c^2 = hf' + mc^2 \quad \rightarrow \quad h(f - f') + m_0c^2 = mc^2 \quad \text{⑦}$$

식 ⑦의 양변을 제곱

$$m^2c^4 = h^2(f^2 + f'^2 - 2ff') + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(f - f') \quad \text{⑧}$$

식 ⑧에서 식⑥을 빼면,

$$\begin{aligned} m^2c^4 &= h^2(f^2 + f'^2 - 2ff') + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(f - f') \\ - \quad &\left[m^2v^2c^2 = h^2(f^2 + f'^2 - 2ff' \cos\phi) \right] \end{aligned}$$

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = h^2(f^2 + f'^2 - 2ff') + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(f - f') - h^2(f^2 + f'^2 - 2ff' \cos\phi)$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

다시 정리하면,

$$m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2h^2 f f' + m_0^2 c^4 + 2hm_0 c^2 (f - f') + 2h^2 f f' \cos\phi$$

$$m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -2h^2 f f' (1 - \cos\phi) + m_0^2 c^4 + 2hm_0 c^2 (f - f') \quad \textcircled{9}$$

여기서,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \text{이므로} \quad m^2 = \frac{m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.54)$$

m^2 을 식 ⑨에 대입하면,

$$\cancel{m_0^2} c^4 = -2h^2 f f' (1 - \cos\phi) + \cancel{m_0^2} c^4 + 2hm_0 c^2 (f - f')$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

그러므로

$$2h^2ff'(1 - \cos\phi) = 2hm_0c^2(f - f')$$

따라서

$$hff'(1 - \cos\phi) = m_0c^2(f - f')$$

$$f - f' = \frac{hff'(1 - \cos\phi)}{m_0c^2}$$

$$\frac{f - f'}{ff'} = \frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\phi)$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_0c^2}(1 - \cos\phi) \quad \textcircled{10}$$

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

그리고 양 변에 c 를 곱하면,

$$\frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\phi)$$

여기서, $\lambda = \frac{c}{f}$ 이므로

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\phi) \quad (1.55)$$

파장의 차 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ 는 물질의 종류에 관계없이 산란각 ϕ 로 결정된다.

1.2 원자의 구조

1.2.4 양자론의 탄생

산란각 $\phi = \pi/2$ 인 경우, 파장의 차 $\Delta\lambda$ 는

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6.624 \times 10^{-34} [J \cdot s]}{(9.11 \times 10^{-31} [kg]) \times (3 \times 10^8 [m/s])} = 2.42 \times 10^{-12} [m]$$

(1.56)

길어진 만큼의 파장 $\Delta\lambda$ 를 **compton 파장**이라 한다.