9장. 선운동량과 충돌 (Linear Momentum and Collision)

o Newton's 제 2 법칙 :

운동량의 법칙 → 가속도의 법칙 ⇒ Net Force의 법칙

- 제2법칙 : 물체에 작용한 힘은 물체의 운동량의 변화율과 같다

$\Delta p \propto F_{av}\Delta t$ 비례계수를 1로 하고 운동량과 힘은 같은 방향

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{av}\Delta t \qquad \text{or} \qquad \vec{F}_{av} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

- 물체에 가해진 평균 힘은 운동량의 시간 변화율과 같다.

or

o $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ Modified "Newton's 2nd Law"

・물체에 작용하는 힘은 그 물체의 운동량의 시간 변화율과 같다.

$$\therefore \quad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

- 물체의 운동량 (Moment, “Momentum" or Momenta")
- Latin어 Quantity of Motion에서 Newton이 따온 말

9.1 선운동량 (Linear Momentum)

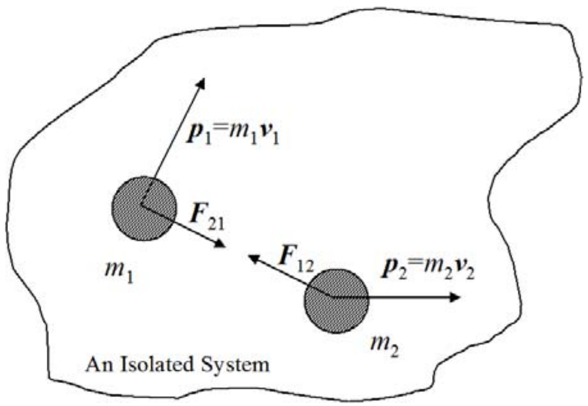
- *Define*) $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ ⇒ $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y$, $p_z = mv_z$
- 고립된 질점계에서 물체에 작용하는 외력의 합이 0이면 운동량은 보존된다.

※ Conservation of (Linear) Momentum (선 운동량 보존의 법칙)

If $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0$ then $\vec{p} = const$ (일정)

◎ 2계 질점계에서의 선운동량의 보존, 충돌
(Conservation of Linear Momentum
for a Two Particle System, Collision, Scattering)

- 질점 1이 느끼는 질점 2의 작용력 $\vec{F}_{12} = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt}$
- 질점 2가 느끼는 질점 1의 작용력 $\vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt}$
- 이때 F_{12}와 F_{21}은 서로에 대한 작용, 반작용력



∴ $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ $\dfrac{d\vec{p}_1}{dt} + \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$

∴ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} = const$ "선운동량 보존의 법칙"

where : 두 질점들의 총 운동량, "Law of Conservation of Linear Momentum"

- 어떤 고립계내의 전체 운동량은 시간에 관계없이 항상 일정하다

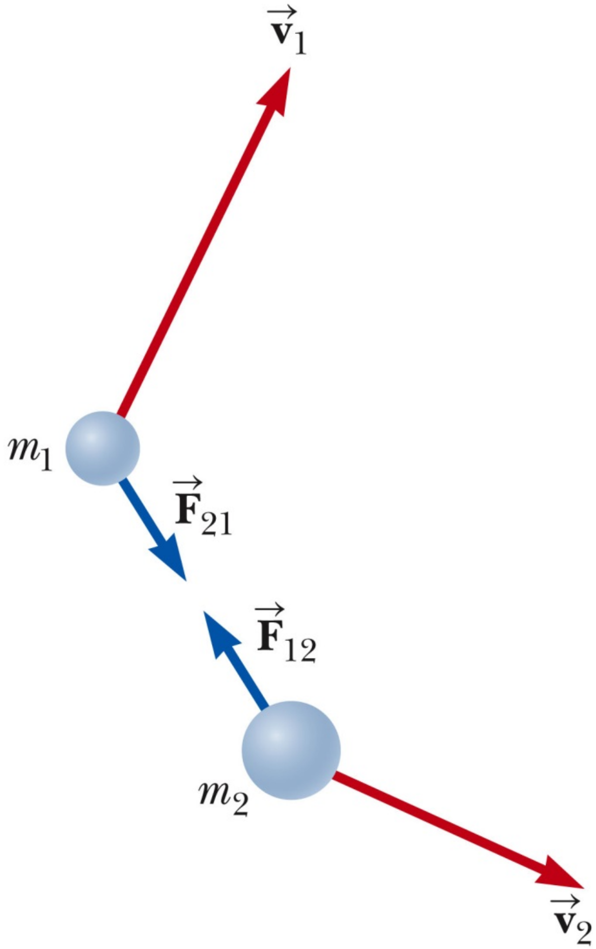
오른쪽 그림에서

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \qquad m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$$

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1\mathbf{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0$$



시간에 대한 미분이 0이므로 괄호 안에 있는 물리량은 일정해야 한다. 이 양을 계의 선운동량이라고 한다.

속도 v로 움직이는 질량 m인 입자나 물체의 선운동량(linear momentum)은 질량과 속도의 곱으로 정의된다.

$$\boxed{\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}}$$

(벡터량)

단위: kg · m/s

뉴턴은 질량과 속도의 곱 mv 를 운동의 양(quantity of motion)이라고 표현했다. 이는 운동을 멈추게 하기 어려운 정도를 가리킨다.

입자의 선운동량과 입자에 작용하는 힘 사이의 관계를 생각하면,

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

(제2법칙의 일반화된 형태)

입자의 선운동량의 시간 변화율이 그 입자에 작용하는 전체 합력 즉, 알짜힘과 같다.

9.2 분석 모형: 고립계(운동량)
(Analysis Model: Isolated System(Momentum))

즉, $\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) = 0$ ⇨ $\therefore \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0$

$$\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{일정}$$

$$\mathbf{p}_{1i} + \mathbf{p}_{2i} = \mathbf{p}_{1f} + \mathbf{p}_{2f}$$

전체 (선)운동량이 보존되므로 각 성분별로도 보존된다.

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \quad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \quad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$$

선운동량 보존 법칙

고립된 계에 있는 두 입자 이상의 입자가 상호 작용할 때, 이들 계의 전체 (선)운동량은 항상 일정하게 유지된다.

☆ **예제 9.1** 활 쏘는 사람

60 kg의 궁수가 마찰이 없는 얼음 위에 서서 0.50 kg의 화살을 수평 방향으로 50m/s로 쏘았다. 화살을 쏜 후에 반대 방향으로 궁수가 얼마의 속도로 얼음 위에서 미끄러지는가?

풀이

$$m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f} = 0$$

$$\mathbf{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_{2f} = -\left(\frac{0.50\text{kg}}{60\text{kg}}\right)(50\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s})$$

$$= -0.42\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

만일 화살을 수평선상에서 각 θ인 방향으로 쏘았다면 궁수의 반동 속도는 어떻게 될까?

X-방향에서 운동량 보존을 고려하면

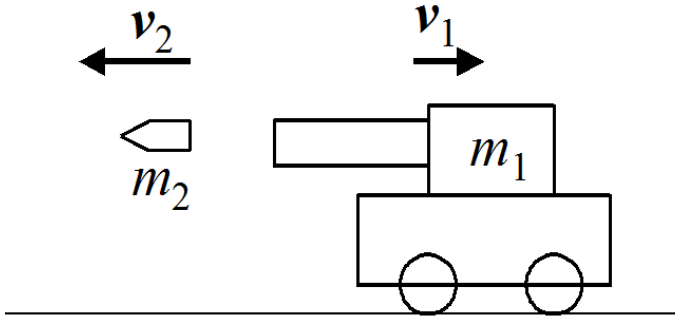
$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}\cos\theta = 0$$

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2f}\cos\theta$$

예제 포탄의 발사 속도

얼어붙은 호수 위에서 3000㎏의 대포가 30㎏의 포탄을 수평으로 발사하였더니, 그 반발력으로 대포가 1.8㎧의 속도로 움직였다. 포탄의 발사 속도는?

풀이



※ 발사전 계의 총 운동량 = 0

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$v_2 = -\frac{m_1 v_1}{m_2} = -\frac{3000Kg}{30Kg} \times 1.8\, {}^{m}\!/_{\sec} = -180\, {}^{m}\!/_{\sec}$$

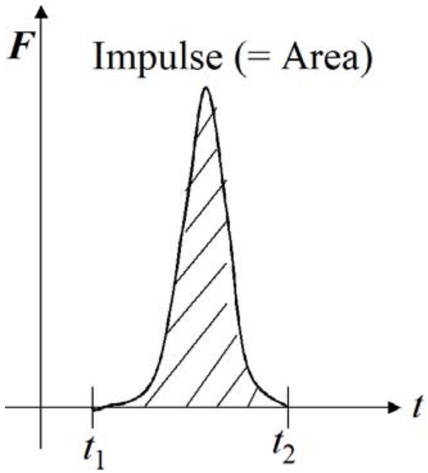
cf) "−" sign : 포탄의 방향은 대포와 반대 방향

9.3 분석 모형: 비고립계(운동량)
(Analysis Model: Nonisolated System(Momentum))

◎ 충격량 (Impulse I) = 운동량의 변화량 (△p)

- 운동량의 변화량 (△p : "충격량", Impulse I)으로부터 아주 짧은 시간에 작용하는 힘
- 짧은 시간동안 작용하는 총 힘 (Vector 량) :

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{F} dt$$ 충격량 (Impulse)



- $\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 에서 $d\mathbf{p} = \sum \mathbf{F} dt$

양변을 적분하면 $\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{I}$

- 질점에 작용하는 힘이 충분히 크지 않더라도 작용 시간을 줄임으로써 큰 Impulse를 얻을 수 있다.
- 입자의 운동량의 변화는 입자에 작용하는 알짜힘의 충격량과 같다.

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{I}$$ (충격량-운동량 정리)

cf) Impulsive Force (충격력)

- 짧은 시간동안 작용하는 힘
- t 가 아주 짧은 경우에 적용

Ex) 당구 칠 때 큐를 끊어치기

- 질점에 작용하는 힘은 아주 짧은 시간 동안이지만 다른 힘 (*ex* 중력) 보다 충분히 크게 작용

Aside) ◎ Average Force (평균력)

- 단위 시간당 작용한 힘

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{I}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{F}}\Delta t$$

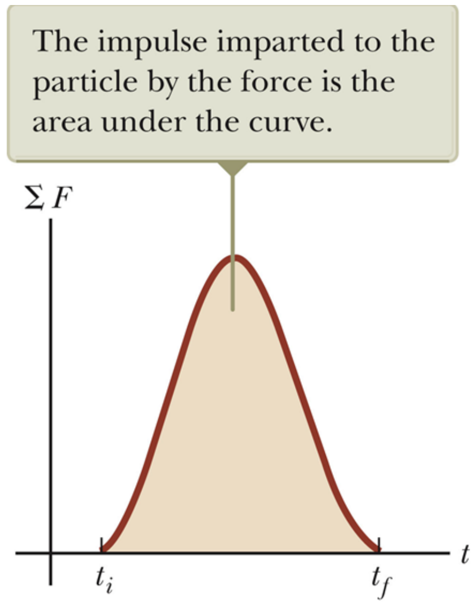
- Impulse Approximation (충격량 근사)

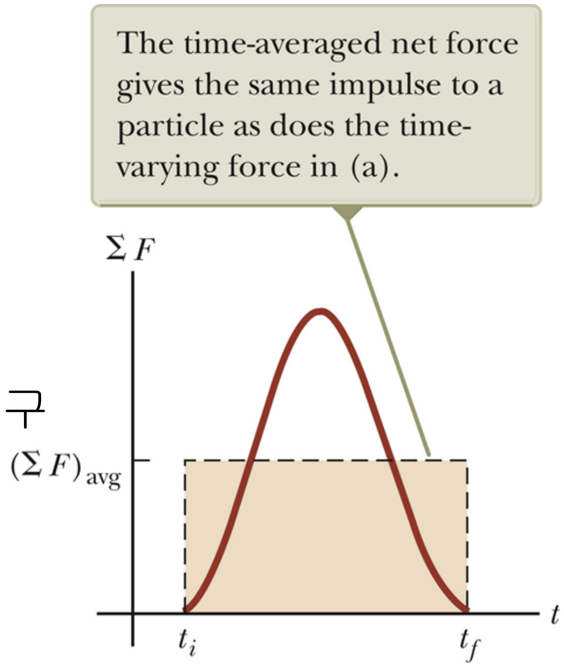
Impuse와 평균력은 같은 면적을 가진다.

cf) 평균력은 Impulse에 비하여 충분히 큰 작용시간을 요구

$(\sum \mathbf{F})_{avg} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{F} dt$ 으로 표현하면 $\boldsymbol{I} = (\sum \boldsymbol{F})_{avg}\Delta t$

작용하는 힘이 시간에 대해 일정한 경우 $\boldsymbol{I} = \sum \boldsymbol{F}\,\Delta t$





Aside *Ex)* 당구에서의 끊어치기의 경우 : 큐는 당구공에 대해 v_0의 속도로부터 0으로 변화

- 작용하는 평균속도는

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}_0 - 0}{2} = \frac{\boldsymbol{v}_0}{2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}}$$

- 작용하는 평균력은

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{I} = \frac{1}{\Delta t} M \boldsymbol{v}_0 = \frac{\bar{v}}{\Delta x} M v_0 = \frac{v_0}{2\Delta x} M v_0 = \frac{M}{2\Delta x} v_0^2$$

cf) Dimension : $\frac{\text{kg}}{m} m^2/\sec^2 = \text{kg}\,\text{m/s}^2 = N$ 만족

o 밀어치기의 경우 : 큐는 당구공에 대하여 v_0의 속도로 작용

- 작용하는 평균속도는 $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_0 \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v_0}$

- 작용하는 평균력은 : $\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{I} = \frac{1}{\Delta t} M \boldsymbol{v}_0 = \frac{\bar{v}}{\Delta x} M v_0 = \frac{v_0}{\Delta x} M v_0 = \frac{M}{\Delta x} v_0^2$

∴ 당구에서의 경우 밀어치기가 끊어치기 보다 약 2배 더 공이 굴러간다.

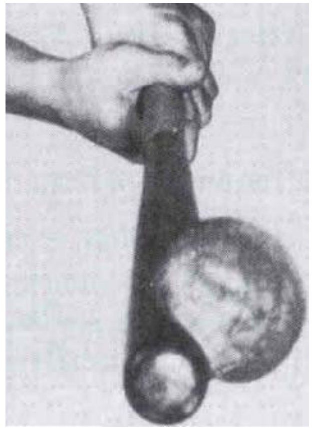
Aside *Ex)* 프로 골퍼가 우드를 이용하여 45° 의 각도로 275Yd (250m)의 공을 쳤다. 공의 질량은 50g, 직경은 4cm이다.

a) 공기의 저항을 무시할 경우, 골프공이 받은 충격량(Impulse)은?

Hint) 포물선 운동 최대사정거리 $R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$ 를 이용, $g \simeq 10\,\text{m/s}^2$

sol) $v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\theta}} = \sqrt{Rg} = \sqrt{250 \times 10} = 50\,\text{m/s}$

$$I = \Delta P = m v_0 = 50 \times 10^{-3} \times 50 = 2.5\,\text{kg}\,\text{m/s}$$



b) 골프채로 공을 타격시 공은 약 반정도 찌그러지게 된다.
공과 골프채와의 작용시간 (충돌시간)은 얼마나 되는가?

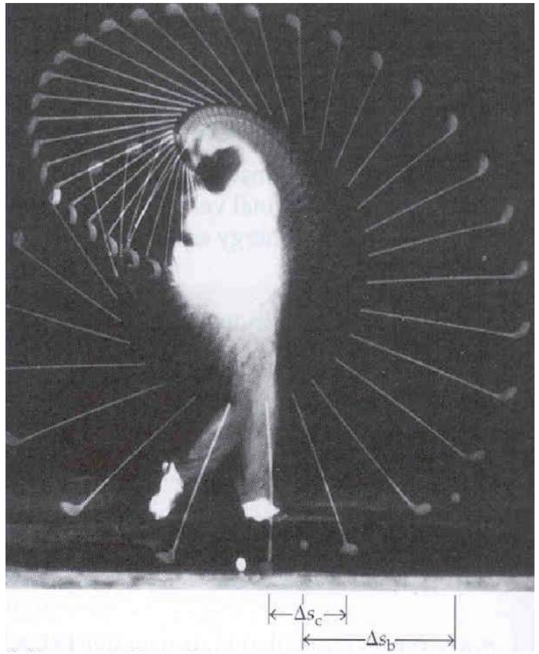
sol) Serway (3rd. ed. *Ex* 9-1)에 따르면,

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_0} = \frac{2\times 10^{-2}}{50} = 4\times 10^{-4}\text{sec}$$

Tipler (3rd. ed. *Ex* 7-16)에 따르면,
평균 속력을 고려해야 하므로

$$\bar{v} = \frac{v_0 - 0}{2} = 25\text{m/s},$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}} = \frac{2\times 10^{-2}}{25} = 8\times 10^{-4}\text{sec}$$



c) 이 골퍼가 공에 가한 평균력은 얼마나 되는가?

sol) $\bar{F} = \dfrac{I}{\Delta t} = \dfrac{2.5}{4\times 10^{-4}} = 6.25\times 10^{3} N$ (Serway)

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2.5}{8\times 10^{-4}} = 3.125\times 10^{3} N \quad \text{(Tipler)}$$

d) 골프채의 머리 부분은 골프공에 비하여 충분히 무겁다. 골프채와 골프공의 충돌시 골프채의 머리부분의 선속도는 약 얼마나 되겠는가?

sol) Tipler 책 p202, 예제 7-10에 의하면, $m_1 \gg m_2$ 이라면 $v_{2f} \approx 2\, v_{1i}$

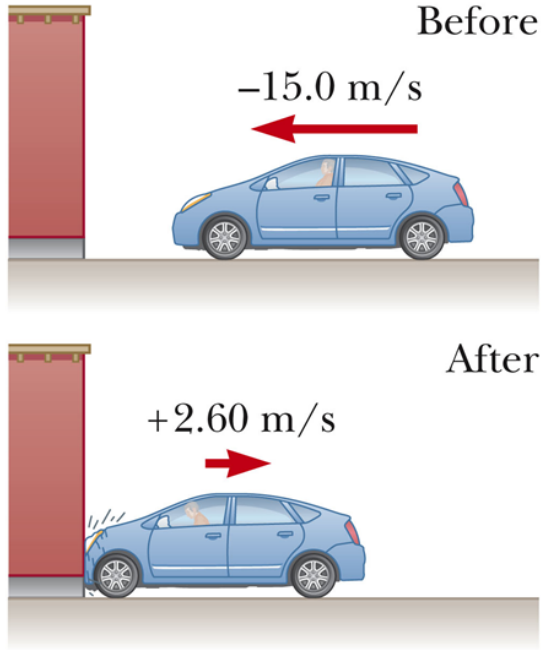
따라서 약 25m/s

☆ **예제 9.3** 범퍼가 얼마나 좋은가?

자동차 충돌 시험에서 질량 1500*kg* 의 자동차가 벽과 충돌한다. 충돌 전, 후 자동차의 속도는 각각 $v_i = -15.0\hat{i}\ m/s$ 와 $v_f = 2.60\hat{i}\ m/s$ 이다. 충돌이 0.150초 동안에 일어난다면, 이 때 충돌에 의한 충격량과 자동차에 가해지는 평균력은 얼마인가?

풀이 충격량 :

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$
$$= m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(v_f - v_i)$$
$$= 1500\,Kg \times \{2.6\,\text{m/s} - (-1.5\,\text{m/s})\}$$
$$= 2.64\times10^4\,Kg\ \text{m/s}$$



$$F_{avg} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{2.64\times10^4\,\hat{i}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = 1.76\times10^5\,\hat{i}\ \text{N}$$

cf) 튕기지 않았다면 → 충돌 후 멈춤 : $v_f = 0 \Rightarrow p_f = 0$

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = -m\vec{v}_i = 1500\,Kg \times (-1.5\,\text{m/s})$$
$$= 2.25\times10^4\,Kg\ \text{m/s}$$

알짜힘
= 평균력

$$F_{avg} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{2.25\times10^4\,\hat{i}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = 1.5\times10^5\,\hat{i}\ \text{N}$$

∴ 튕겼을 때의 충격량과 평균력이 더 크다

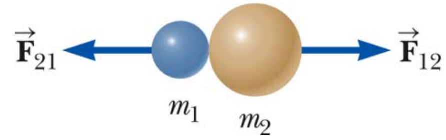
Aside) ◎ 운동량과 에너지의 비교

– Linear Momentum .vs. Kinetic Energy

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \quad \Rightarrow \quad KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

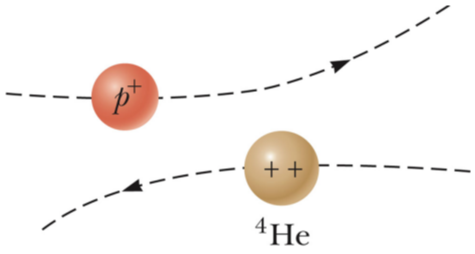
9.3 일차원 충돌 (Collisions in One Dimension)

◎ 충돌 현상의 종류



o 탄성 충돌 : Elastic Collision

– 운동량 보존, 운동 에너지 보존 *ex*) (상아) 당구공



o 비탄성 충돌 : Inelastic Collision

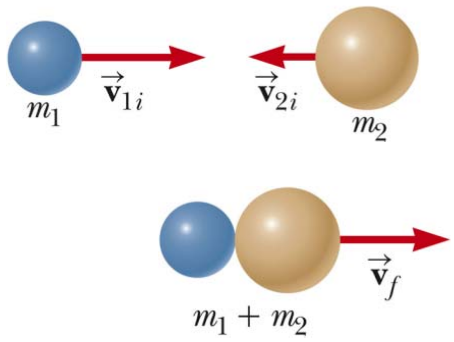
– 운동량 보존, 운동 에너지 비보존

o 완전 비탄성 충돌 : Perfectly Inelastic Collision

– 비탄성 충돌시 두 물체가 충돌한 후 함께 붙어서 운동

탄성 충돌(elastic collision): 충돌 과정에서 계의 전체 운동 에너지가 보존

비탄성 충돌(inelastic collision): 충돌 과정에서 계의 전체 운동 에너지가 보존되지 않음



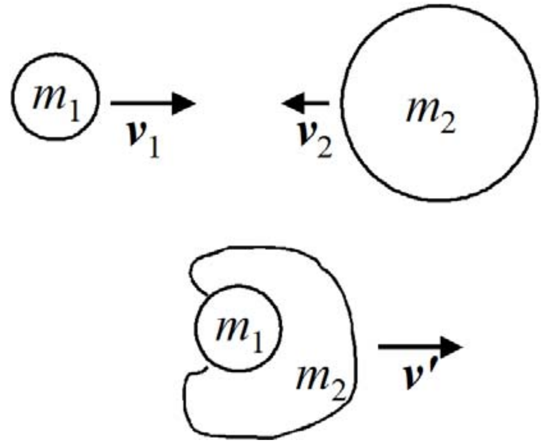
◈**완전 비탄성 충돌 (Perfectly Inelastic Collisions)**

충돌한 후 서로 붙어서 함께 운동하는 경우

◎ 완전 비탄성 충돌 (Perfectly Inelastic Collision)의 해석

- 질량 m_1이 속도 v_1로 움직이고 질량 m_2가 속도 v_2로 움직인다면
- by Momentum Conservation:

$$P_i = m_1\boldsymbol{v}_{1i} + m_2\boldsymbol{v}_{2i} \qquad P_f = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_f$$



$$\boldsymbol{v}_f = \frac{m_1\boldsymbol{v}_{1i} + m_2\boldsymbol{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

cf) 완전 비탄성 충돌에서의 에너지 손실

- 완전 비탄성 충돌에서는 에너지 보존이 일어나지 못한다
- 에너지 :

$$E_i = KE_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 \qquad E_f = KE_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$$

- 손실 에너지 :

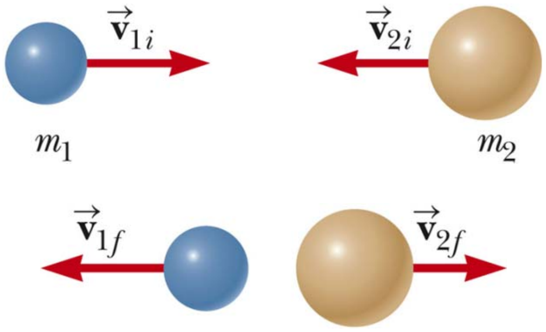
$$\Delta KE = KE_f - KE_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2\right)$$

V_f를 대입하면,

$$\Delta KE = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_{1i} - v_{2i})^2$$

"−" sign : Energy Loss

◈탄성 충돌 (Elastic Collisions)



운동량 보존 법칙에 따라서

$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{9.16}$$

탄성 충돌에서는 운동 에너지도 보존되므로

$$KE_i = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \qquad KE_f = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{9.17}$$

에너지 관련식을 변형하면

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \tag{9.18}$$

운동량 보존식에서

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \tag{9.19}$$

(9.18)/(9.19) $$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \qquad (9.20)$$

(9.16)과 (9.20)식을 이용하면

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \qquad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

특별한 경우로서, m_2가 정지해 있던 경우

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

A) $m_1 = m_2$인 경우, $v_{1f} = 0$ $v_{2f} = v_{1i}$

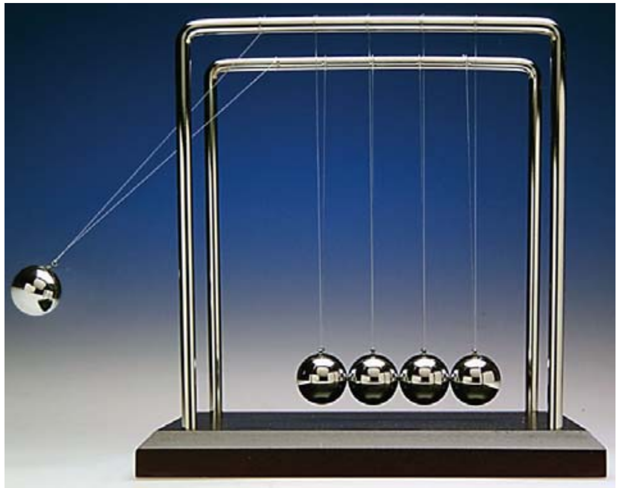
B) $m_1 >> m_2$인 경우, $v_{1f} \cong v_{1i}$ $v_{2f} \cong 2v_{1i}$

C) $m_1 << m_2$인 경우, $v_{1f} \cong -v_{1i}$ $v_{2f} \cong 0$

ex) 동전, 당구공, 핵발전소의 감속제

☆ 예제 9.4 잘 튀는 공 장치 (뉴턴의 요람)

- 1을 당겼다 놓으면, 5가 같은 속력으로 튕긴다.
- 1,2를 당겼다 놓으면, 4,5가 같은 속력으로 튕긴다.
- 1을 당겨서 속력 *v*로 충돌시키면,
  4,5가 *v*/2의 속력으로 튕길까?



풀이 탄성충돌 이므로 :

p −보존 : $p_i = mv$

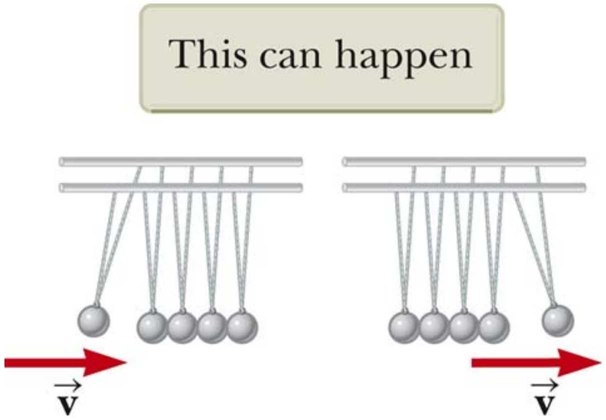
$$p_f = m\frac{v}{2} + m\frac{v}{2} = mv$$ ∴ p −보존 성립

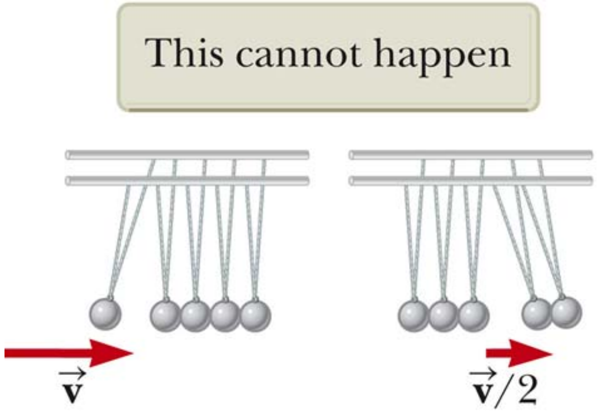
E −보존 : $E_i = \frac{1}{2}mv^2$

$$E_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

∴ E −보존 성립 X

→ 4,5는 *v*/2의 속력으로 튕기지 않는다





cf) 4,5가 붙은 경우의 탄성 충돌

p −보존 : $p_i = m_1 v_i = mv$

$$p_f = m_1 v_f + m_{4,5} v_{4,5} = m v_f + 2m v_{4,5} \qquad \because\ m_{4,5} = m_4 + m_5 = m + m = 2m$$

E −보존 : $E_i = \frac{1}{2} m_1 v_i^2 = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_{4,5} v_{4,5}^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2}(2m) v_{4,5}^2$$

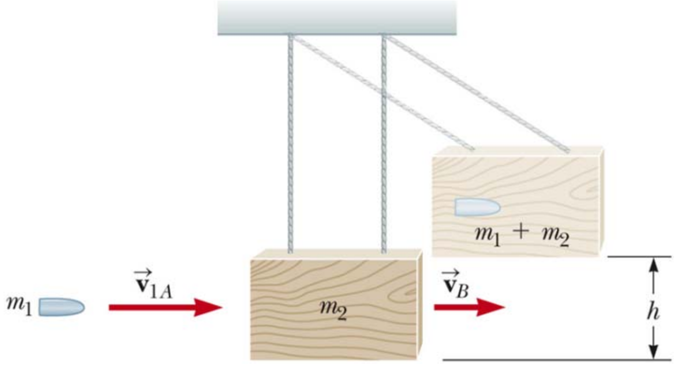
⇨ $v_f = -\frac{1}{3} v \qquad v_{4,5} = \frac{2}{3} v$

$\therefore$ m_1 은 $m_{4,5}$ 의 2배의 속력으로 되튄다.

예제 9.6 탄동진자 (Ballistic Pendulum)

– 총알과 같은 고속 투사체의 속도 측정

질량이 m_1 인 총알이 가벼운 줄에 매달려 있는 질량이 m_2 인 커다란 나무 토막에 발사되었다. 총알이 나무 토막에 박힌 채로 높이 h 만큼 끌려 올라갔다. h 의 값을 측정하여 총알의 속력을 구하라.



풀이 완전 비탄성 충돌이므로 (1) $v_B = \dfrac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$

(2) $K_B = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

충돌 후, 에너지 보존 법칙을 적용하면

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

o 충돌전 : $P_i = mv$ $E_i = KE_i = \frac{1}{2} mv^2$

o 충돌(직)후 : $P_f = (m+M)v'$ $E_f = KE_f = \frac{1}{2}(m+M)v'^2$

o Momentum 보존 : $P = P_i = P_f$ $\Rightarrow$ $P \equiv mv = (m+M)v'$

$$\therefore \quad v' = \frac{mv}{m+M}$$

o 높이 h 에서의 탄동진자의 에너지 : $E_{tot} = PE = (m+M)gh$ $(\because PE = mgh)$

$$E_{tot} = E_f \quad \Rightarrow \quad E_f = \frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m+M}$$

$\therefore$ 탄환의 속도 v_1 : $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$, $cf)\ h = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$

$$\Delta KE = -\left((m+M)gh - \frac{1}{2}mv^2\right) = -(m+M)gh + \frac{1}{2}m\frac{(m+M)^2}{m^2}2gh$$

$$= \frac{(m+M)^2}{m}gh - (m+M)gh = (m+M)gh\left(\frac{m+M}{m} - 1\right) = \frac{(m+M)M}{m}gh$$

o v에 대한 에너지 손실 :

$$\Delta E = -(E_f - E_i) = -\left(\frac{1}{2}(m+M)v'^2 - \frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m+M-m}{m+M}\right) = \frac{mM}{2(m+M)}v^2$$

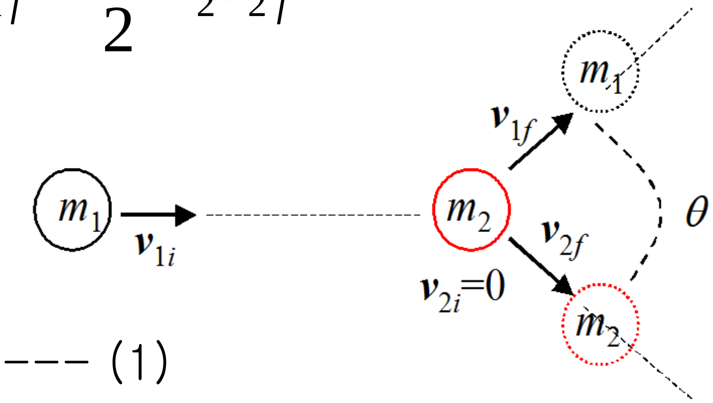
9.5 이차원 충돌
(Collisions in Two Dimension)

◎ 2차원에서의 (완전 탄성) 충돌 (Perfectly Elastic Collision)

p-보존 : $$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

E-보존 : $$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

Aside *Ex*) 공기 테이블의 퍽 또는
당구공에서의 완전 탄성 충돌



- $m_1 = m_2$, $v_{2i}=0$ 인 경우의 충돌각 ?

- *p*-보존에서 : $\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$ --- (1)

- *E*-보존에서 : $v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$ --- (2)

(1) 에서 $$v_{1i}^2 = \vec{v}_{1i}\cdot\vec{v}_{1i} = \left(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}\right)\cdot\left(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}\right)$$

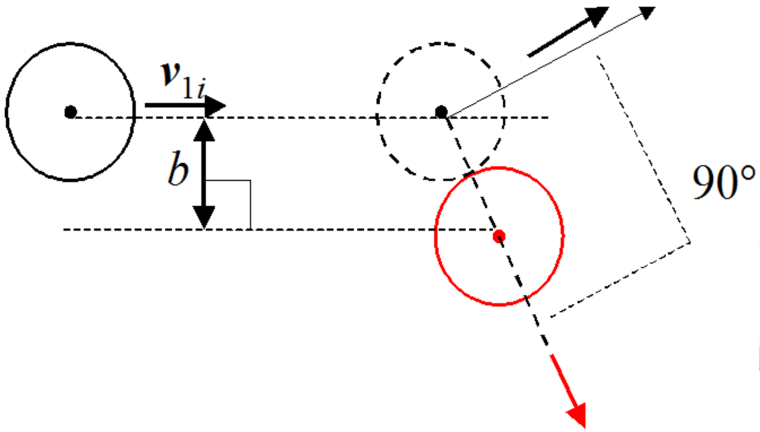
$$= v_{1f}^2 + 2\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f} + v_{2f}^2$$

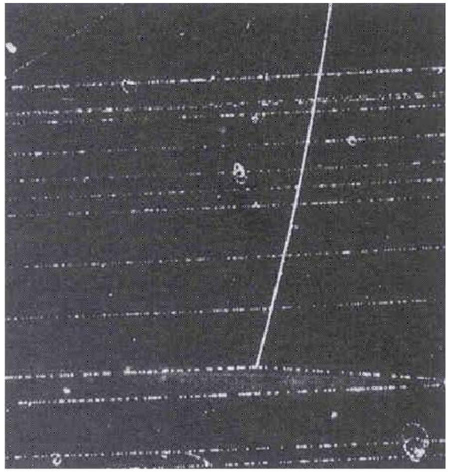
(2) 에서 $$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = v_{1f} v_{2f} \cos\theta = 0$$

Since $v_{1f} \neq 0$, $v_{2f} \neq 0$ $\quad \therefore \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90°$

– 질량이 같은 두 물체간의 완전 탄성 충돌시, 한 물질이 정지 상태에 있다면 충돌후 두 물체가 이루는 사이각은 항상 90°이다.





Proton-Proton Collision
in Liquid Hydrogen Bubble Chamber

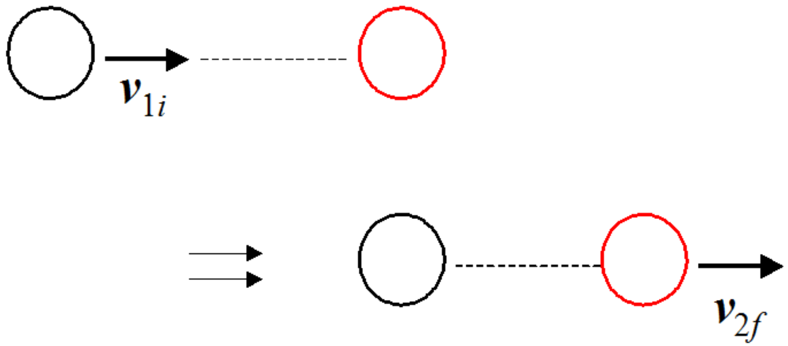
Aside) ◎ Impact Parameter (충돌 경수) b

- *Define*) 충돌에서의 수직 중심 거리

cf) 실제 당구공에서의 충돌을 살펴보면, 당구공은 점이 아니고 구이다.

1) Impact Parameter b=0 인 경우

- 구의 중심에 일치하게 충돌하는 경우 :
- 일차원 완전 탄성 충돌과 같은 결과
- $v_{2f} = v_{1i}$

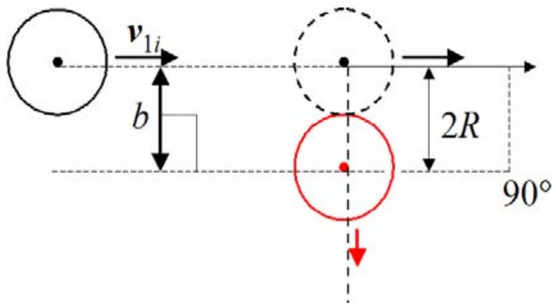


2) Impact Parameter : 0 < b < R 인 경우

- 2차원 탄성 충돌이 일어난다
- 두 공사이의 사이각은 항상 90°이다.

3) Impact Parameter b≒2R 인 경우

- 2차원 탄성 충돌이 일어난다
- 두 공사이의 사이각은 90°이다.



9.5 이차원 충돌 2 (Collisions in Two Dimension 2)

이차원 충돌 과정에서도 운동량은 보존되므로

$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

– 성분 분해 : $m_1v_{1ix} + m_2v_{2ix} = m_1v_{1fx} + m_2v_{2fx}$

$$m_1v_{1iy} + m_2v_{2iy} = m_1v_{1fy} + m_2v_{2fy}$$

– 오른쪽 그림처럼 m_2가 정지해있는 경우

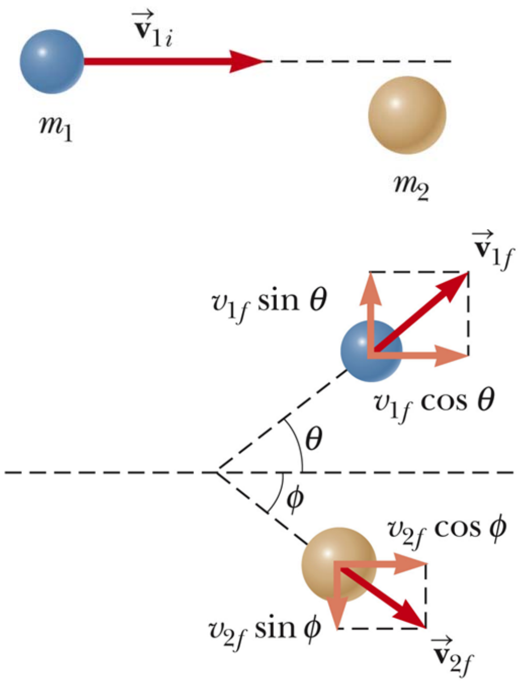
$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f}\cos\theta + m_2v_{2f}\cos\phi$$

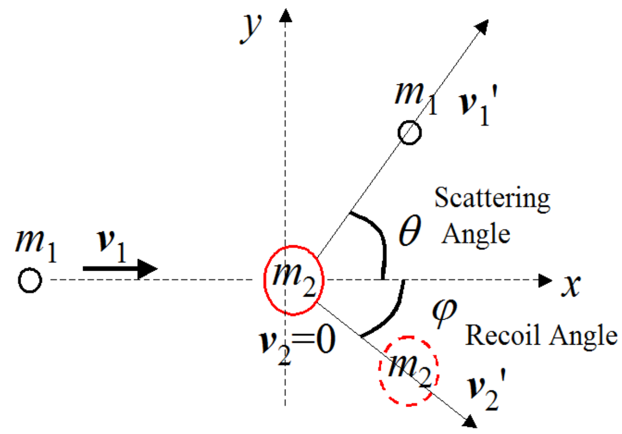
$$0 = m_1v_{1f}\sin\theta - m_2v_{2f}\sin\phi$$

– 탄성충돌 경우는 운동에너지가 보존되므로

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

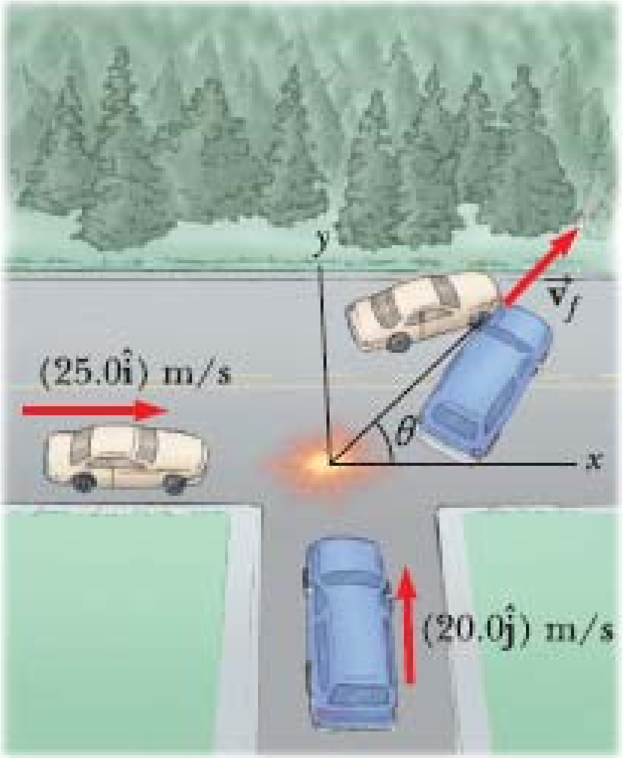
– 위의 연립 방정식을 푼다





☆ 예제 9.7 교차로에서의 충돌

1500kg의 승용차가 25.0m/s의 속력으로 동쪽으로 달리다가 북쪽으로 20.0m/s의 속력으로 달리는 2500kg의 밴과 교차로에서 충돌하였다. 충돌 후 잔해물의 방향과 속도에 대한 크기를 구하라. 두 대의 자동차는 충돌 후에 서로 붙어 있다고 가정한다.



풀이

car : m_c =1500㎏, v_c = 25m/s$\boldsymbol{i}$

ban : m_b =2500㎏, v_b = 20m/s$\boldsymbol{j}$

완전비탄성충돌 이므로 충돌 후 두 차가 붙는다

p −보존 :
$$\vec{p}_i = \vec{p}_{c_i} + \vec{p}_{b_i} = \left(p_{c_{ix}} + 0\right)\hat{x} + \left(0 + p_{b_{iy}}\right)\hat{y} = m_c v_c \hat{x} + m_b v_b \hat{y}$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{cb} = p_{cb_x}\hat{x} + p_{cb_y}\hat{y} = (m_c + m_b)v_f \cos\theta\,\hat{x} + (m_c + m_b)v_f \sin\theta\,\hat{y}$$

⇨ $$m_c v_c = (m_c + m_b)v_f \cos\theta \qquad m_b v_b = (m_c + m_b)v_f \sin\theta$$

$$v_f \cos\theta = \frac{m_c v_c}{m_c + m_b} = \frac{1500\text{kg} \times 25\text{m/s}}{1500\text{kg} + 2500\text{kg}} = \frac{3.75 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}}{4000\text{kg}}$$

$$v_f \sin\theta = \frac{m_b v_b}{m_c + m_b} = \frac{2500\text{kg} \times 20\text{m/s}}{1500\text{kg} + 2500\text{kg}} = \frac{5 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}}{4000\text{kg}}$$

$$\frac{v_f \sin\theta}{v_f \cos\theta} = \tan\theta = \frac{5 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} \big/ 4000\text{kg}}{3.75 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} \big/ 4000\text{kg}} = 1.33$$

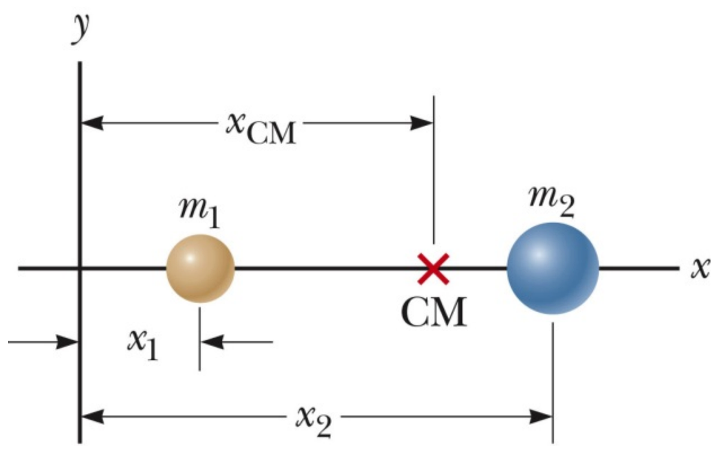
$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 53.1°}$$

$$v_f == \frac{5 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}}{4000\text{kg} \times \sin 53.1°} = \boxed{15.6\,\text{m/s}}$$

9.6 질량 중심
(The Center of Mass)

질량 중심은 둘 이상의 입자로 이루어진 계를 다시 하나의 입자로 다룰 수 있도록 해준다. 두 입자로 이루어진 계의 경우

$$x_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



여러 개의 입자로 이루어진 3차원 계의 경우

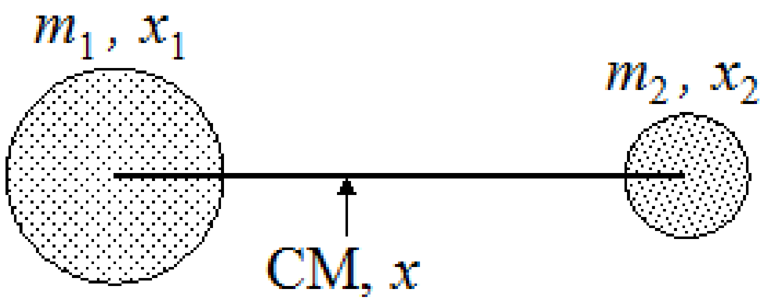
$$x_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

◎ 질량 중심 (CM : Center of Mass)

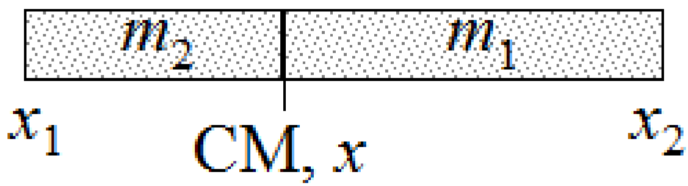
- 정의 : 2개 질점에서의 질량 중심

$$X_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

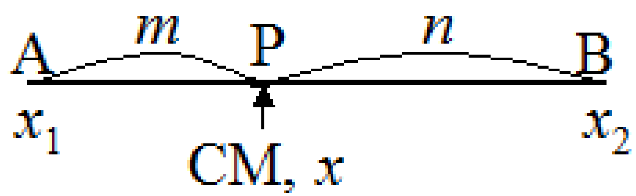


- 질량들을 하나의 막대로 연결하였다고 하면, CM에 대한 질량의 비 : $m_2 : m_1 = m : n$

$(\ m=m_2,\quad n=m_1)$



- 선분 AB를 $m : n$으로 내분점의 위치와 같다



$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$

$$(x-x_1) : (x_2-x) = m : n$$

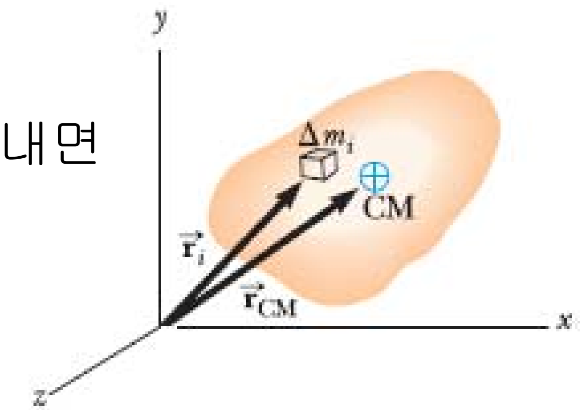
$$m(x_2-x)=n(x-x_1)$$

$$mx_2-mx=nx-nx_1$$

$$mx_2+nx_1=(m+n)x$$

$$\therefore\quad x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

$$y_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \qquad z_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$



질량 중심을 가리키는 위치 벡터를 $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$으로 나타내면

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i \qquad (\mathbf{r}_{\mathrm{i}} \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}})$$

질량의 분포가 연속적인 경우, 질량 요소들에 의한 합으로 표현하면

$$x_{\mathrm{CM}} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i \Delta m_i$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i \Delta m_i = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm}$$

대칭성을 갖고 있는 물체의 질량 중심은

대칭축과 대칭면 위에 놓인다.

크기가 있는 물체는 질량이 연속으로 분포되어

있어서 각각의 작은 질량 요소에 중력이 작용한

다. 이들 힘의 알짜 효과는

무게 중심(center of gravity)이라 하는 <u>한 점에</u>

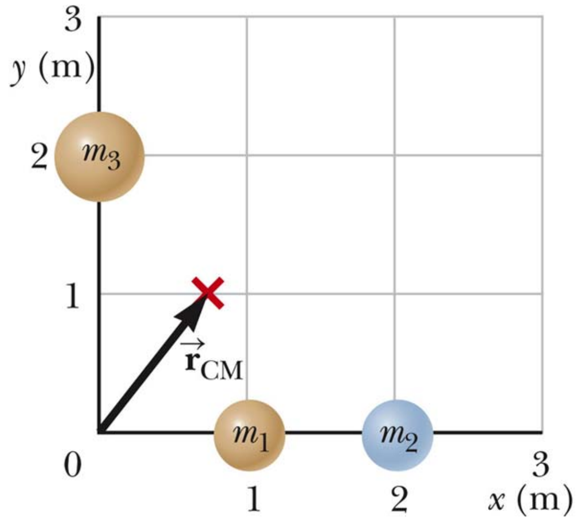
<u>작용하는 단일 힘 Mg 의 효과와 같다.</u>

g 가 위치에 무관하게 일정하다면, **중력 중심은 질량 중심과 일치한다.**

☆ **예제 9.8** 세 입자의 질량 중심

계는 그림과 같이 위치하는 세 입자로 이루어져 있다. 계의 질량 중심을 구하라.

풀이 질량 중심의 정의로부터



$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{kg})(1.0\text{m}) + (1.0\text{kg})(2.0\text{m}) + (2.0\text{kg})(0)}{1.0\text{kg} + 1.0\text{kg} + 2.0\text{kg}}$$

$$= \frac{3.0\text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{kg}} = 0.75\text{m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\text{kg})(0) + (1.0\text{kg})(0) + (2.0\text{kg})(2.0\text{m})}{4.0\text{kg}}$$

$$= \frac{4.0\text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\text{kg}} = 1.0\text{m}$$

$$\mathbf{r}_{CM} \equiv x_{CM}\,\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\text{m}$$

예제 9.9 막대의 질량 중심

(A) 질량이 *M*이고, 길이가 *L*인 막대의 질량 중심은 양 끝 사이의 중간에 있음을 보여라. 단, 막대의 단위 길이당 질량이 균일하다고 가정한다.

풀이

- 막대를 x–축상에 놓는다 (대칭성에 의해 y, z 방향은 무시)

- 선밀도 λ : 단위 길이당 질량 → $\lambda = \dfrac{M}{L} = \dfrac{\Delta m}{\Delta l} = \dfrac{dm}{dl} = \dfrac{dm}{dx}$

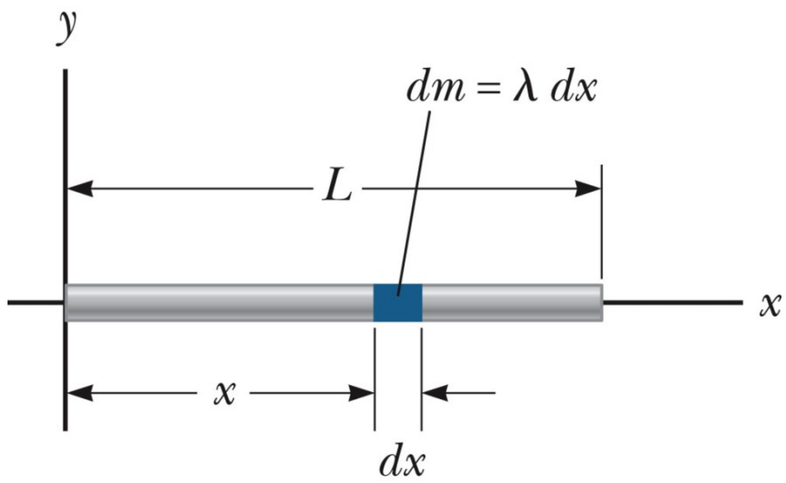
- 질량소 (미세 질량) : $dm = \lambda dl$

→ x–축상의 막대 : $dl \Rightarrow dx$

연속적인 질량 분포의 경우이므로

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \boxed{\frac{L}{2}}$$



- 질량중심은 막대의 중앙에 놓인다.
- 강체에 작용하는 중력 : 질량중심에 작용하는 하나의 힘 = Mg

  cf) 대칭성이 있는 물체 : 질량중심은 대칭축 상에 놓인다

  cf) 이 경우 막대의 중심을 원점에 놓으면, $X_{CM}=0$

  → 원점 또는 중심이 된다

(B) 만일 막대가 균일하지 않아서 단위 길이당 질량이 $\lambda=\alpha x$ (α는 상수)로 변할 때,

질량 중심의 x 좌표를 L 값으로 구하라.

- $\lambda=\alpha x$ → $dm = \lambda dx = \alpha x dx$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x dx = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\, dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2} \text{이므로}$$

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \boxed{\frac{2}{3}L}$$

9.7 다입자계
(Systems of Many Particles)

입자계의 질량 M 이 일정한 경우 계의 질량 중심의 속도는

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

$$\therefore M\mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{tot}$$

(계의 선운동량은 전체 질량에 질량 중심의 속도를 곱한 것과 같다)

계의 질량 중심의 가속도는

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{a}_i$$

$$M\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

계의 어떤 입자에 작용하는 힘은 외력(계의 외부로부터)과 내력(계의 내부로부터)을 둘 다 포함할 수 있다. 그러나 뉴턴의 제3법칙에 의하면 내력은 쌍으로 서로 상쇄되어 계에 작용하는 알짜힘은 단지 외력에 의한 것 뿐이다

$$\therefore \sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM}$$

알짜 외력을 받아 운동하는 전체 질량 *M* 인 계의 질량 중심의 궤적은 같은 힘을 받는 질량 *M* 인 입자 한 개의 궤적과 동일하다.

계에 작용하는 알짜 외력이 0 이면

$$M\mathbf{a}_{CM} = M\frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = 0$$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_{tot} = \text{상수} \qquad \left(\sum \mathbf{F}_{ext} = 0\text{일 때}\right)$$

입자계에 작용하는 알짜 외력이 없다면 입자계의 전체 선운동량은 보존된다. : "운동량 보존" Momentum Conservation !

예제 9.10 로켓의 폭발

로켓이 수직으로 발사되어 고도 1000m, 속력 300 m/s에 도달했을 때 같은 질량을 갖는 세 조각으로 폭발하였다. 폭발 후에 한 조각이 450 m/s의 속력으로 위쪽으로 움직이고, 다른 한 조각은 폭발후 동쪽으로 240 m/s의 속력으로 움직인다면, 폭발 직후 세 번째 조각의 속도를 구하라.

풀이

폭발 전후의 운동량을 표현하면

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{v}_i = M(300\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s})$$

$$\mathbf{P}_f = \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\,\text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}) + \frac{M}{3}\mathbf{v}_f$$

$$\frac{M}{3}\mathbf{v}_f + \frac{M}{3}(240\hat{\mathbf{i}}\,\text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s})$$
$$= M(300\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s})$$

$$\mathbf{v}_f = \boxed{(-240\hat{\mathbf{i}} + 450\hat{\mathbf{j}})\text{m/s}}$$

cf) 폭발 (3초)후 땅에 대한 CM의 위치는?

- CM은 폭발전의 운동을 유지한다

$$Y_{CM} = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 1000\,m + 300\,{}^{m}\!/_{\sec} \times 3\sec + \frac{1}{2} \times 9.8\,{}^{m}\!/_{\sec^2} \times (3\sec)^2$$

$$\approx 1856\,m$$

cf) 포탄이 공중 폭발하는 경우

→ 각 조각들의 CM은 계속 포물선 운동을 따른다.

Aside) ◎ 무게중심, 중력중심

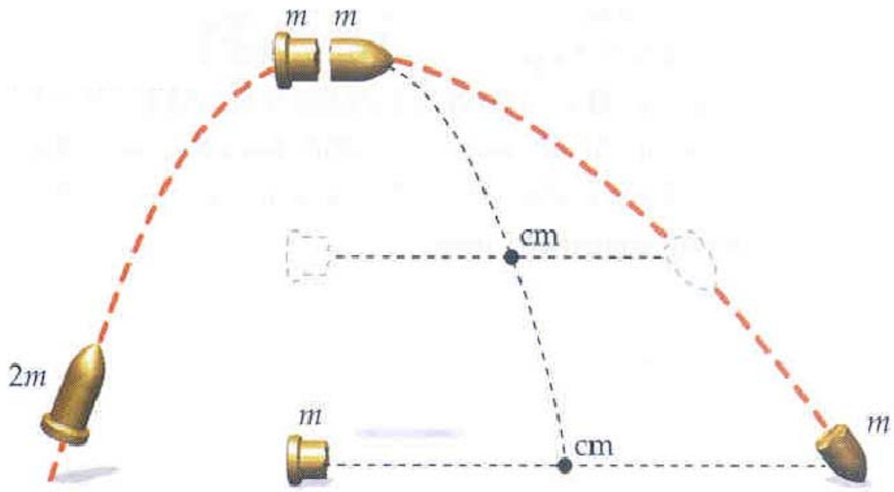
(cg, Center of Gravity)

o 물체의 높이가 매우 높지 않을 경우

→ 중력 가속도 g = const.

⇒ 외력은 CM에 작용한다

∴ cg = CM, $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$



9.9 로켓의 추진력 (Rocket Propulsion)

- 연료를 태워 밖으로 내뿜을때의 반작용으로 추진(Thrust)
- 연료의 소모에 따른 연료의 질량 감소 → Rocket 전체의 질량 감소
- Rocket의 질량 = Rocket 자체의 질량 + 연료의 질량 = $M + \Delta m$
- Rocket의 운동량 (Δm의 연료 사용시) ⇒ $(M + \Delta m)v$
- t초 동안 Δm 의 연료를 분사하여 Δv 의 속도를 얻는다면

→ Rocket의 속도 : $v + \Delta v$

로켓의 작동 원리는 로켓과 분사된 연료로 구성된 입자계의 선운동량 보존 법칙에 의존한다.

우주 공간에서의 추진을 고려해보자.

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

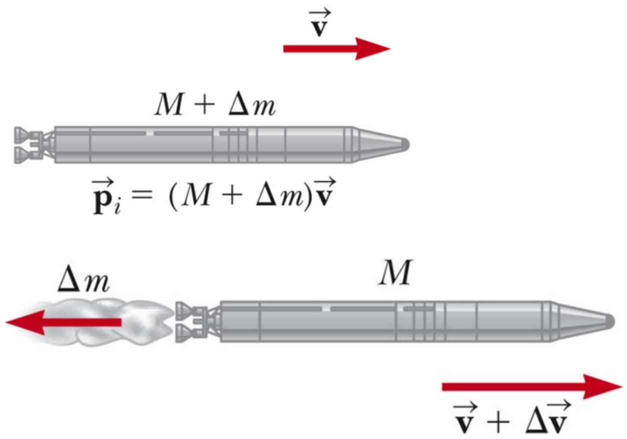
(Δm 의 연료 사용 → M : Rocket 자체의 질량,
Δv 의 속도 증가, 연료의 방출 속도 v_e)

$$\therefore M\Delta v = v_e \Delta m$$

Rocket이 얻는 운동량 = 연료의 방출에 의한 운동량

o Rocket 추진의 일반화 :

Rocket 의 전체 질량을 *M*으로 생각!



분사된 질량의 증가 *dm* 은 로켓의 질량이 감소한 것과 같으므로 *dm* = −*dM* 이다. *dM* 은 질량의 감소를 나타내므로 음이다. 그래서 −*dM* 은 양수이다.

$$Mdv = v_e dm = -v_e dM$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = v_e \ln M \Big|_{M_i}^{M_f} = -v_e \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right) = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$ (이때 $M_i > M_f$)

– 추진력 (Thrust) : $$F_T = M\frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

cf) 중력의 영향 고려 :

– 중력 : $F_{ext} = -mg$ 를 윗식에 추가하면 된다

예제 9.12 우주 공간에서의 로켓

우주공간에서 로켓이 지구에 대해 3.0×10^3m/s의 속력으로 날고 있다. 엔진을 켜서 로켓의 운동과 반대 방향으로 로켓에 대해 5.0×10^3m/s의 상대 속력으로 연료를 분사한다.
(A) 로켓의 질량이 점화하기 전 질량의 반이 되었을 때, 지구에 대한 로켓의 속력은 얼마인가?

풀이

$$v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

$$= 3.0\times10^3\,\mathrm{m/s} + (5.0\times10^3\,\mathrm{m/s})\ln\left(\frac{M_i}{0.5M_i}\right)$$

$$= \boxed{6.5\times10^3\,\mathrm{m/s}}$$

(B) 로켓이 50 kg/s의 비율로 연료를 연소하면 로켓에 가해지는 추진력은 얼마인가?

$$\text{추진력} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| = (5.0\times10^3\,\mathrm{m/s})(50\mathrm{kg/s})$$

$$= \boxed{2.5\times10^5\,\mathrm{N}}$$