25장. 전위
(Electric Potential)

25.1 전위와 전위차
(Electric Potential and Potential Difference)

<u>정전기력</u>은 **<u>보존력</u>**이므로 **<u>위치 에너지</u>**를 정의할 수 있다.

$$\therefore \Delta U = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad \left(W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U\right)$$

또 이 선 적분은 *A*와 *B* 사이의 경로에 무관하다.

시험 전하(q_0)를 전기장 내의 어떤 위치에 놓으면 이 전하와 전기장에 의한 위치 에너지(U)가 생기며 이 때 그 점에서의 **<u>전위</u>** (전기 퍼텐셜: electric potential) V는 다음과 같이 정의한다. (전기장의 정의와 비교!)

$$V = \frac{U}{q_0}$$

(단위: J/C = V) (정의)

이 시험 전하가 *A* 점에서 *B* 점으로 이동하면 위치 에너지가 변하게 되며 이 때 두 점 사이의 **<u>전위차</u>**(potential difference) $\triangle V = V_B - V_A$는 다음과 같다.

$$\therefore \Delta V = V_B - V_A \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

(정의)

점 A와 B 사이의 전위차는 전기장을 만드는 원천 전하의 분포에만 의존한다. 반면에 위치 에너지 차이는 시험 전하가 두 지점 사이를 움직일 때만 존재한다.

외력이 작용하여 전하 q가 전기장 내에서 등속도(운동에너지 변화 없이)로 움직이는 과정에서 외력이 한 일은 위치 에너지를 변화시키는 일을 한 것이다.

$$\therefore W = \Delta U = q\Delta V$$

또, 전기장의 SI 단위(N/C)는 단위 길이당의 전압으로 표현할 수도 있다.

$$1\,N/C = 1V/m \qquad (\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}_e}{q_0}) \qquad (\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s})$$

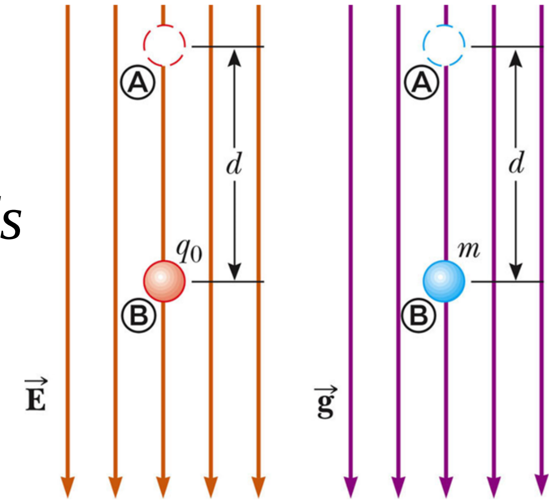
전기장은 위치에 따라 전위가 변화하는 비율의 척도라고 해석할 수도 있다.

전자 볼트(electron volt: eV): 1 전자 볼트는 전자(또는 양성자) 한 개가 1V의 전위차 내에서 가속될 때 얻거나 또는 잃게되는 에너지이다.

$$\therefore 1\,eV = 1.60\times10^{-19}\,C\cdot V = 1.60\times10^{-19}\,J$$

25.2 균일한 전기장에서의 전위차
(Potential Difference in a Uniform Electric Field)

-y 방향으로의 균일한 전기장을 가정해 보자.



$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B (E\cos 0°)ds = -\int_A^B Eds$$

$$\Delta V = -E\int_A^B ds = -Ed$$

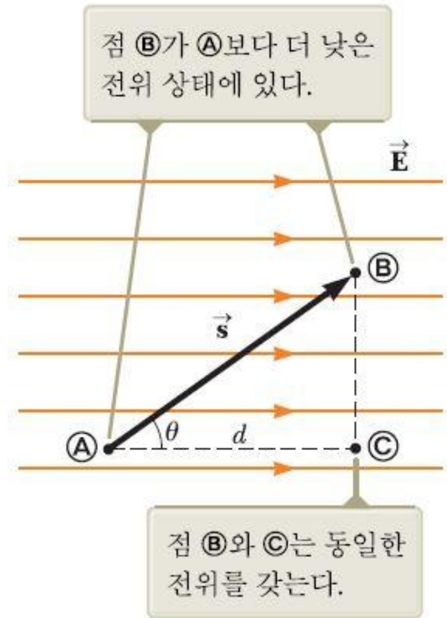
시험 전하 q_0가 A에서 B로 이동한다고 가정하자.
음(-)의 부호는 점 B의 전위가 점 A보다 낮다는 것을 의미한다.
전기력선은 항상 전위가 감소하는 방향으로 향한다.

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 Ed$$

즉, 양(+)전하가 전기장과 동일한 방향으로 이동할 때, 전하와 전기장으로 이루어진 계는 전기 위치 에너지를 잃게 된다.
전기장이 양(+)전하에 일을 한다는 것을 뜻한다.

음(-) 전하가 전기장의 방향으로 이동할 때,
음전하와 전기장으로 이루어진 계는 전기 위치 에너지를 얻게 된다.

일반적인 경우로서, **균일한 전기장** 내에서 벡터 **s**가 전기력선에 평행하지 않은 점 *A*와 *B* 사이로 이동하는 대전 입자를 생각해 보자.

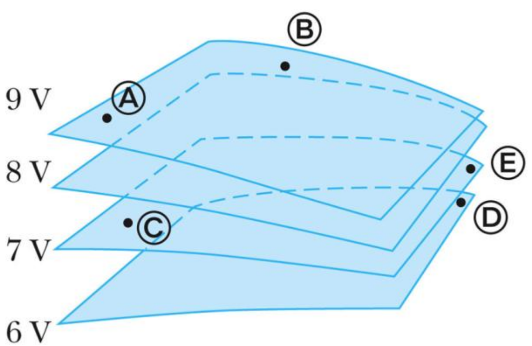


$$\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot\int_A^B d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}$$

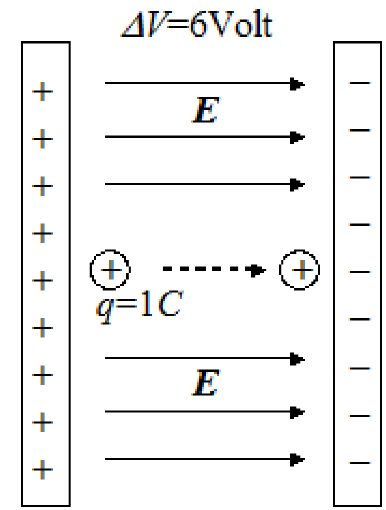
$$\Delta U = q_0\Delta V = -q_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}$$

위의 식으로부터, 균일한 전기장 내에서 전기장과 수직(사이 각 90°)인 면에 있는 모든 점의 전위는 같다.

전위가 같은 일련의 점들로 이루어진 면을 등전위면 (equipotential surface) 이라고 한다. 균일한 전기장 속의 등전위면은 전기장에 수직인 평면들이다.



예제 25.1 대치 전위차 6Volt의 의미

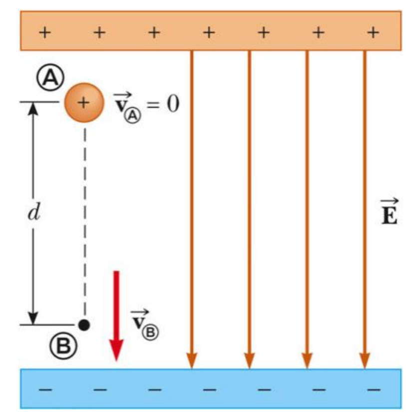


- Test Charge q = $1C$ 이 $6V$ 의 전위차 내에 있다면,
  $\Delta U = 1C \times 6V = 6VC = 6J$ 의 PE를 가진다.

- Test Charge q = $2C$ 이 $6V$ 의 전위차 내에 있다면,
  $\Delta U = 2C \times 6V = 12J$ 의 PE를 가진다.

☆ 예제 25.2 균일한 전기장 내에서 양성자의 운동

양성자가 8.0 × 10^4V/m 의 균일한 전기장 내에서 정지 상태로부터 놓았다. 양성자가 점 A에서 B까지 **E**의 방향으로 *d=0.50m* 만큼 이동한다. 양성자가 *0.50m*의 거리를 이동한 후의 속력을 구하라.



풀이

$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \times 10^4 V/m)(0.50m)$$

$$= -4.0 \times 10^4 V$$

$\Delta K + \Delta U = 0$ (역학적 에너지 보존)이므로

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + e\Delta V = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{-2e\Delta V}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{-2(1.6 \times 10^{-19}C)(-4.0 \times 10^4 V)}{1.67 \times 10^{-27} kg}}$$

$$= 2.8 \times 10^6 m/s$$

예제 25.2 보충	TV의 음극관

전자 1개가 3000 *V*로 가속되었다면,

- 전자의 *PE* 변화 : (q_e=-1.6x10^{-19} *C*)

$$\Delta U = q_e V = -1.6 \times 10^{-19} C \times 3000\,V = -4.8 \times 10^{-16} J$$

"-" sign : 음극관에 전자에 해준 일

- 전자의 속도 : (m_e =9.1x10^{-31} *Kg*)

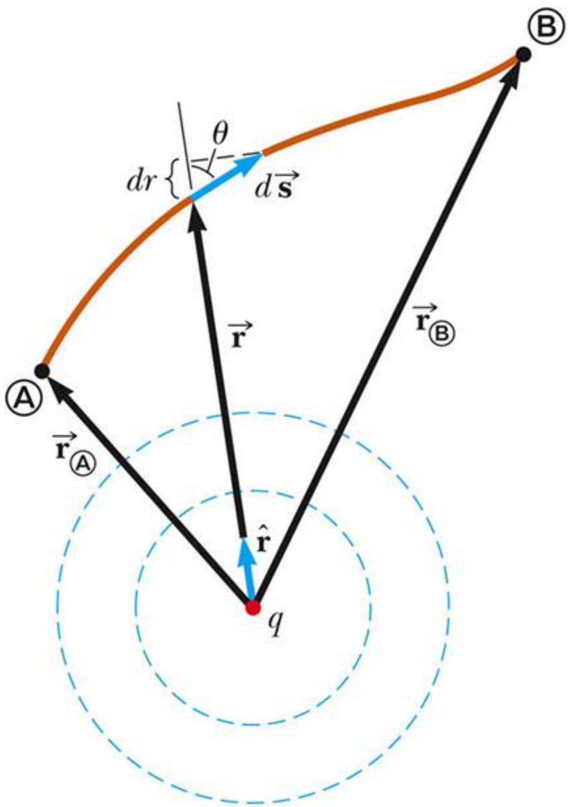
$$W = -\Delta U = 4.8 \times 10^{-16} J \Rightarrow \Delta KE = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta KE}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 4.8 \times 10^{-16}}{9.1 \times 10^{-31}}} \approx 3.25 \times 10^{7} m/\sec$$

cf) 빛의 속도 *c* =3x10^8 *m/s*

25.3 점 전하에 의한 전위와 위치 에너지

(Electric Potential and Potential Energy Due to Point Charges)



점 전하 q로부터 거리 r 만큼 떨어진 지점의 전위를 구하려면, 전위차에 대한 일반적인 식을 이용해야 한다.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = k_e \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= k_e \frac{q}{r^2} ds\cos\theta = k_e \frac{q}{r^2} dr$$

$$V_B - V_A = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{k_e q}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$V_B - V_A = k_e q\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

적분 결과는 A 와 B 점 사이의 경로에 무관하다.
이 적분은 전기장이 한 일이며 전기력은 보존력이다.
보존력과 관계가 있는 장을 보존력장(conservative field)이라 정의한다.
일반적으로 출발점인 무한대 위치에서의 전위가 0이 되도록 기준점을 정의한다.

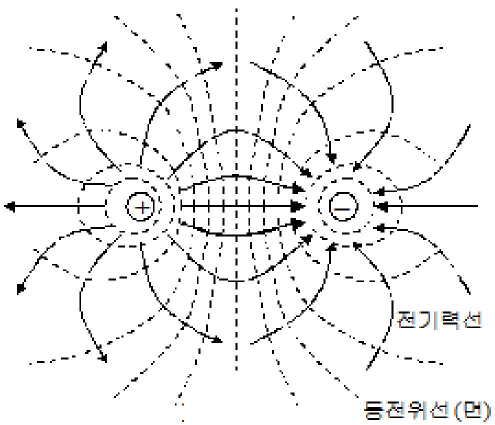
$$\boxed{V = k_e \frac{q}{r}}$$

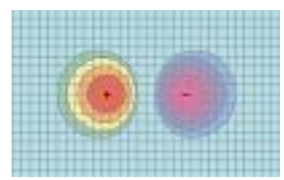
◀ 단일 점전하에 의한 전위

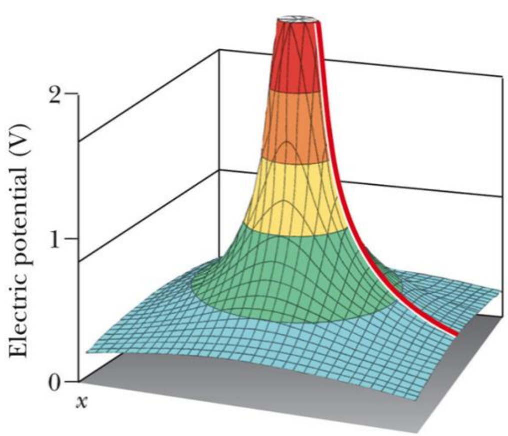
$$\therefore V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

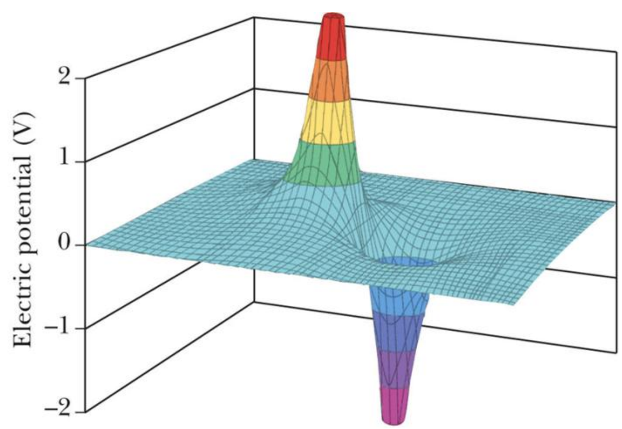
◀ 점전하 군에 의한 전위

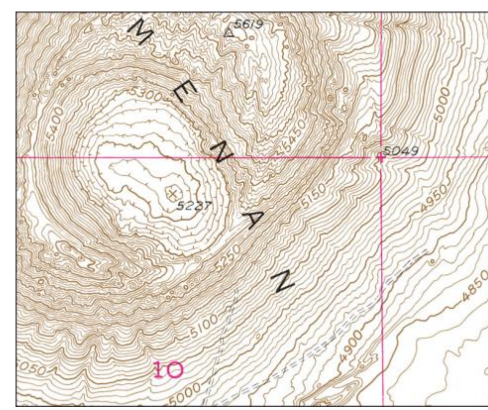
cf) 등전위선 : p13 참고





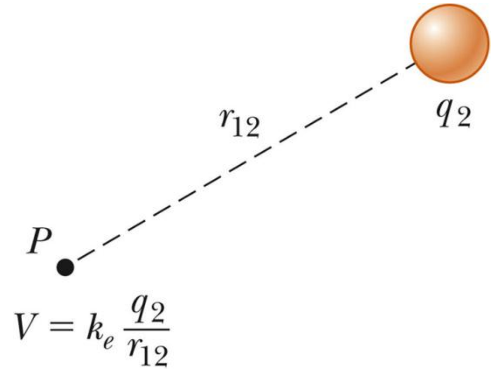


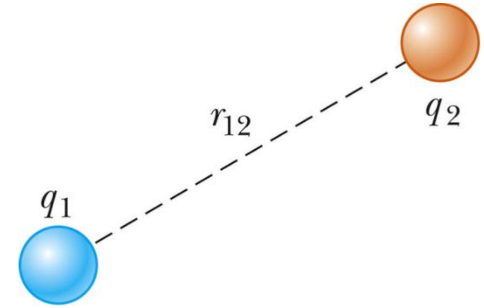




- 점 P 에서 q_2에 의한 **전위**는

$$V = k_e \frac{q_2}{r_{12}}$$





- 두 번째 전하 q_1을 가속도 없이 무한대(전위 0)에서 점 P까지 가져오는 데 필요한 일은 q_1V_2이다. ($W = \Delta U = q\,\Delta V$) (무한대에서의 전위 0)

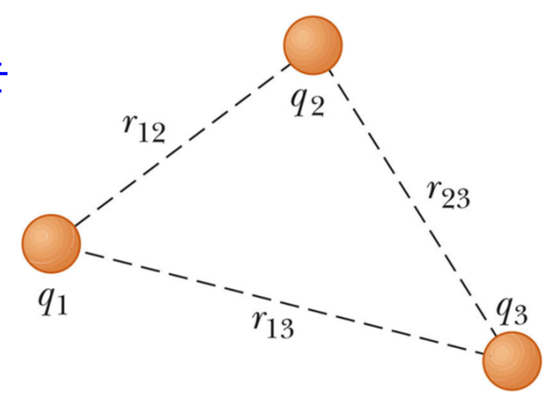
$$\therefore U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

; **계의 위치 에너지**

만일 두 전하의 부호가 같으면, U 는 양(+)의 값이 된다.
이것은 같은 부호의 전하끼리는 반발한다는 사실에 기인하며,
두 전하를 가까이 가져다 놓기 위해서는 양(+)의 일을 해 주어야 한다는 의미이다.

- 셋 이상의 점 전하로 이루어진 계의 전체 위치 에너지는 각 전하 쌍의 U 를 계산하여 대수적으로 합한 값이다.

$$U = k_e\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$



예제 25.3 두 점 전하에 의한 전위

$q_1=2.00nC$의 점 전하가 원점에 놓여 있고, $q_2=-6.00nC$의 전하가 y축 위의 $(0,\ 3.00)m$에 놓여 있다.
(A) 좌표가 (4.00, 0)m인 점 P에서 이 들 두 전하에 의한 전체 전위를 구하라.
(B) $q_3=3.00nC$의 전하를 무한대에서 점 P까지 가져옴에 따라 세 전하로 이루어지는 계의 전체 위치 에너지 변화를 구하라.

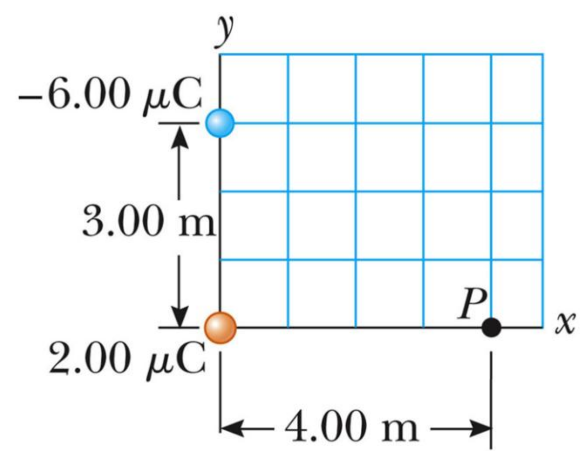
풀이

(A)

$$V_p = k_e\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$V_p = (8.99\times10^9\,N\cdot m^2/c^2)\left(\frac{2.00\times10^{-6}C}{4.00m}-\frac{6.00\times10^{-6}C}{5.00m}\right)$$

$$= -6.29\times10^3 V$$



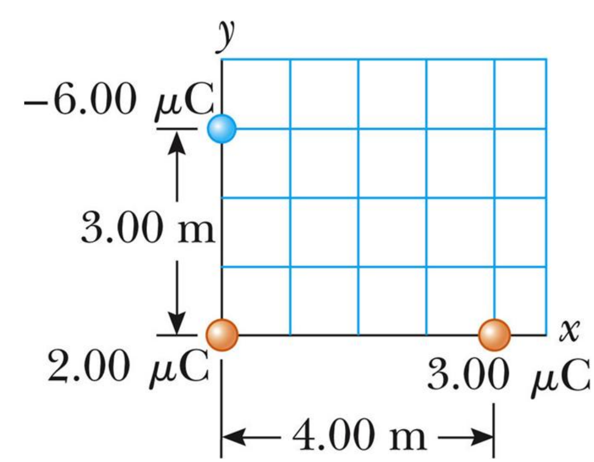
(B)

$$U_f = q_3 V_p$$

$$\Delta U = U_f - U_i = q_3 V_p - 0$$

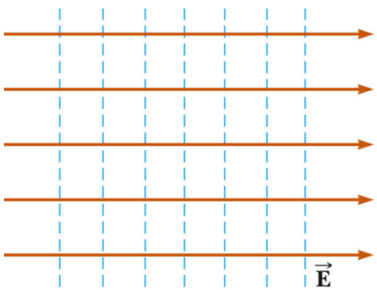
$$= (3.00\times10^{-6}C)(-6.29\times10^3 V)$$

$$= -1.89\times10^{-2} J$$

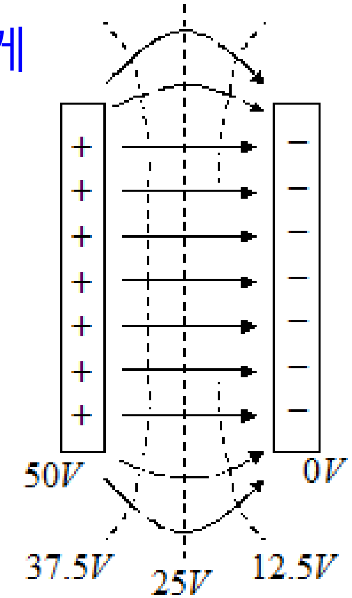


25.4 전위로부터 전기장의 계산

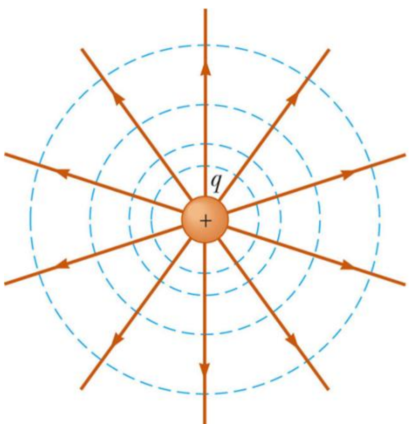
(Obtaining the Value of the Electric Field from the Electric Potential)



어떤 영역에서 전위를 알고 있을 때 전기장을 어떻게 계산할 수 있는지에 대해 알아보자.



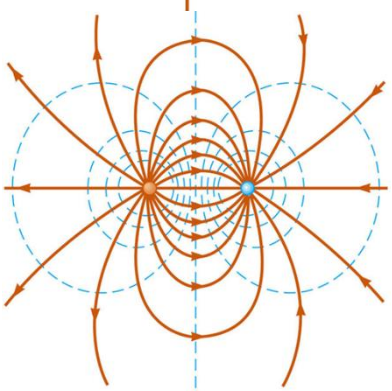
$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad \left(\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}\right)$$



1차원의 경우, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E_x dx$ 이므로

$$\boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}}$$

o 등전위선(면) (Equipotential Line (Surface))



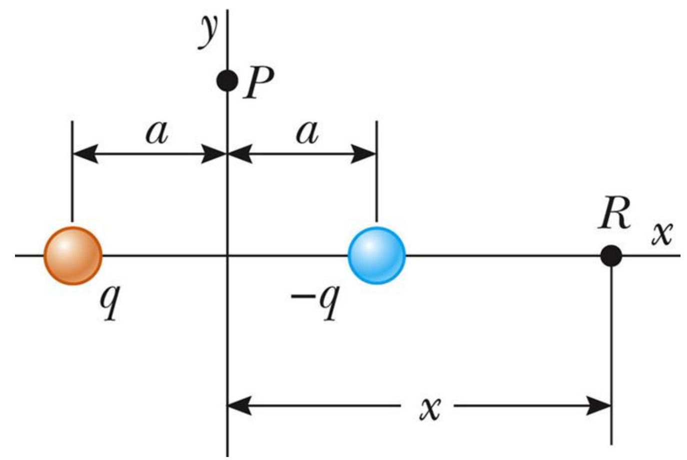
- 시험 전하가 등전위면을 따라 ***ds*** 만큼 이동할 때,
  전위는 등전위면을 따라 일정하기 때문에 *dV=0* 이다.
  이때는 *dV=-**E·ds=0***이 된다.
- 전기장 ***E*** 는 등전위면을 따르는 변위에 수직이어야 한다.
- 등전위면은 등전위면을 지나가는 전기력선에 항상
  수직이어야 함을 의미한다.

일반적으로, 전위는 세 개의 공간 좌표들의 함수이다. 전위 V가 직교 좌표계로 주어진다면, 전기장 성분 E_x, E_y, E_z는 편미분에 의해 $V(x, y, z)$로부터 구할 수 있다.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

☆ 예제 25.4 쌍극자에 의한 전위

전기 쌍극자는 $2a$의 거리만큼 떨어져 있는, 전하의 크기는 같고 부호가 반대인 두 개의 전하로 이루어져 있다. 이 쌍극자는 x축 상에 있고, 그 중심은 원점에 있다.
(A) y축 상의 점 P에서의 전위를 구하라.
(B) $+x$축 상의 점 R에서의 전위를 구하라.
(C) 쌍극자로부터 멀리 떨어져있는 곳에서의 V와 E_x를 구하라.



풀이

(A) $$V_p = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left[\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2+y^2}} \right] = 0$$

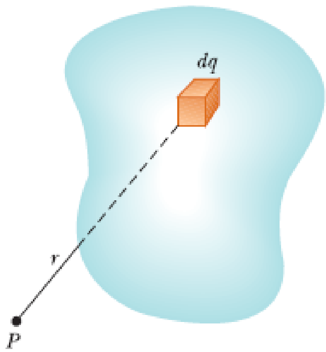
(B) $$V_R = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{-q}{x-a} + \frac{q}{x+a} \right) = -\frac{2k_e qa}{x^2-a^2}$$

(C) $$V_R = \lim_{x \rangle\rangle a} \left(-\frac{2k_e qa}{x^2-a^2} \right) \approx -\frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x \rangle\rangle a)$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{2k_e qa}{x^2} \right) = 2k_e qa \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{4k_e qa}{x^2} \quad (x \rangle\rangle a)$$

25.5 연속적인 전위 분포에 의한 전위

(Electric Potential Due to Continuous Charge Distributions)



미소 전하 dq를 마치 점 전하로 생각하여 연속적으로 분포되어 있는 전하에 의한 전위를 계산할 수 있다.

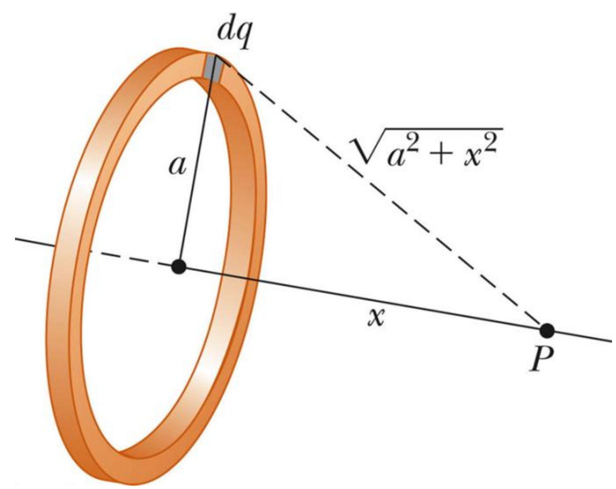
$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

☆ **예제 25.5** 균일하게 대전된 고리에 의한 전위

(A) 반지름이 a 인 고리에 전체 전하량 $+Q$ 가 고르게 분포하고 있을 때, 중심축 상의 한 점 P 에서의 전위를 구하라.

(B) 점 P 에서의 전기장의 크기를 구하라.



풀이 (A)

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\therefore\ V = \frac{k_e}{\sqrt{a^2+x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

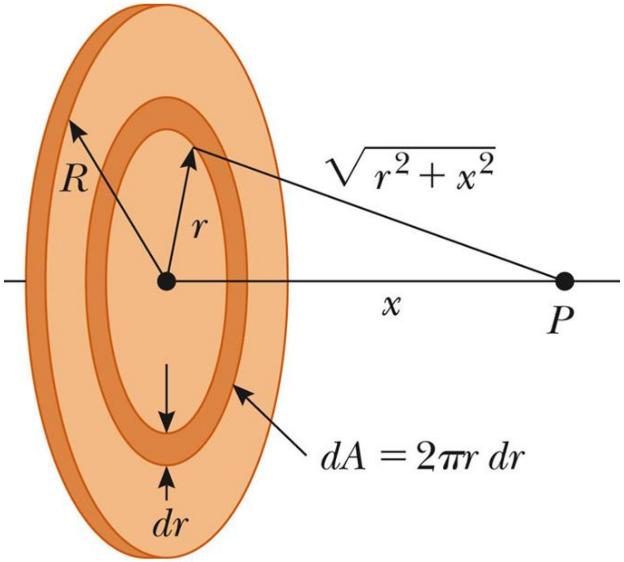
(∵ 고리는 두께를 고려하지 않는다)

(B) $$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx}(a_2 + x^2)^{-1/2}$$
$$= -k_e Q\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2 + x^2)^{-3/2}(2x)$$

$$E_x = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q$$

예제 25.6 균일하게 대전된 원반에 의한 전위

반지름이 R 이고 표면 전하 밀도가 σ인 균일하게 대전된 원반이 있다.
(A) 원반의 중심축 상의 한 점 P 에서의 전위를 구하라.
(B) 점 P 에서의 전기장의 x 성분을 구하라.



풀이 (A) $dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r\,dr) = 2\pi\sigma r\,dr$ 이므로

$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e 2\sigma\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = \pi k_e \sigma \int_0^R \frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$
$$= \pi k_e \sigma \int_0^R (r^2 + x^2)^{-1/2} 2r\,dr$$

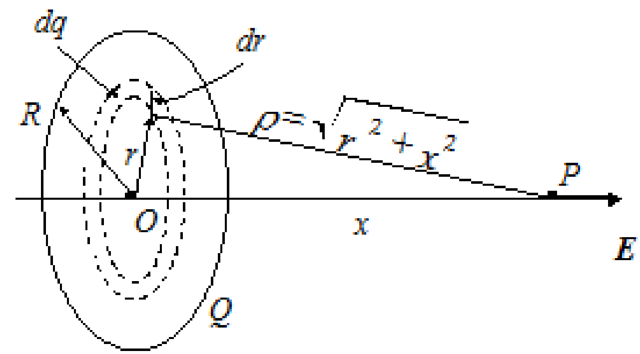
$$V = 2\pi k_e \sigma\left[(R^2 + x^2)^{1/2} - x\right]$$

(B) $$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma\left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right]$$

풀이 보충

◎ Charged Disk

- E-Potential by (Non-Conducting) Circular Disk :



- 반경 R인 평평한 원판에 전하 Q가 균일 분포
- 반경 r, 두께 dr인 Circular Ring을 고려한 후,

  0 ~ R 까지 적분

- 면적소 Ring 부분의 전하량 :

  $dA=2\pi r dr$ (원주 × 두께 dr)

  dA에 분포하는 전하량 dq

$$\frac{dq}{Q}=\frac{dA}{A}=\frac{2\pi r dr}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad dq=\frac{2rQ}{R^2}dr=\frac{Q}{R^2}d(r^2)$$

- E-Potential : Ring에서 중심위의 점 P까지의 거리 : $\rho=\sqrt{r^2+x^2}$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{\rho}dq=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\frac{Q}{R^2}d(r^2)$$

take $X(r)=r^2+x^2 \quad \rightarrow dX=d(r^2)$, $\quad \int X^m dX=\frac{1}{m+1}X^{m+1}$

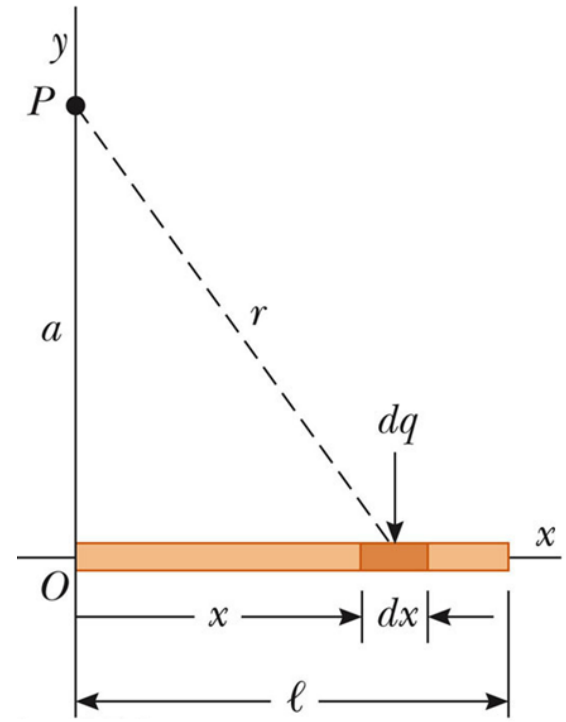
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(r^2+x^2)^{-1/2+1}\Big|_0^R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{1}{\frac{1}{2}}(r^2+x^2)^{-1/2+1}\Big|_0^R$$

$$=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\{(R^2+x^2)^{1/2}-(x^2)^{1/2}\}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x) \qquad \text{where} \quad \sigma=\frac{Q}{Area}=\frac{Q}{\pi R^2}$$

예제 25.7 선 전하에 의한 전위

x-축 상에 놓여있는 길이가 ℓ 인 막대가 있다.
전체 전하량이 $+Q$ 인 이 막대는 선 전하 밀도 $\lambda = Q/\ell$ 로 균일하게 대전되어 있다.
원점에서 거리가 a 만큼 떨어진 점 P 에서의 전위를 구하라.



풀이

$$dq = \lambda dx$$

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$ 이므로

$$V = \int_0^\ell k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = k_e \lambda \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\Big|_0^\ell$$

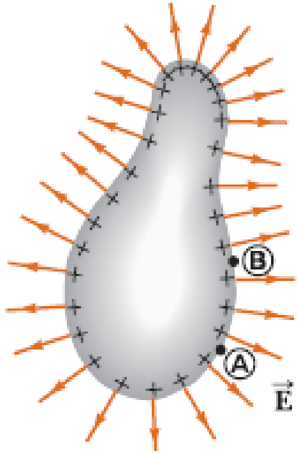
$$V = k_e \frac{Q}{\ell}\left[\ln(\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}) - \ln a\right]$$

$$= k_e \frac{Q}{\ell} \ln\left[\frac{\ell + \sqrt{a^2 + \ell^2}}{a}\right]$$

적분공식 이용

$$\left(\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C\right)$$

25.6 대전된 도체에 의한 전위
(Electric Potential Due to a Charged Conductor)

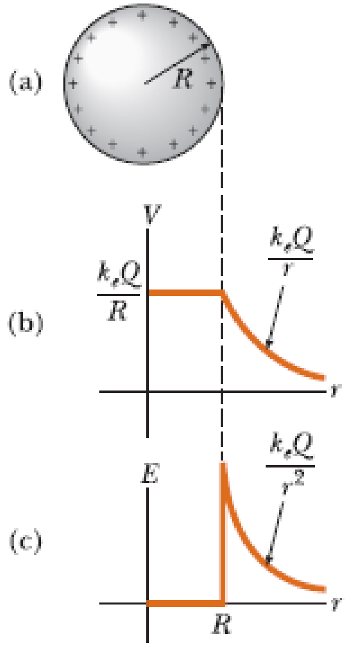


- 평형 상태에 있는 도체의 알짜 전하는 도체 표면에 분포한다.
- 도체 표면 바로 바깥쪽의 전기장은 도체 표면에 수직인 방향이며,
- 도체 내부의 전기장은 영(0)이다.

또, 평형 상태에 있는 대전된 도체 표면 상에 있는 모든 점의 전위는 같다.

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

정전기적 평형 상태에 있는 대전된 도체 표면은 등전위면을 이룬다. 또한 도체 내부의 전기장이 영(0)이므로, 도체 내부의 모든 점에서 전위는 일정하며 그 표면의 전위와 같다.



금속 구 표면에서의 전위는 k_eQ/R 가 된다.
금속 구 내부의 전위는 일정하므로,
금속 구 내부에 위치하는 임의의 점에서의 전위도 k_eQ/R 가 된다.

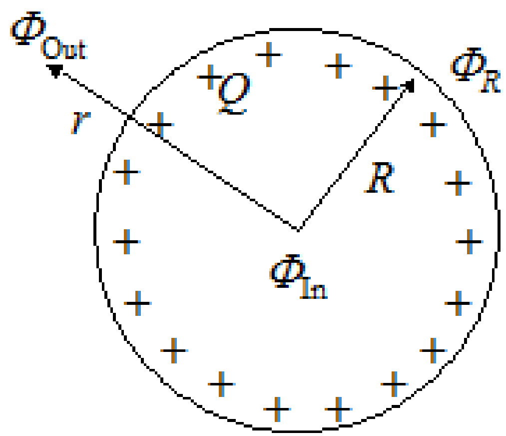
곡률 반지름이 작은 볼록한 부분에서 전기장이 커지고,
뾰족한 부분에서 매우 강해진다. (오른쪽 위 그림, 피뢰침의 원리)

Aside Ex) 구형 대칭 전하 분포에 의한 전위 1 (Conductor Sphere)

반지름 R 인 속이 찬 도체 구가 전체 (양)전하 Q를 가진다.
(A) 구 밖의 한 점에서 전기장과 전위를 구하라.
(B) 구 표면의 한 점에서 전기장과 전위를 구하고 표면전하 밀도 σ 를 구하라.
(C) 구 내부의 한 점에서 전기장과 전위를 구하라.

Sol

- 구의 표면에만 전하 Q가 균일하게 분포
- Conductor Sphere : 전자의 움직임이 자유롭다
  → 척력에 의해 표면으로 밀린다.



(A) 구의 외부 : $r > R$ → 반경 r 인 Gauss' Surface를 잡아주면

by Gauss' Law : $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\Phi_{E_{Out}} == 4\pi r^2 E_{Out} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (\because \ Q_{enclosed} = Q)$$

$$\therefore \ E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{or} \qquad \vec{E}_{Out} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$V = -\int E_r dr = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + K$$

$$V_\infty = 0 \rightarrow K = 0$$

$$\therefore \ V_{r>R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(B) 구의 표면 : $r = R$ → 반경 R인 Gauss' Surface를 잡아주면

$$\therefore \ \vec{E}_{Surface} = \vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r} \quad (\because \ Q_{enclosed} = Q) \quad \sigma = \frac{Q}{Area} = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \therefore \ V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

(C) 구의 내부 : $r < R$ → 반경 r 인 Gauss' Surface를 잡아주면

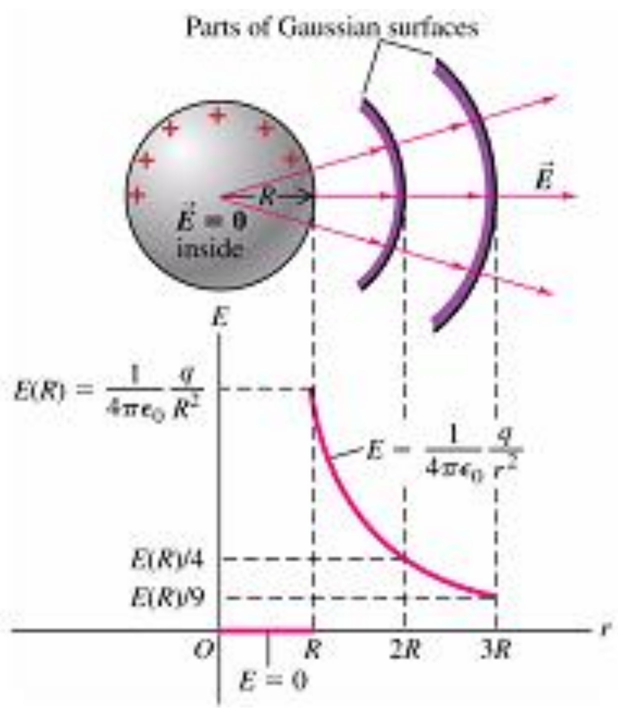
$$\therefore \quad \vec{E}_{In} = 0 \quad (\because \; Q_{enclosed} = 0) \qquad \Rightarrow \quad V = -\int E_r dr = 0$$

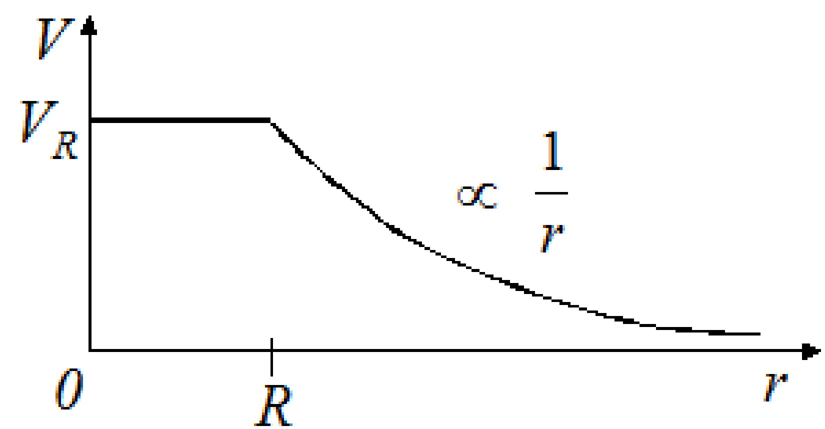
- 구의 내부 r과 표면 ($r = R$) 사이의 전위(차)

$$V_{\mathrm{ba}} = V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}} \qquad \Rightarrow \quad E\text{-Potential From } b \text{ To } a$$

- <u>E-Potential From r To R</u> : $\qquad V_{\mathrm{in}} = V_{\mathrm{rR}} = V_{\mathrm{r}} - V_{\mathrm{R}} = 0$

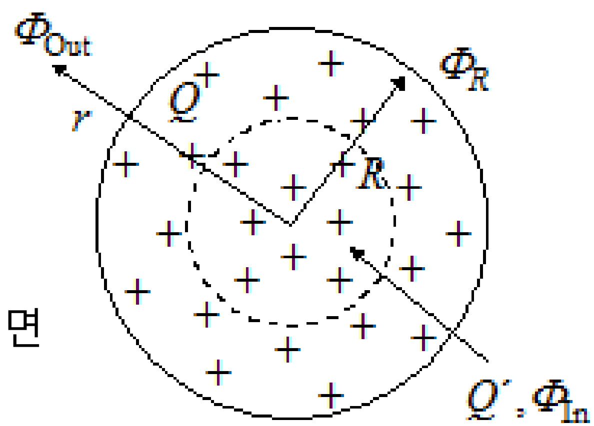
o 구의 내부 r 에서의 E-Potential : $\qquad V_{\mathrm{R}} = V_{\mathrm{r}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} = const$





Aside Ex) 구형 대칭 전하 분포에 의한 전위 2 (Insulator Sphere)

반지름 R 인 속이 찬 부도체 구가 전체 (양)전하 Q를 가진다.
(A) 구 밖의 한 점에서 전위와 전기장을 구하라.
(B) 구 표면의 한 점에서 전위와 전기장을 구하라.
(C) 구 내부의 한 점에서 전위와 전기장을 구하라.



Sol

- Insulator : 전하의 움직임이 구속된다.
  → 전하는 구의 내부에 균일하게 분포

(A) 구의 외부 : $r > R$ ⇒ 반경 r 인 Gauss' Surface를 잡아주면

by Gauss' Law : $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\Phi_{E_{Out}} == 4\pi r^2 E_{Out} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (\because \; Q_{enclosed} = Q)$$

$$\therefore \; E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{or} \qquad \vec{E}_{Out} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$V = -\int E_r dr = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + K$$

$$V_\infty = 0 \rightarrow K = 0$$

$$\therefore \; V_{r>R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(B) 구의 표면 : $r = R$ ⇒ 반경 R인 Gauss' Surface를 잡아주면

$$\therefore \; \vec{E}_{Surface} = \vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\hat{r} \quad (\because \; Q_{enclosed} = Q) \quad \sigma = \frac{Q}{Area} = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \therefore \; V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

(C) 구의 내부 : $r < R$ $\Rightarrow$ 반경 r 인 Gauss' Surface를 잡아주면

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{(4/3)\pi R^3 \rho} = \frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad Q' = \frac{r^3}{R^3} Q$$

$$\Phi_{E_{in}} = \oint_S \vec{E}_{In} \cdot d\vec{A} = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E_{In}$$

$$\therefore \quad \vec{E}_{In} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q'}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{r^3 Q}{R^3} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{rQ}{R^3} \hat{r} \propto r$$

- 구의 내부 r과 표면 ($r = R$) 사이의 전위(차)

$$V_r = -\int E_r dr = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \frac{1}{2} r^2 + K$$

- Find 적분상수 K : at $r = R$ $\rightarrow$ $V_r = V_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$

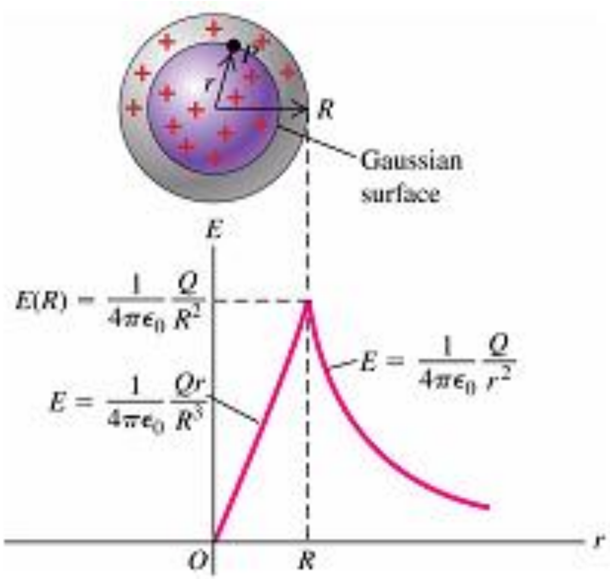
$$V|_{r=R} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \frac{1}{2} R^2 + K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

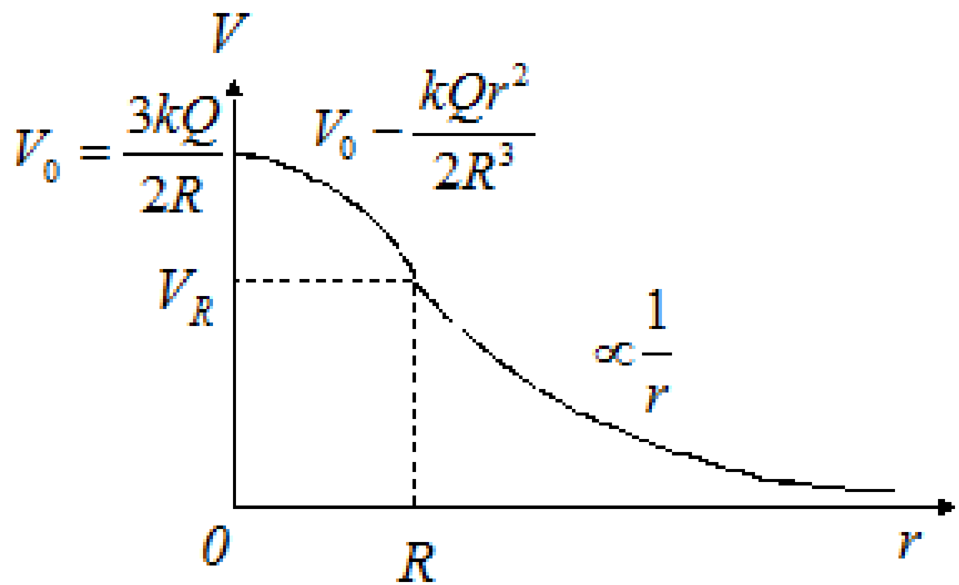
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{2R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q}{2R}$$

$$\therefore \quad V_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3Q}{2R} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- at r = 0 (구의 중심) :

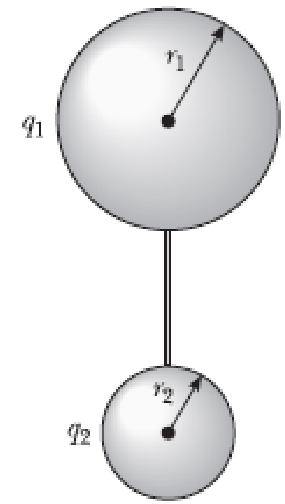
$$V_0 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{R} = \frac{3}{2}k\frac{Q}{R} = \frac{3kQ}{2R}$$





☆ 예제 25.8 연결된 두 대전된 도체 구

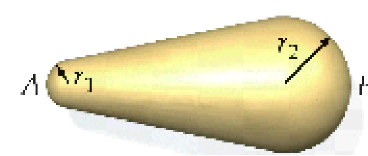
반지름이 각각 r_1과 r_2인 도체 구가 이들 구의 반지름의 크기보다 훨씬 더 큰 거리만큼 떨어져 있다. 두 도체 구를 도선으로 연결하였다. 평형 상태에서 두 도체 구의 전하가 각각 q_1과 q_2이고, 두 도체 구에 균일하게 대전되어 있다고 하자. 이때 두 도체 구 표면에서의 전기장의 크기의 비를 구하라.



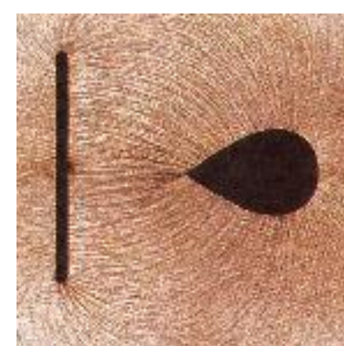
풀이 그림에 나타나 있는 것보다 구들이 훨씬 멀리 떨어져 있다고 생각해 보자. 구들이 매우 멀리 떨어져 있으므로 한 개의 구에 의한 전기장이 다른 구의 전하 분포에는 영향을 미치지 않는다. 두 도체는 도선으로 연결되어 있기 때문에 같은 전위를 가진다.

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2} \qquad (1) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} \quad \& \quad E_2 = ke \frac{q_2}{r_2^2} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^2}{r_1^2}$$



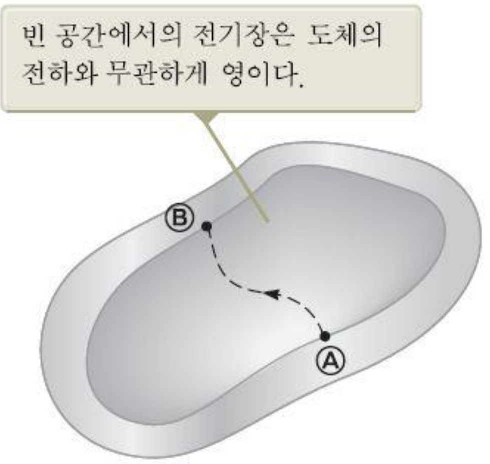
$$(2) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2}{r_1}$$



- 연결된 두 도체구에서의 전기장의 세기는 반경에 반비례한다.
- 반경이 작을수록 큰 전기장 → 끝이 뾰족하면 (아주) 큰 전기장

⇒ 피뢰침의 원리

◆ 속이 빈 형태의 도체(A Cavity Within a Conductor)



빈 공간 내부의 전기장은 도체 표면의 전하 분포와 무관하게 항상 영(0)이다. 또한, 도체 외부에 전기장이 존재할지라도 빈 공간 내부의 전기장은 역시 영(0)이다.

빈 공간의 표면 위에 있는 두 점 A와 B는 같은 전위 상태에 있으므로 전위차는

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

전위차가 0이므로, 적분은 도체 위의 두 점 사이의 모든 경로에서 영(0)이어야 한다. 따라서 빈 공간 내의 모든 곳에서 전기장은 영(0)이어야 한다.

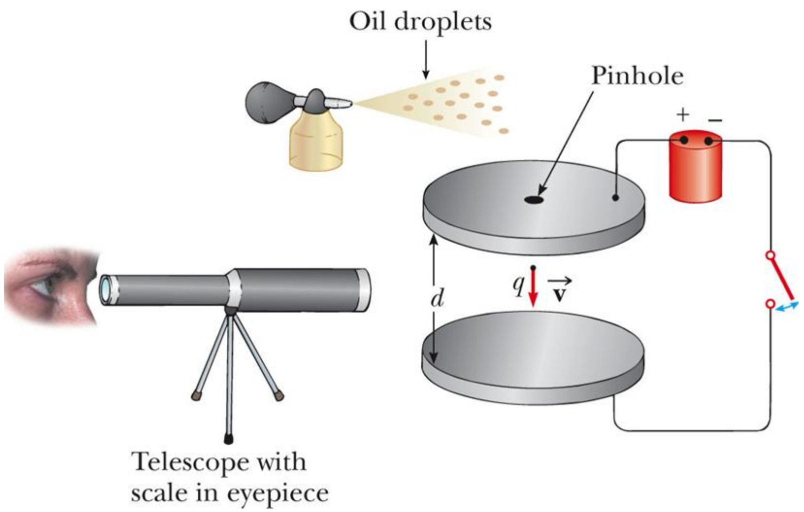
◆ 코로나 방전(Corona Discharge)

고전압 전력선 근처에서 자주 관측된다. 도체 근처에서 전기장이 충분히 강할 때, 도체 부근의 공기 분자가 이온화되어 전자가 원래의 분자로부터 떨어져 나와 가속된다. 이렇게 빠르게 움직이는 전자는 도체 부근의 다른 분자들을 이온화시키고, 이로 인해 더 많은 자유 전자들을 생기게 한다. 코로나 방전은 이들 자유 전자와 이온화된 공기 분자의 재결합으로 인해 생긴다.

도체가 불규칙적인 형태를 갖는다면, 전기장은 도체의 끝 또는 뾰쪽한 부분에서 가장 강하게 되고, 결과적으로 이온화 과정과 코로나 방전은 그러한 부분에서 가장 잘 일어난다.

25.7 밀리컨의 기름 방울 실험
(The Millikan Oil-Drop Experiment)

밀리컨(Robert Millikan) (1923년 노벨 물리학상)은 1909년부터 1913년까지 기본 전하량의 크기인 e를 측정하는 실험을 수행하여, 전하가 양자화되어 있음을 보였다.

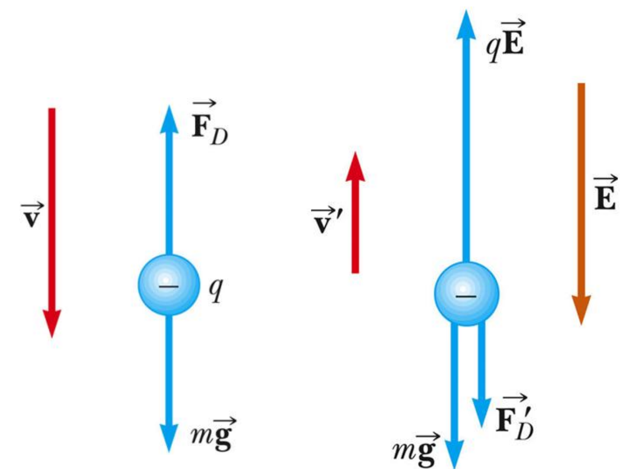


1) 두 평행한 금속판 사이에 전기장이 없을 때, 종단 속력에 도달하면

$$\mathbf{F}_D - m\mathbf{g} = m\mathbf{a} = 0$$

2) 두 평행한 금속판 사이에 전기장이 있을 때, 종단 속력에 도달하면

$$q\mathbf{E} - m\mathbf{g} - \mathbf{F}_D = m\mathbf{a} = 0$$



모든 기름 방울들은 기본 전하량 e의 정수배와 크기가 같은 전하량을 가진다는 사실을 알았다.

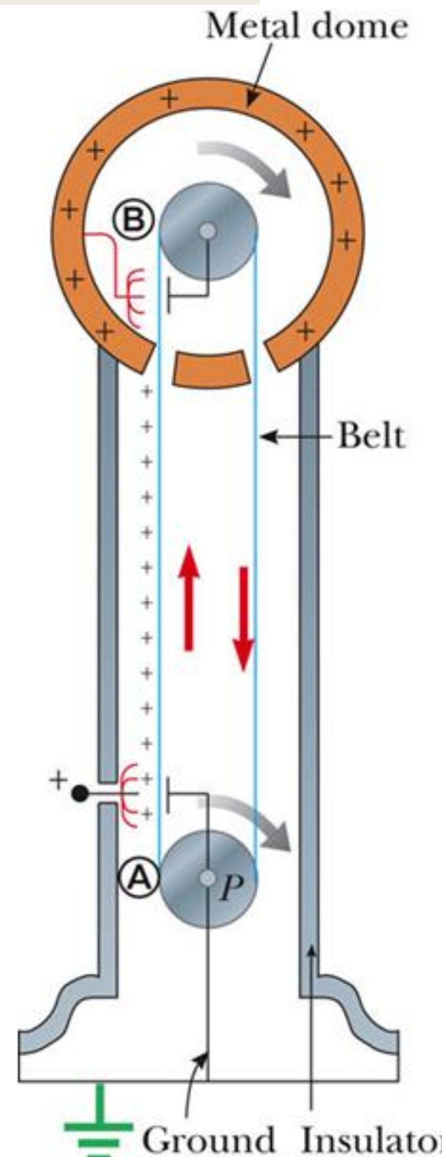
$$q = ne \qquad n = 0, -1, -2, -3, \cdots$$

25.8 정전기학의 응용
(Applications of Electrostatics)

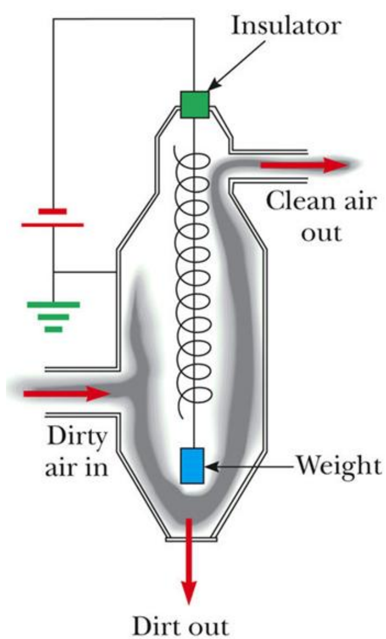
◆ 밴 더 그래프 발전기 (The Van de Graaff Generator)

대전된 도체가 속이 비어 있는 도체와 접촉을 했을 때, 대전된 도체에 있는 모든 전하는 속이 빈 도체로 전달된다. 이 과정을 계속해서 되풀이함으로써 전하와 전위를 증가킬 수 있다.

2천만 볼트만큼 큰 전위차를 만들어낼 수 있다.



◆ 정전 집진기 (The Electrostatic Precipitator)



◈ 복사와 레이저 프린터(Xerography and Laser Printers)

(a) 드럼을 대전시킴 (b) 문서를 이미지로 형상화 (c) 토너를 흡착시킴 (d) 토너를 종이로 이송시킴 (e) 레이저 프린트 드럼