원광대학교
WONKWANG UNIVERSITY

NEW WAY, NEW LEADER WONKWANG UNIVERSITY

과목명: 재무관리

담당교수: 원광대학교 경영학부 정호일

주교재: 현대재무관리(저자: 장영광)

제7장 포트폴리오 분석

1. 불확실성, 위험
2. 효용이론
3. 평균.분산기준 포트폴리오이론
4. 포트폴리오 기대수익과 위험
5. 분산투자와 위험감소효과
6. 무위험자산과 효율적 포트폴리오

1. 불확실성과 투자위험

(1) 투자위험의 의의

① 확 실 성: 미래 발생 가능한 상황이 단 한가지
② 위   험: 미래 발생 가능한 상황의 확률분포가 객관적으로 알려진 상황
③ 불확실성: 미래 발생 가능한 상황의 확률분포가 주관적으로 알려진 상황
재무관리에서는 위험상황과 불확실한 상황을 동일시 하여 설명
➔ 미래 투자수익(현금흐름)의 변동성
실제 결과가 기대수익에 못 미칠 가능성

- 개별자산위험(**stand-alone risk**)
  다른 투자사업(증권)과의 관계를 고려하지 않고, 개별자산의 독립적 입장에서 예상되는 현금흐름의 변동성
- 포트폴리오위험(**portfolio risk**)
  개별자산의 독립적 입장이 아닌 다른 투자사업(증권)과 함께 투자되어 포트폴리오를 구성할 때의 투자위험, 포트폴리오 결합효과로 인하여 투자위험이 분산되는 투자위험
- 기업고유위험(**company specific risk**)
  개별기업 고유의 신제품개발의 성공이나 실패와 같은 미시적 요인의 변동으로 인한 현금흐름의 변동성 〔비체계적 위험〕
- 시장위험(**market risk**)
  시장에 존재하는 모든 자산에 분산투자할 경우 안게 되는 투자위험으로서, 모든 자산에 공통적으로 영향을 주는 요인인 시중금리, 환율, 경제성장률 변동 등으로 초래되는 현금흐름의 변동성〔체계적 위험〕

(2) 투자위험의 측정

- 투자위험의 계량화

1) 미래 투자수익률의 확률분포

상황	확률	자산 A	자산 B	자산 C	자산 D
		1,000	1,000	1,000	1,000
낙관적	0.25	2,000(100%)	1,400(40%)	1,300	1,100
보통	0.50	1,150(15%)	1,150(15%)	1,150	1,100
비관적	0.25	300(-70%)	900(-10%)	1,000	1,100

상 황	확률	주식 A	주식 B	주식 C
호경기	0.3	100%	40%	0%
정 상	0.4	15	15	20
불경기	0.3	-70	－10	40

2) 기대수익과 위험의 측정

기대수익 ⇒ 예상평균수익률 ⇒ (기대수익률)로 측정

$$E(R) = \Sigma r_i \bullet p_i$$

위험 ⇒ 투자수익률의 변동성, 예상기대수익이 실현되지 않을 가능성

⇒ (분산/표준편차)로 측정

$$\sigma^2 = E\,[r_i - E(R)\,]^2$$

여기서 ,

E(R) = 기대수익률
σ = 수익률의 표준편차
p_i = 발생가능확률
r_i = i 상황에서의 발생가능수익률
σ^2 = 수익률의 분산

상 황	확률	주식 A	주식 B	주식 C
호경기	0.3	100%	40%	0%
정 상	0.4	15	15	20
불경기	0.3	-70	−10	40

기대수익: $E(R) = \Sigma r_i \bullet p_i$

$E(R_A) = (0.3\times1.0)+(0.4\times0.15)+(0.3\times-0.7) = 0.15(15\%)$

$E(R_B) = (0.3\times0.2)+(0.4\times0.15)+(0.3\times0.1) = 0.15(15\%)$

$E(R_C) = (0.3\times0.4)+(0.4\times0.2)+(0.3\times0) = 0.20(20\%)$

위험: $\sigma^2 = E\,[r_i - E(R)]^2$

$\sigma_A{}^2 = (1.0-0.15)^2 . 0.3+(0.15-0.15)^2 . 0.4+(-0.7-0.15)^2 . 0.3$

$= (0.6584)^2 \qquad \therefore \sigma_A = 0.6584$

$\sigma_B{}^2 = (0.4-0.15)^2 . 0.3+(0.15-0.15)^2 . 0.4+(-0.10-0.15)^2 . 0.3$

$= (0.1936)^2 \qquad \therefore \sigma_B = 0.1936$

$\sigma_C{}^2 = (0-0.2)^2 . 0.3+(0.2-0.2)^2 . 0.4+(0.4-0.2)^2 . 0.3$

$= (0.1549)^2 \qquad \therefore \sigma_C = 0.1549$

- 위험(불확실성)의 상황하에서 최적 투자안을 선택하는 이론

① 효용이론(**utility theory**)

② 평균 · 분산기준 포트폴리오 이론(**portfolio theory**)

2. 효용이론

(1) 기대수익 극대화(**maximizing expected return**)기준의 문제점

확실성하 ➔ 기대수익 극대화

불확실성하 ➔ 수익과 위험의 상충관계 발생

베루누이(**N. Bernoulli**)의 세인트 피터스버그 역설(**St. Petersburg's Paradox**)

처음으로 앞면이 나올 시도횟수	1	2	3	·······	n
확률(P)	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	·······	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
상 금	2^1	2^2	2^3	·······	2^n

$$E(R) = \sum(\text{확률}) \cdot (\text{각 상황의 상금})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 2^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^3 + \cdots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

- (효용) : <u>투자수익과 위험을 동시에 고려</u>하여 느끼게 되는 투자자의 주관적인 만족도를 측정한 것.

(2) 위험에 대한 태도

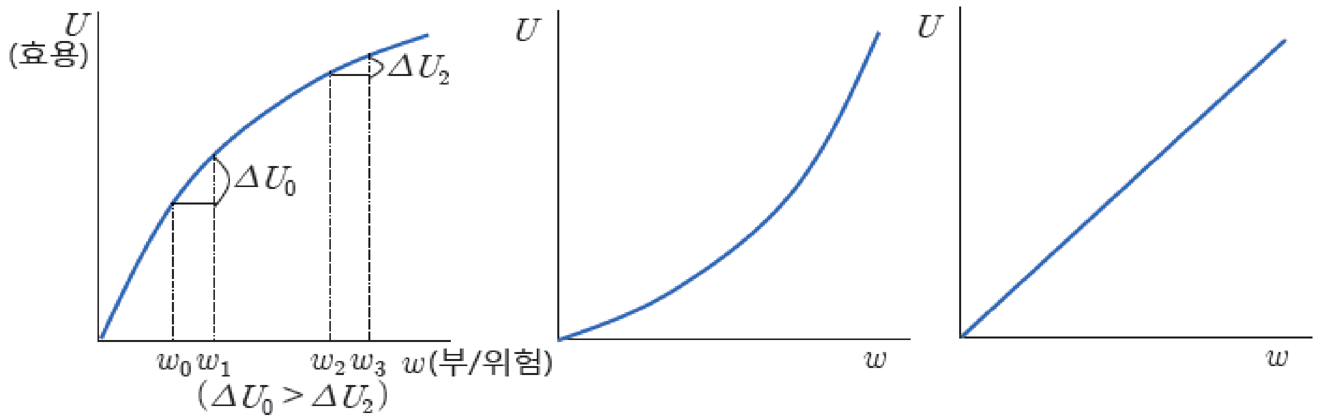
- 위험보상(**risk premium**)의 정도에 대해서 투자자들이 느끼는 만족도는 사람마다 다르다.
- 위험에 대한 투자자의 태도 :

  위험회피형(**risk averter**):추가적 위험에 대한 대가를 요구

  위험중립형(**risk neutral**):추가적 위험에 대한 대가를 요구하지 않음

  위험선호형(**risk lover**): 추가적인 위험에 대해 대가를 지불하는 사람
- 투자자마다의 위험에 대한 태도는 효용, 효용함수로 측정

  1) 부가 증가할 때 효용의 증감률(한계효용)은 사람마다 다르다.



(a) 위험회피형 (b) 위험선호형 (c) 위험중립형

2) 공정게임 (**fair game**)의 채택여부

상 황	확 률	위험자산 주식 **X**	위험자산 주식 **Y**	무위험자산 국공채 **B**
1	**0.25**	**-10 %**	**12 %**	**6 %**
2	**0.50**	**10**	**6**	
3	**0.25**	**30**	**0**	
기대수익**(**률**)**		**10 %**	**6 %**	**6 %**

- (공정게임): 위험보상률의 기대치가 영(0)인 위험투자안

  1) 위험회피형 : **fair game** (기각)

  2) 위험선호형 : **fair game** (채택)

  3) 위험중립형 : **fair game** (채택 또는 기각)

3) 불확실성하의 기대부($E(w)$)와 확실성등가의 부(CEW) 중에서 어느 쪽이 더 큰지에 따라 평가할 수 있다.

위험회피형 : $E(w) > CEW$

위험중립형 : $E(w) = CEW$

위험선호형 : $E(w) < CEW$

〔 투자자의 유형별 투자자의 특성〕

구 분	확실성등가(CE)와 기대수익(ER)과의 관계	공정게임 채택여부	효용함수의 형태
위험회피형	$CE < ER$	거절	오목, 체감적 증가
위험선호형	$CE > ER$	채택	볼록, 체증적 증가
위험중립형	$CE = ER$	무관	직선, 단순증가

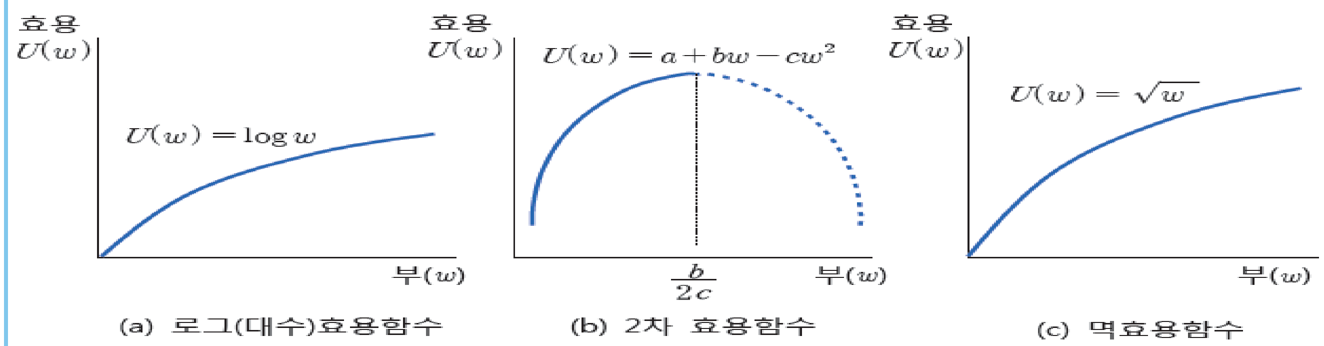
(3) 효용함수와 확실성등가

- 효용함수(**utility function**)

: 위험회피도의 정도에 따라 달라지는 만족의 정도를 지수 또는 점수 (**scoring system**)로 나타낸 것.

2차 효용함수 : $u(w) = a + bw + cw^2$ (단, *w*는 부의 크기)

로그 효용함수: $u(w) = \log w$



⇒ 위험자산의 선택순위를 일관성 있게 결정할 수 있다.
(효용=확실성등가)

$U = E(R) - C \cdot \sigma^2$ (C : 위험회피계수)

⇒ 확실성등가(**certainty equivalent**)

〔예제 〕

투자안	기대수익률 $E(R)$	표준편차 σ
국공채	7%	0%
주식 A	20%	20%
수익증권	15%	10%

투자자의 효용함수 : $u = E(R) - 0.02\,\sigma^2$

(풀이) 국공채 : $u = 7 - 0.02 \times 0^2 = 7$

주식 A : $u = 20 - 0.02 \times 20^2 = 12$

수익증권 : $u = 15 - 0.02 \times 10^2 = 13$

(4) 기대효용극대화 이론(**Expected utility maximization theorem**)

- 기대효용은 위험투자안이지만, 확실성등가를 나타냄
- 기대효용: 위험투자안으로부터 각 상황 별로 얻어지는 부의 효용에 대한 기대치. 효용의 확률분포로부터 평균값을 구한 것

$$E(U(w)) = \sum P(w_i) \cdot U(w_i)$$

단, $E(U(w))$: 효용의 기대값
$P(w_i)$: 투자이득 w_i가 발생활 확률
$U(w_i)$: 투자이득 w_i의 효용

$$E[U\{G(X, Y : B)\}] = \beta \cdot U(X) + (1 - \beta) \cdot U(Y)$$

단, $G(X, Y : B)$: X의 이득이 얻어질 확률이 β이고,
Y의 이득이 얻어질 확률이 (1 - β)인 위험투자안

- 기대효용극대화이론
  발생 가능한 모든 상태에 확률을 부여하고 각 가능한 상태에서 얻게 될 결과에 효용점수(값)를 부여하여 이러한 효용점수의 기대값을 극대화하는 투자안을 선택하는 것이 최적 투자안을 선택하는 방법

〔예제〕

다음과 같은 내용을 가진 투자안 A, B 중에서 하나의 투자안을 채택하고자 한다.

투자안 A		투자안 B	
NPV	확 률	*NPV*	확 률
100억원	0.3	300억원	0.3
400	0.4	400	0.4
700	0.3	500	0.3

(1) 투자안의 심사기준이 '기대순현가의 극대화'라면 어떤 투자안을 선택해야 하는가?
(2) 다음과 같은 효용함수를 가지고 있고, '기대효용의 극대화'가 투자결정의 기준이라면 어떤 투자안을 선택해야 하는가?

화폐가치 X_i	0	100	200	300	400	500	600	700억원
효용 $U(X_i)$	0	20	39	57	73	87	98	105

풀이

(1) $E(NPV_A) = 100 \times 0.3 + 400 \times 0.4 + 700 \times 0.3 = 400$억원

$E(NPV_B) = 300 \times 0.3 + 400 \times 0.4 + 500 \times 0.3 = 400$억원

$E(NPV_A) = E(NPV_B)$이므로 두 투자안은 무차별하다.

직관적으로 보더라도 투자안 A의 위험이 높은데, 이처럼 위험을 고려하지 않고 기대수익만을 고려하는 '기대순현가극대화'기준을 적용하면 오류를 범하게 된다.

(2) 투자안 A의 경우, 위험에 노출된 100억원의 효용(확실성등가)은 20, 400억원의 효용은 73, 700억원의 효용은 105이므로 기대효용은 다음과 같이 계산된다.

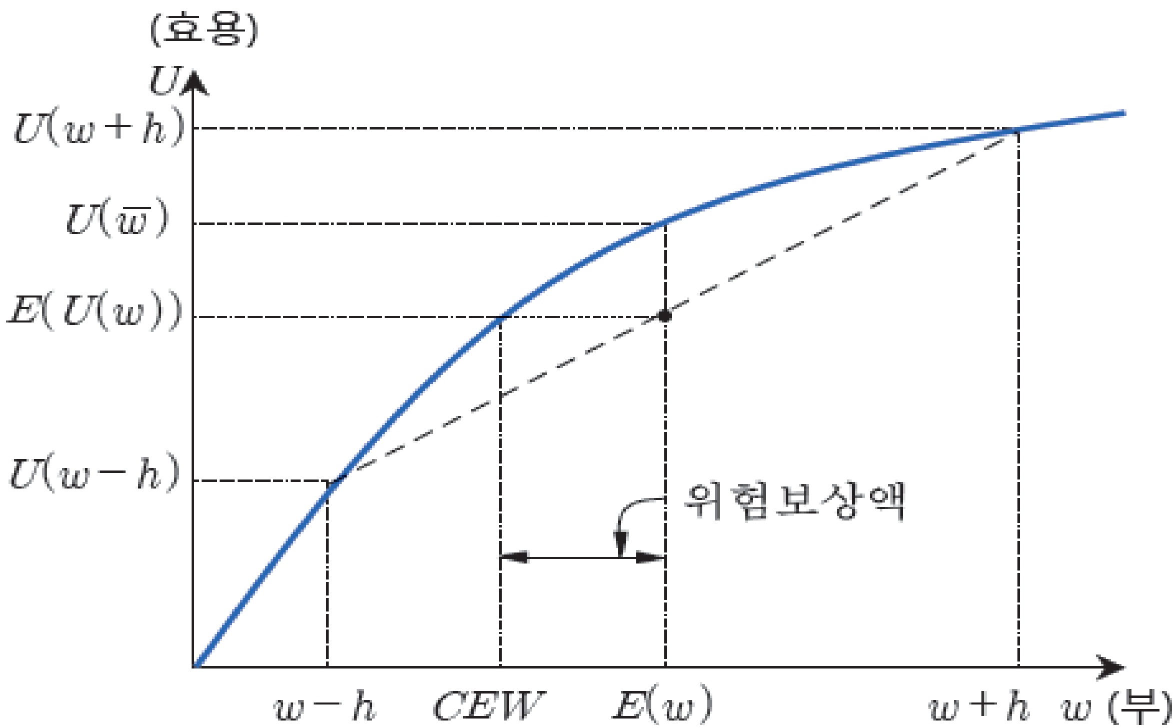
$E(U_A) = 0.3 \times 20 + 0.4 \times 73 + 0.3 \times 105 = 66.7$

$E(U_B) = 0.3 \times 57 + 0.4 \times 73 + 0.3 \times 87 = 72.4$

기대효용이 $E(U_A) < E(U_B)$이므로 투자안 B를 선택한다.

(5) 위험보상률

- 위험보상률 = 위험자산 기대수익률 – 무위험자산수익률
- 위험보상액 = 위험에 노출된 부의 기대부$(E(W))$ – 확실성등가부(CEW)
- 위험투자안의 불확실성을 제거하기 위하여 기꺼이 포기하고자 하는 富의 최대액



〔예제〕

$U(X)=\sqrt{X}$ (여기서 X는 소득의 화폐가치)의 효용함수를 갖는 투자자가 있다. 다음과 같은 투자기회 A, B에 관한 자료를 근거로 물음에 답하라.

투자기회 A		투자기회 B	
확　률	투자이득(X)	확　률	투자이득(X)
0.5	16만원	0.5	81만원
0.5	196	0.5	121

(1) 어떤 투자기회를 선택할 것인가?

(2) 이 투자가가 각 위험투자기회에 대해서 지불하고자 하는 최대금액(보험료)은 얼마인가? 이를 그림으로 도시하여 설명하라.[6]

풀이

(1) 기대효용을 구하여 기대효용이 큰 투자안을 채택한다.

$E(U_A)=0.5\times\sqrt{16}+0.5\times\sqrt{196}=9$

$E(U_B)=0.5\times\sqrt{81}+0.5\times\sqrt{121}=10$

기대효용이 $E(U_A)<E(U_B)$이므로 B를 채택한다.

(2) 위험투자안의 위험보상액 계산

1) 투자기회 A의 경우

① 위험에 노출된 상태의 기대부 $E(w)=0.5\times16+0.5\times196=106$만원

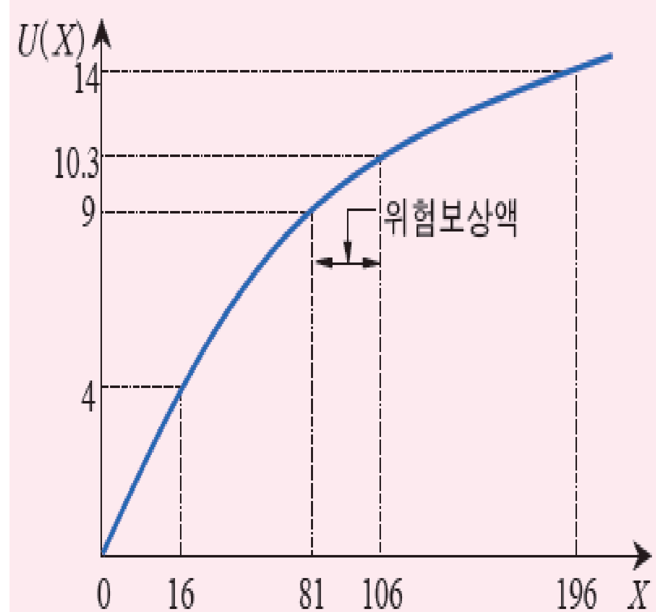
② 기대효용의 값을 화폐액으로 환산한 것이 확실성등가부(CEW)이다.

$E[U(X)]=U(CEW)\Rightarrow\sqrt{CEW}=9 \quad \therefore\ CEW=81$만원

③ 위험보상액=기대부 $E(w)-CEW=106-81=25$만원

따라서 투자기회 A에 대해서 위험을 제거하기 위하여 투자자가 지불할 수 있는 최대금액(보험료)은 25만원이다.

④ 투자기회 A의 경우를 도해하면 다음과 같다.



3. 평균 분산기준 포트폴리오 이론

(1) 평균 • 분산기준 (**Mean-Variance Approach**)

- 모든 투자결정은 예상수익률의 평균•분산 2가지 기준만으로 행한다.

$$\text{투자가치} = f\,(\text{기대수익},\ \text{위험})$$

$$= f\,(E(R),\ \sigma^2)$$

(2) 지배원리와 효율적 투자안의 선택

- 기대수익과 위험을 계량화시키면 우월한 투자대상을 쉽게 선별할 수 있다.

<예>

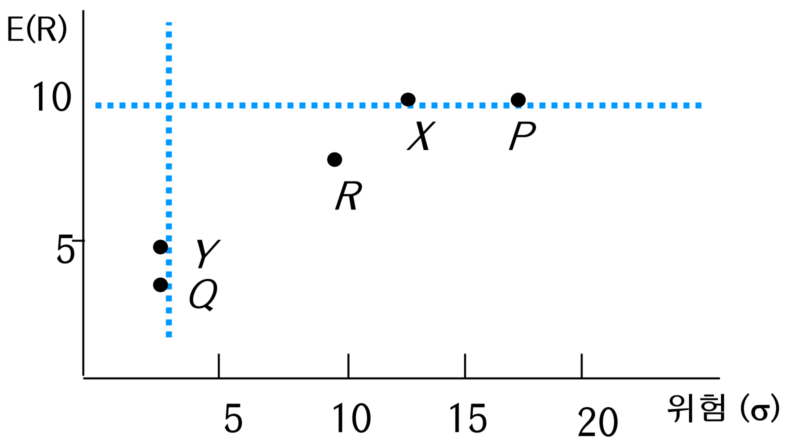
단위 : %

투자자산	A	B	C	D
기대수익률 $E(R)$	30	30	15	18
표준편차 σ	35	40	20	20

최적 투자안의 선택과정

① 지배원리 (**dominance principle**) ⟶ 효율적 포트폴리오

	X	Y	P	Q	R
E(R)	10	5	10	4	8
σ	14.14	3.54	18	3.54	10



- 위험이 동일한 투자대상 중에서 기대수익이 가장 높은 것을 선택하고 기대수익이 동일한 투자대상 중에서 위험이 가장 낮은 것을 선택

- 효율적 포트폴리오 (**efficient portfolio**) : 지배원리를 만족시키는 포트폴리오

② 투자자의 주관적 위험에 대한 태도 ⟶ 최적 포트폴리오 선택

상 황	확률	주식 A	주식 B	주식 C
호경기	0.3	100%	40%	0%
정 상	0.4	15	15	20
불경기	0.3	-70	−10	40

- 기대수익

$$E(R_A) = (0.3\times1.0)+(0.4\times0.15)+(0.3\times-0.7) = 0.15(15\%)$$

$$E(R_B) = (0.3\times0.2)+(0.4\times0.15)+(0.3\times0.1) = 0.15(15\%)$$

$$E(R_C) = (0.3\times0.4)+(0.4\times0.2)+(0.3\times0) = 0.20(20\%)$$

- 위험

$$\sigma_A^2 = (1.0-0.15)^2 . 0.3+(0.15-0.15)^2 . 0.4+(-0.7-0.15)^2 . 0.3$$

$$= (0.6584)^2 \qquad \therefore \sigma_A = 0.6584$$

$$\sigma_B^2 = (0.4-0.15)^2 . 0.3+(0.15-0.15)^2 . 0.4+(-0.10-0.15)^2 . 0.3$$

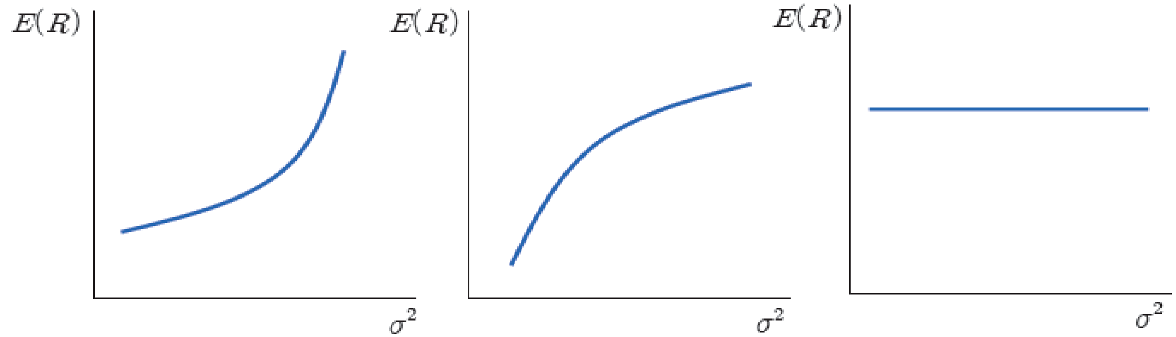
$$= (0.1936)^2 \qquad \therefore \sigma_B = 0.1936$$

$$\sigma_C^2 = (0-0.2)^2 . 0.3+(0.2-0.2)^2 . 0.4+(0.4-0.2)^2 . 0.3$$

$$= (0.1549)^2 \qquad \therefore \sigma_C = 0.1549$$

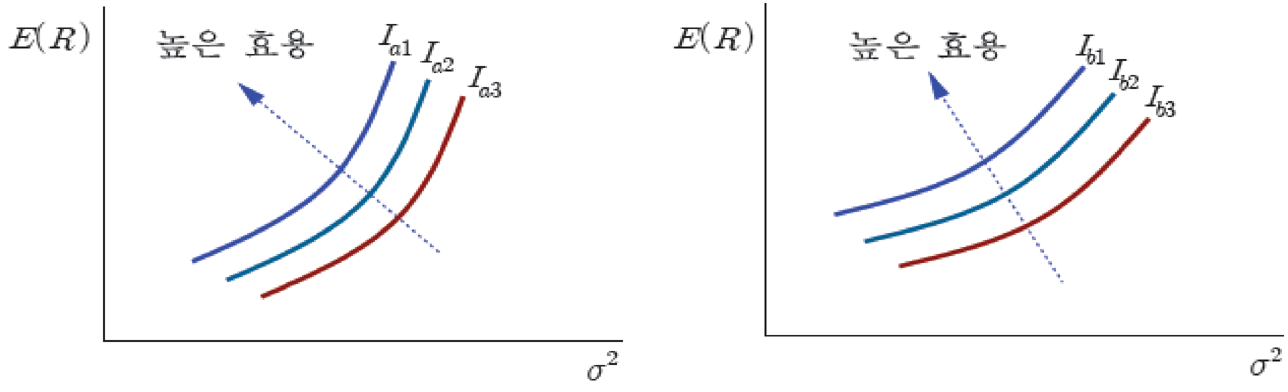
(3) 투자자의 주관적 위험성향과 최적 투자안의 선택

- 최적포트폴리오(**optimal portfolio**)
- 무차별효용곡선(**indifference utility curve**)



(a) 위험회피형 (b) 위험선호형 (c) 위험중립형

- 위험회피형 투자자의 유형별 무차별효용곡선 형태



(a) 보수적 투자자 (b) 공격적 투자자

4. 포트폴리오 기대수익과 위험

(1) 포트폴리오의 기대수익과 위험의 측정

방법1: pf수익률의 확률분포이용 방법

- 기대수익(평균)의 측정

$$E(R_p) = \sum_{s=1}^{m} P_s \cdot r_{ps}$$

단, $E(R_p)$: 포트폴리오의 기대수익률

r_{ps} : s 상황에서의 포트폴리오 예상수익률

P_s : s 상황이 일어날 확률(m개의 상황)

- 포트폴리오 위험(**portfolio risk**)-pf수익률의 확률분포이용 방법

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{m} [r_{pi} - E(R_p)]^2 \cdot p_i$$

- 주식X(50%) + 주식Y(50%인 포트폴리오
- 주식X(50%) + 주식Z(50%)인 포트폴리오
- 주식X(20%) + 주식Z(80%)인 포트폴리오

의 기대수익률과 위험을 구하라.

경제상황	확 률	예상수익률(ri)		
		X(캔디)	Y(초콜릿)	Z(설탕)
비 관	0.25	- 0.10	0.00	0.10
중 립	0.50	0.10	0.05	0.05
낙 관	0.25	0.30	0.10	0.00
	$E(R)$	10%	5%	5%
	σ	0.1414	0.0354	0.0354

① 경제상황	②확률	③ 주식X	④주식Y	⑤ s 상황에서의 포트폴리오수익률(rp) (각 자산의 예상수익률×자산투자비율 50:50)
불 황 정 상 호 황	0.25 0.50 0.25	－0.10 0.10 0.30	0.00 0.05 0.10	－0.10(0.5) + 0.00(0.5) = －0.05 0.10(0.5) + 0.05(0.5) = 0.075 0.30(0.5) + 0.10(0.5) = 0.20
		10%	5%	E(Rp)=－0.05(0.25) + 0.075(0.50) + 0.20(0.25) = 7.5% 표준편차 = 8.84%

① 경제상황	② 확률	③ 주식X	④ 주식Z	⑤s 상황에서의 포트폴리오 수익률 (rp) (각 자산의 예상수익률×자산투자비율 50:50)
불 황 정 상 호 황	0.25 0.50 0.25	－0.10 0.10 0.30	0.10 0.05 0.00	－0.10(0.5) + 0.10(0.5) = 0.0 0.10(0.5) + 0.05(0.5) = 0.075 0.30(0.5) + 0.00(0.5) = 0.15
		10%	5%	E(Rp)=0.0(0.25) + 0.075(0.50) + 0.15(0.25) = 7.5% 표준편차 = 5.30%

① 경제상황	②확률	③주식X	④주식Z	⑤ s 상황에서의 포트폴리오 예상수익률 (각 자산의 예상수익률×자산투자비율 50:50)
불 황 정 상 호 황	0.25 0.50 0.25	−0.10 0.10 0.30	0.10 0.05 0.00	−0.10(0.5) + 0.10(0.5) = 0.0 0.10(0.5) + 0.05(0.5) = 0.075 0.30(0.5) + 0.00(0.5) = 0.15
		10%	5%	E(Rp)= −0.05(0.25) + 0.075(0.50) + 0.20(0.25) = 7.5% 표준편차 = 5.30%

① 경제상황	②확률	③ 주식X	④주식Z	⑤s 상황에서의 포트폴리오 예상수익률 (각 자산의 예상수익률×자산투자비율 20:80)
불 황 정 상 호 황	0.25 0.50 0.25	−0.10 0.10 0.30	0.10 0.05 0.00	−0.10(0.2) + 0.10(0.8) = 0.06 0.10(0.2) + 0.05(0.8) = 0.06 0.30(0.2) + 0.00(0.8) = 0.06
		10%	5%	E(Rp)= −0.06(0.25) + 0.06(0.50) + 0.06(0.25) = 6.0% 표준편차 = 0.00%

방법 2 기대치 성질을 이용하는 방법

- 포트폴리오 기대수익률

$$r_{pi} = r_{xi} \bullet w_x + r_{yi} \bullet w_y$$

$$E(R_p) = w_x \cdot E(R_x) + w_y \cdot E(R_y)$$

$$E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot E(R_j)$$ --N자산 pf

단, w_j **:** 개별증권 j에 대한 투자비율

$E(R_j)$ **:** 개별증권 j에 대한 기대수익률

- 포트폴리오 위험(분산)

$$\sigma_p^2 = w_x^2\sigma_x^2 + w_y^2\sigma_y^2 + 2w_xw_y\sigma_{xy}$$ 또는 $$\sigma_p^2 = w_x^2\sigma_x^2 + w_y^2\sigma_y^2 + 2w_xw_y\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$

공분산 $\sigma_{xy} = E\,[\,(r_{xi} - E(R_x))\,(r_{yi} - E(R_y))\,]$

상관계수 **:** $-1 \leq$ 상관계수 $(\rho_{xy}=\sigma_{xy}/\sigma_x\,\sigma_y) \leq +1$

$$*\ \sigma_{xy} = \sigma_x\,\sigma_y\,\rho_{xy}$$

- 두 종목의 경우 포트폴리오 기대수익률과 분산

$$E(R_p) = w_x \cdot E(R_x) + w_y \cdot E(R_y)$$

$$\sigma_p^2 = w_x^2 \sigma_x^2 + w_y^2 \sigma_y^2 + 2 w_x w_y \sigma_{xy}$$

$$= w_x^2 \sigma_x^2 + w_y^2 \sigma_y^2 + 2 w_x w_y \sigma_x \sigma_y \rho_{xy}$$

이 공식의 증명은 다음과 같다.

$$\sigma_p^2 = E[r_p - E(R_p)]^2$$

주식 X와 주식 Y로 구성되는 포트폴리오의 경우

$$r_p = w_X r_X + w_Y w_Y$$

$$E(R_p) = w_X \cdot E(R_X) + w_Y \cdot E(R_Y)$$

이므로,

$$\sigma_p^2 = E[w_X r_X + w_Y r_Y - w_X \cdot E(R_X) - w_Y \cdot E(R_Y)]^2$$

$$= E[w_X(r_X - E(R_X)) + w_Y(r_Y - E(R_Y))]^2$$

$$= E[w_X^2(r_X - E(R_X))^2 + w_Y^2(r_Y - E(R_Y))^2 + 2 w_X w_Y (r_X - E(R_X))(r_Y - E(R_Y))]$$

그런데,

$$E(r_X - E(R_X))^2 = \sigma_X^2, \quad E(r_Y - E(R_Y))^2 = \sigma_Y^2$$

$$E[(r_X - E(R_X)) \cdot (r_Y - E(R_Y))] = \mathrm{cov}(r_X, r_Y)$$

이므로,

$$\sigma_p^2 = w_X^2 \sigma_X^2 + w_Y^2 \sigma_Y^2 + 2 w_X w_Y \mathrm{cov}(r_X, r_Y)$$

<공분산 및 상관계수의 계산>

- 공분산 : 공분산에는 수익률변동이 같은 방향인지 반대방향인지가 측정됨

$$\sigma_{xy} = E[(r_{xi}-E(R_x)(r_{yi}-E(R_y)]$$

- 상관계수 : $\rho_{xy} = \sigma_{xy}/(\sigma_x \sigma_y)$ $-1 \leq$ 상관계수 $(\rho_{xy}) \leq +1$

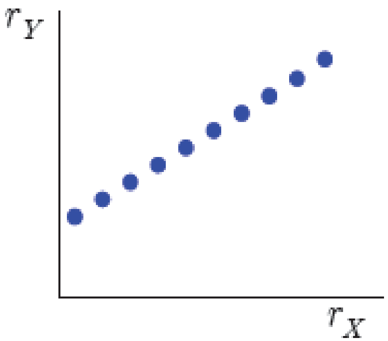
1. 주식 X와 Y, 주식 X와 Z간의 공분산 및 상관계수

$$Cov(r_x, r_y) = \sigma_{xy} = 0.25(-0.10-0.10)(0.00-0.05) + 0.5(0.10-0.10)(0.05-0.05) + 0.25(0.30-0.10)(0.10-0.05) = 0.005$$

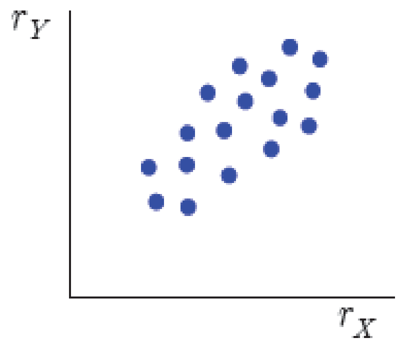
$$Cov(r_x, r_z) = \sigma_{xz} = 0.25(-0.10-0.10)(0.10-0.05) + 0.5(0.10-0.10)(0.05-0.05) + 0.25(0.30-0.10)(0.00-0.05) = -0.005$$

$$\rho_{xy} = \frac{0.005}{(0.1414)(0.0354)} = +1$$

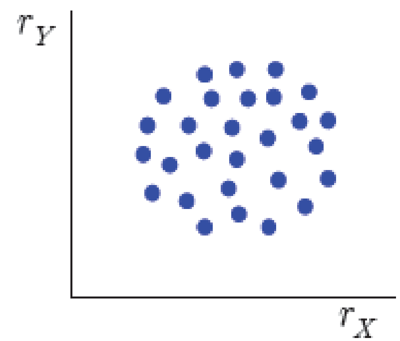
$$\rho_{xz} = \frac{-0.005}{(0.1414)(0.0354)} = -1$$



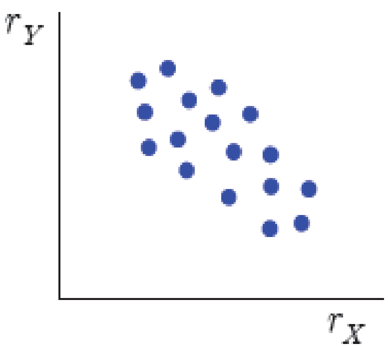
① $\rho_{XY} = +1$



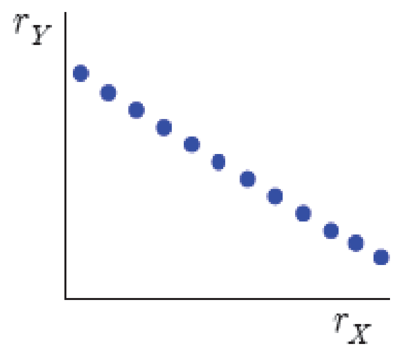
② $0 < \rho_{XY} < 1$



③ $\rho_{XY} = 0$



④ $-1 < \rho_{XY} < 0$



⑤ $\rho_{XY} = -1$

- 분산투자시 포트폴리오 위험(**portfolio risk**)을 줄이는 방법

- 구성 자산간의 상관관계가 적은 자산들로 포트폴리오

- 투자비율 조정

- 주식X(50%) + 주식Y(50%인 포트폴리오
- 주식X(50%) + 주식Z(50%)인 포트폴리오
- 주식X(20%) + 주식Z(80%)인 포트폴리오 의 기대수익률과 위험을 구하라.

<기대수익>

(1) $E(R_p) = (0.5)(0.10) + (0.5)(0.05) = 0.075$

(2) $E(R_p) = (0.5)(0.10) + (0.5)(0.05) = 0.075$

(3) $E(R_p) = (0.2)(0.10) + (0.8)(0.05) = 0.060$

<분산>

(1) $\sigma^2 (R_p) = (0.5)^2(0.02) + (0.5)^2(0.00125) + 2(0.5)(0.5)(0.005) = 0.0078$

(2) $\sigma^2 (R_p) = (0.5)^2(0.02) + (0.5)^2(0.00125) + 2(0.5)(0.5)(-0.005) = 0.0028$

(3) $\sigma^2 (R_p) = (0.2)^2(0.02) + (0.8)^2(0.00125) + 2(0.2)(0.8)(-0.005) = 0.0000$

왜 ②의 경우가 ①의 경우보다도 위험이 감소하는가 ?

왜 ③ 의 경우가 ② 의 경우보다도 위험이 감소하는가 ?

(2) 위험감소의 원천

➢ 상관관계와 포트폴리오 위험

① ρ_{xy} = +1, 즉 두 자산간의 상관관계가 완전 정(+)의 관계에 있을 경우

$$\sigma_p^2 = (w_x\sigma_x + w_y\sigma_y)^2 \quad \therefore \ \sigma_p = w_x\sigma_x + w_y\sigma_y$$

② ρ_{xy} = −1, 즉 두 자산간의 상관관계가 완전 부(−)의 관계에 있을 경우

$$\sigma_p^2 = (w_x\sigma_x - w_y\sigma_y)^2 \quad \therefore \ \sigma_p = \left| w_x\sigma_x - w_y\sigma_y \right|$$

③ ρ_{xy} = 0, 즉 두 자산간의 상관관계가 영(0)인 경우

$$\sigma_p^2 = w^2{}_x\sigma^2{}_x + w^2{}_y\sigma^2{}_y \quad \therefore \ \sigma_p = \sqrt{w^2{}_x\sigma^2{}_x + w^2{}_y\sigma^2{}_y}$$

두 종목의 경우 포트폴리오 기대수익률과 분산

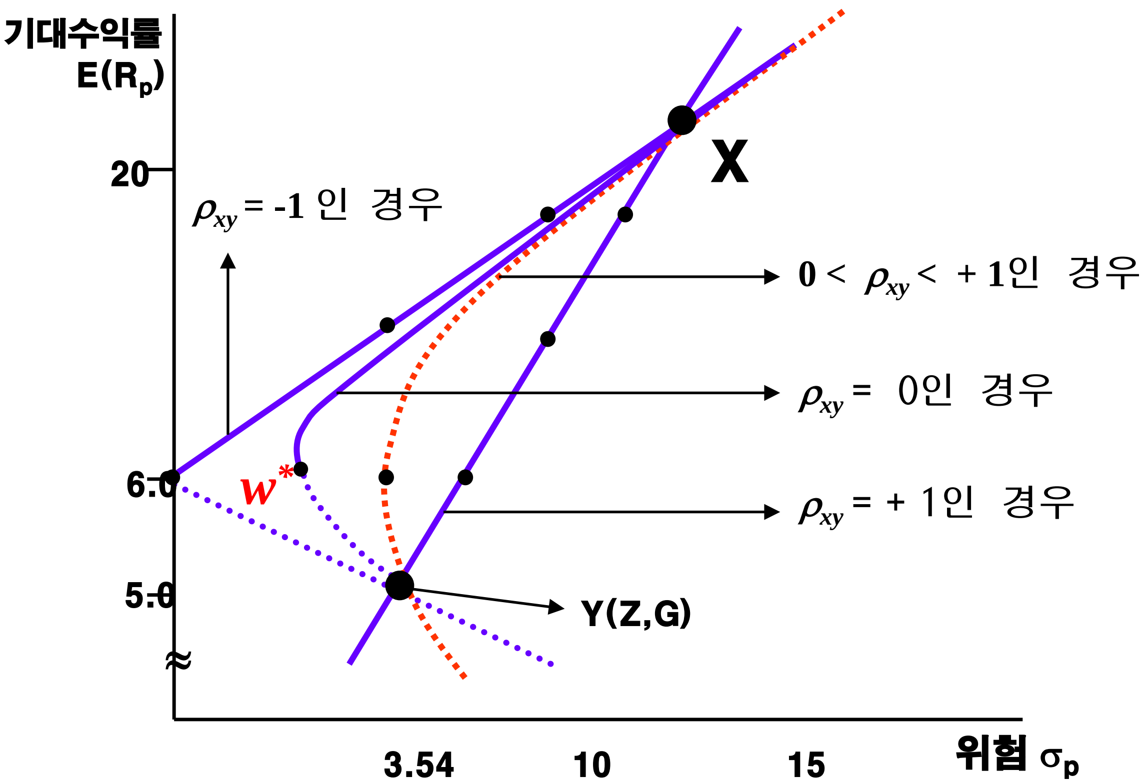
➢ 투자비율과 상관계수에 따른 포트폴리오 위험

① 투자금액의 비율		② $\rho_{XY}+1$일 때		③ $\rho_{XZ}=-1$일 때		④ $\rho_{XG}=0$ 일 때	
w_i	w_j	$E(R_p)$	σ_p	$E(R_p)$	σ_p	$E(R_p)$	σ_p
100%	0%	10.0%	14.1%	10.0%	14.1%	10.0%	14.1%
80	20	9.0	12.0	9.0	10.6	9.0	11.3
50	50	7.5	8.8	7.5	5.3	7.5	7.3
20	80	6.0	5.7	6.0	0.0	6.0	4.0
0	100	5.0	3.5	5.0	3.5	5.0	3.5
−20*	120	4.0	1.4	4.0	7.0	4.0	5.1

< 포트폴리오결합선 >

$$E(R_p) = w_x \cdot E(R_x) + w_y \cdot E(R_y)$$

$$\sigma_p^2 = w_x^2\sigma_x^2 + w_y^2\sigma_y^2 + 2w_xw_y\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$$



- 최소분산포트폴리오 (*MVP*)

$$w^* = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_{xy}}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}}$$

〔참고〕 최소분산포트폴리오 (MVP)의 도출

투자위험이 최소가 되는 포트폴리오(**minimum variance portfolio**)

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \bullet \sigma_1^2 + w_2^2 \bullet \sigma_2^2 + 2\, w_1\, w_2\, \sigma_{12}$$

$w_1 = w$ 라고 하면 $w_2 = (1 - w)$

$$\sigma_p^2 = w^2 \bullet \sigma_1^2 + (1 - w)^2 \bullet \sigma_2^2 + 2\, w(1 - w) \bullet \sigma_{12}$$

$\dfrac{\partial \sigma_p^2}{\partial w} = 0$ 이 되는 **w**를 구하면 **?**

$$w^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\sigma_{12}}$$

→ 첫번째 종목에 w^* 만큼 투자하고, 두번째 종목에는 $1-w^*$ 만큼 투자할 경우, 위험이 최소인 포트폴리오를 구성하게 됨

[예제]

투자기회로서 다음과 같은 수익률의 확률분포를 가지는 증권 1, 2, 3이 있다.

시장여건	확 률	증권 1	증권 2	증권 3
낙관	1/4	16%	4%	20%
중립	1/2	12	6	14
비관	1/4	8	8	8

(1) [illegible]

(2) 두 증권으로 포트폴리오를 구성할 경우의 공분산과 상관계수 ?

(3) 증권 1과 2에 50%씩 투자한 포트폴리오의 기대수익률과 위험(분산)?

(4) 증권 1과 2로 구성되는 포트폴리오에 있어서 최소분산포트폴리오를 구하라.

풀이

(1) $E(R_1) = 1/4(0.16) + 1/2(0.12) + 1/4(0.08) = 0.12$

$E(R_2) = 0.06, \qquad E(R_3) = 0.14$

$\sigma(R_1) = [1/4\,(0.16-0.12)^2 + 1/2\,(0.12-0.12)^2 + 1/4\,(0.08-0.12)^2]^{1/2} = (0.0008)^{1/2} = 0.0283$

$\sigma(R_2) = (0.0002)^{1/2} = 0.0141, \qquad \sigma(R_3) = (0.0018)^{1/2} = 0.0424$

(2) $\sigma_{12} = 1/4(0.16-0.12)(0.04-0.06) + 1/2(0.12-0.12)(0.06-0.06)$

$+ 1/4(0.08-0.12)(0.08-0.06) = -0.0004$

$\sigma_{23} = -0.0006, \qquad \sigma_{13} = 0.0012$

$$\rho_{12} = \frac{-0.0004}{0.0283 \times 0.0141} = -1, \qquad \rho_{23} = -1, \qquad \rho_{13} = +1$$

(3) $E(R_P) = 1/2\,(0.12) + 1/2\,(0.06) = 0.09$

$\sigma_p^2 = (1/2)^2(0.0008) + (1/2)^2(0.0002) + 2(1/2)(1/2)(-0.0004) = 0.00005$

(4) $$w_1 = \frac{0.0002-(-0.0004)}{0.0008+0.0002-2(-0.0004)} = \frac{1}{3}$$

$w_2 = 1 - 1/3 = 2/3$ ∴ 증권 1에 33.3%, 증권 2에 66.7% 투자

이때의 $E(R_P)$, σ_p^2은 다음과 같다.

$E(R_P) = 1/3(0.12) + 2/3(0.06) = 0.08$

$\sigma_p^2 = (1/3)^2(0.0008) + (2/3)^2(0.0002) + 2(1/3)(2/3)(-0.0004) = 0$

5. 분산투자와 위험감소효과

(1) N종목의 경우 **Portfolio** 기대수익과 위험의 측정

$w_1, w_2, \ldots\ldots\ w_n$: 주식 1, 2, … n에 대한 투자비율

$E(R_1), E(R_2), \ldots\ldots\ E(R_n)$: 주식 1, 2, … n의 기대수익률

$\sigma^2_1, \sigma^2_2, \ldots\ldots\ \sigma^2_n$: 주식 1, 2, … n의 분산

$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \ldots\ldots\ \sigma_{n-1,n}$: 주식 1과 2, 2와 3, n-1과 n간의 공분산

1) n=2 case

$$E(R_p) = w_1 \cdot E(R_1) + w_2 \cdot E(R_2)$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2(w_1 w_2 \sigma_{12})$$

= 개별종목 고유위험 + 타종목과의 공분산위험

〔예제〕	$E(R_j)$	σ_j	σ_{ij}	w_j
X자동차	20%	0.30	+ 0.06	
Z항공	30%	0.40		

$$E(R_p) = w_1 \cdot E(R_1) + w_2 \cdot E(R_2)$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2(w_1 w_2 \sigma_{12})$$

= 개별종목 고유위험 + 타종목과의 공분산위험

2) n=3 case

$$E(R_p) = w_1 \cdot E(R_1) + w_2 \cdot E(R_2) + w_3 \cdot E(R_3)$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + w_3^2 \cdot \sigma_3^2 + 2\,(w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_3 \sigma_{23} + w_1 w_3 \sigma_{13})$$

= 개별종목 고유위험 + 타종목과의 공분산위험

〔예제〕	$E(R_j)$	σ_j	σ_{ij}	w_j
X자동차	20%	0.30		
			+ 0.06	
Z항공	30%	0.40		
			− 0.02	
W정유	15%	0.10		

2) n=∞ case

$$E(R_p) = w_1 \bullet E(R_1) + w_2 \bullet E(R_2) + w_3 \bullet E(R_3) - - - + w_n \bullet E(R_n)$$

$$E(R_p) = \Sigma\, w_j \bullet E(R_j)$$

$$\sigma_p^{\,2} = w_1^{\,2} \bullet \sigma_1^{\,2} + w_2^{\,2} \bullet \sigma_2^{\,2} + w_3^{\,2} \bullet \sigma_3^{\,2} - - - + w_n^{\,2} \bullet \sigma_n^{\,2}$$

$$+ 2\,(w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_3 \sigma_{23} + - - - + w_n w_1 \sigma_{n1})$$

= n개 분산 + n(n-1)개 공분산

$$\sigma_p^{\,2} = w_1 w_1 \bullet \sigma_{11} + w_2 w_2 \bullet \sigma_{22} + w_3 w_3 \bullet \sigma_{33} - - - + w_n w_n \bullet \sigma_{nn}$$

$$+ 2\,(w_1 w_2 \sigma_{12} + w_2 w_3 \sigma_{23} + - - - + w_n w_1 \sigma_{n1})$$

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sigma_p^{\,2} = \sum_{(i=j)} w_i^{\,2} \sigma_i^{\,2} + \sum\sum_{(i \neq j)} w_i w_j \sigma_{ij}$$

개별종목 고유위험 + 타종목과의 공분산위험

n종목 포트폴리오의 위험 : 공분산 행렬

주식 i / 주식 j	1	2	3	4		n
1	$W^2_1\square^2_1$ $=w_1w_1\square_{11}$	$W_2 W_1 \square_{21}$	$W_3 W_1 \square_{31}$	$W_4 W_1 \square_{41}$		$W_n W_1 \square_{n1}$
2	$W_1 W_2 \square_{12}$	W22□22 =w2w2□22	$W_3 W_2 \square_{32}$	$W_4 W_2 \square_{42}$		$W_n W_2 \square_{n2}$
3	$W_1 W_3 \square_{13}$	$W_2 W_3 \square_{23}$	$W^2_3\square^2_3$ $=w_3w_3\square_{33}$	$W_4 W_3 \square_{43}$		$W_n W_3 \square_{n3}$
4	$W_1 W_4 \square_{14}$	$W_2 W_4 \square_{24}$	$W_3 W_4 \square_{34}$	$W^2_4\square^2_4$ $=w_4w_4\square_{44}$		$W_n W_4 \square_{n4}$
n	$W_1 W_n \square_{1n}$	$W_2 W_n \square_{2n}$	$W_3 W_n \square_{3n}$	$W_4 W_n \square_{4n}$		$W^2_n\square^2_n$ $=w_nw_n\square_{nn}$

$$\sigma_p^{\,2} = \Sigma\Sigma\; w_i w_j\, \sigma_{ij}$$

$\sigma_p^{\,2}$ = 개별종목 고유위험 + 타종목과의 공분산위험

$$\sigma_p^{\,2} = \underset{(i=j)}{\Sigma} w_i^{\,2}\,\sigma_i^{\,2} \;+\; \underset{(i\neq j)}{\Sigma\Sigma} w_i w_j\, \sigma_{ij}$$

(2) 구성자산의 수와 위험감소효과

- **n 종목, 동일투자비율 포트폴리오** $W_1 = W_2$ - - - - = $1/n$

$$\sigma_p^2 = \Sigma\Sigma W_i W_j \sigma_{ij} = \underset{(i=j)}{\Sigma W_i^2 \sigma_i^2} + \underset{(i\neq j)}{\Sigma\Sigma W_i W_j \sigma_{ij}}$$

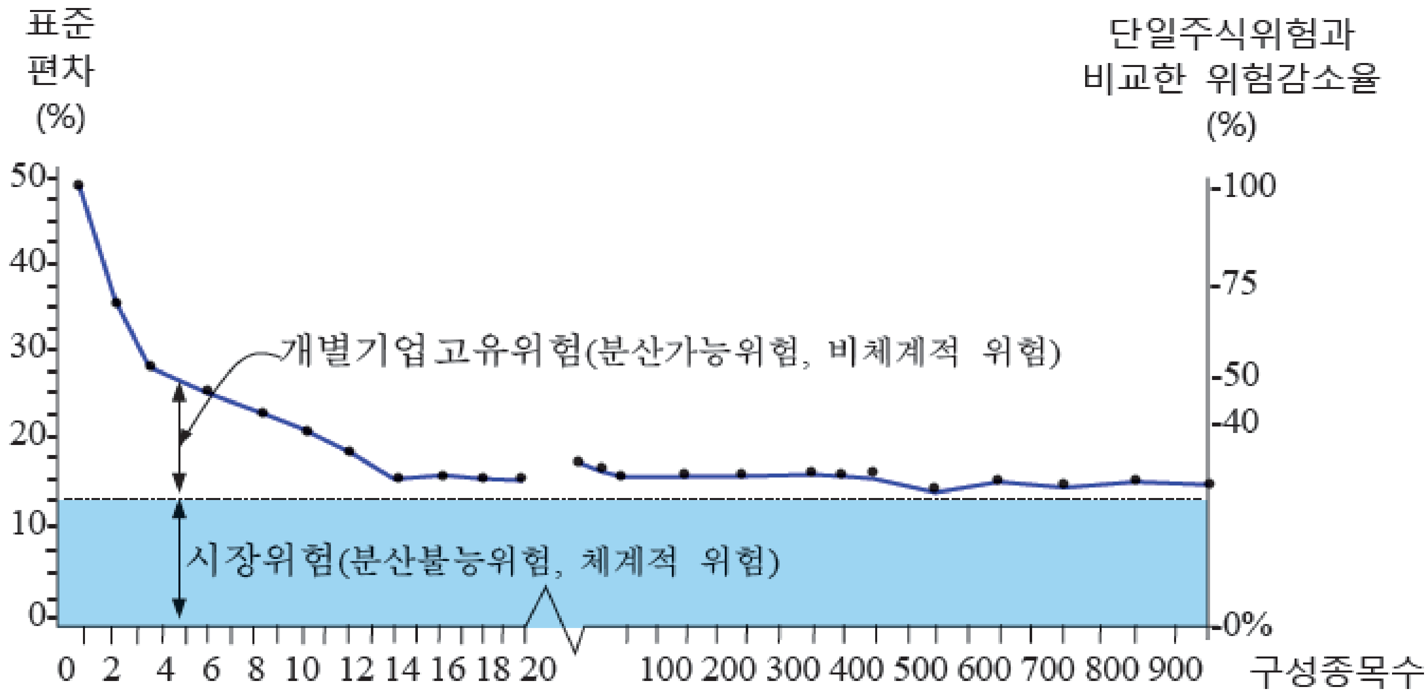
$$= \Sigma(1/n)^2\sigma_i^2 + \Sigma\Sigma(1/n)(1/n)\sigma_{ij}$$

$$= (1/n)^2 \Sigma\sigma_i^2 + (1/n^2)\Sigma\Sigma\sigma_{ij}$$ (개별종목 분산평균 : $\overline{\sigma}^2$, 공분산 평균 : $\overline{\sigma}_{ij}$)

$$\sigma_p^2 = (1/n)^2 \bullet \overline{\sigma_i^2} \bullet n + (1/n^2) \bullet \overline{\sigma_{ij}} \bullet n(n-1)$$

$$= (1/n) \bullet \overline{\sigma_i^2} + (1 - 1/n) \bullet \overline{\sigma_{ij}}$$

$\lim_{n \to \infty} \sigma_p^2$	$\cong$	0	+	$\overline{\sigma}_{ij}$
	=	기업고유위험 (분산가능위험) (비체계적위험)	+	시장공통위험 (분산불가능위험) (체계적위험)



〔투자관리에의 함축〕

1) 종목수 증가에 따른 위험저감현상은 (체감)한다.

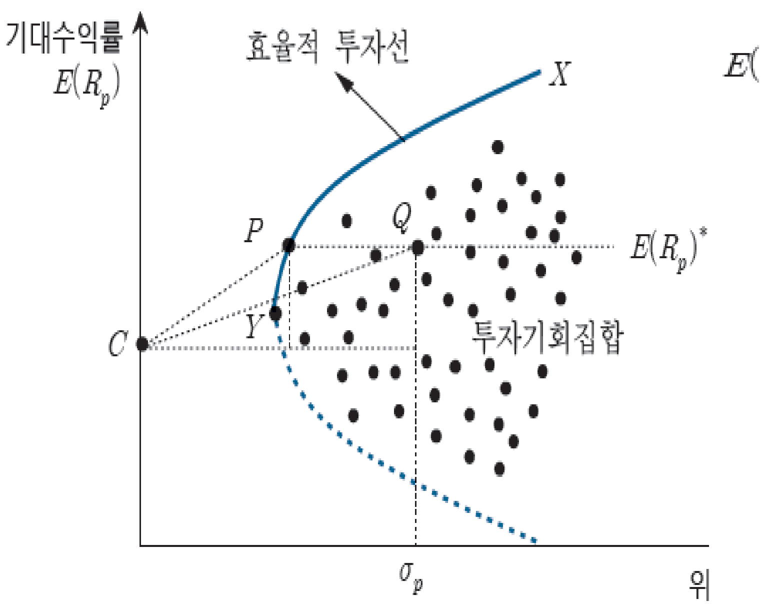
2) 여러 종목에 걸쳐 분산투자하는 경우 투자위험관리의 주된 대상은 (시장위험)이지 개별종목 고유위험이 아니다.

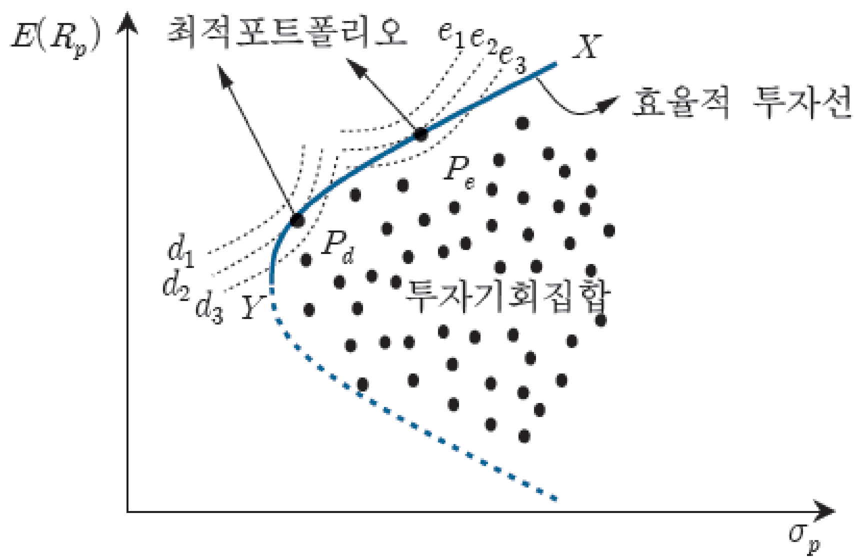
(3) 위험자산의 최적 선택

1) 효율적 포트폴리오 구성

maximize $\theta = \dfrac{E(R_p)^* - C}{\sigma_p}$

subject to $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1.0$





6. 무위험자산과 효율적포트폴리오

1)무위험자산

$E(R_f) = R_f$, $\sigma(R_f) = 0$

2) 무위험자산과 위험자산(A)으로 구성된 포트폴리오의 기대수익률과 위험

$E(R_p) = w \bullet E(R_A) + (1 - w) \bullet R_f = R_f + w \bullet [E(R_A) - R_f]$------1)

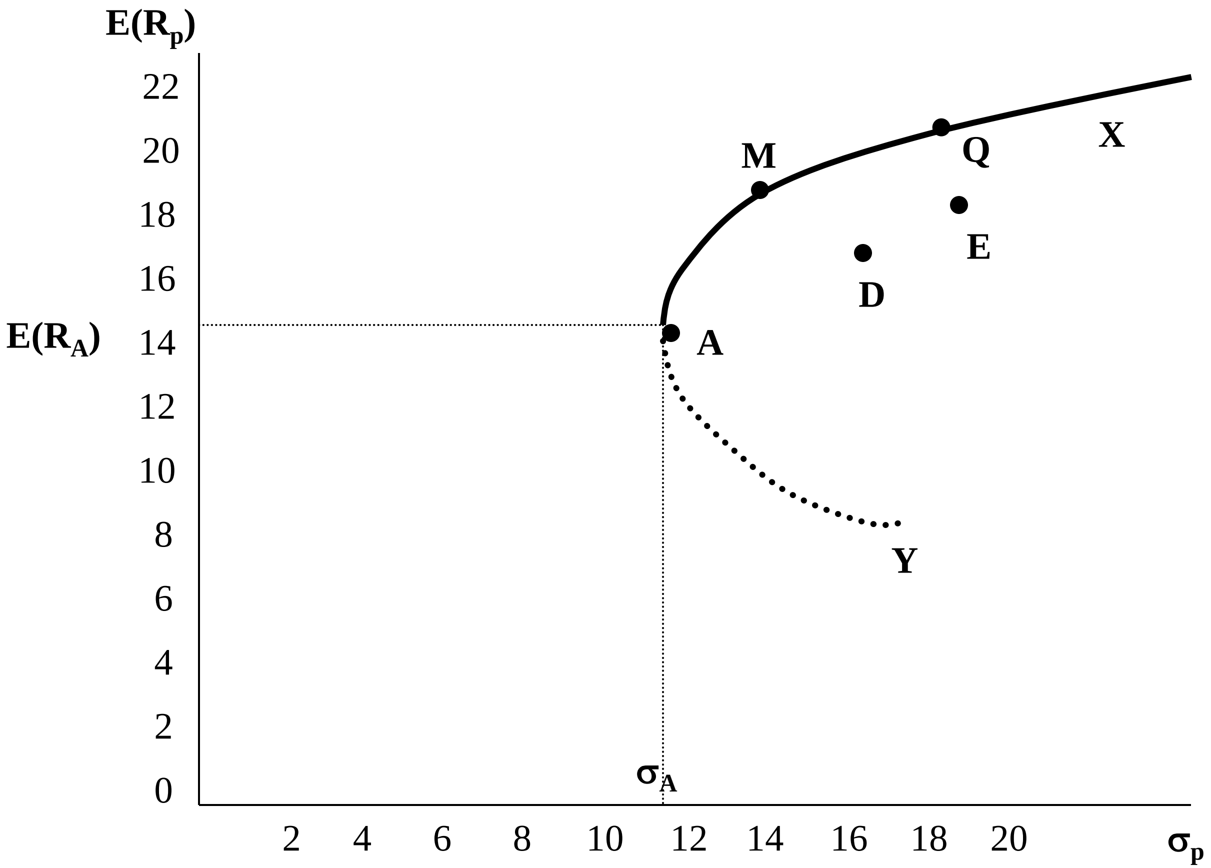
$\sigma_p^2 = w^2 \bullet \sigma_A^2 + (1 - w)^2 \bullet \sigma_{Rf}^2 + 2w(1 - w) \bullet \sigma_{A,Rf} = w^2 \bullet \sigma_A^2$

$\sigma_p = w \bullet \sigma_A$-------2) 2)를 w에 대하여 정리하여 1)에 대입한 후 기대수익률에 대하여 정리하면

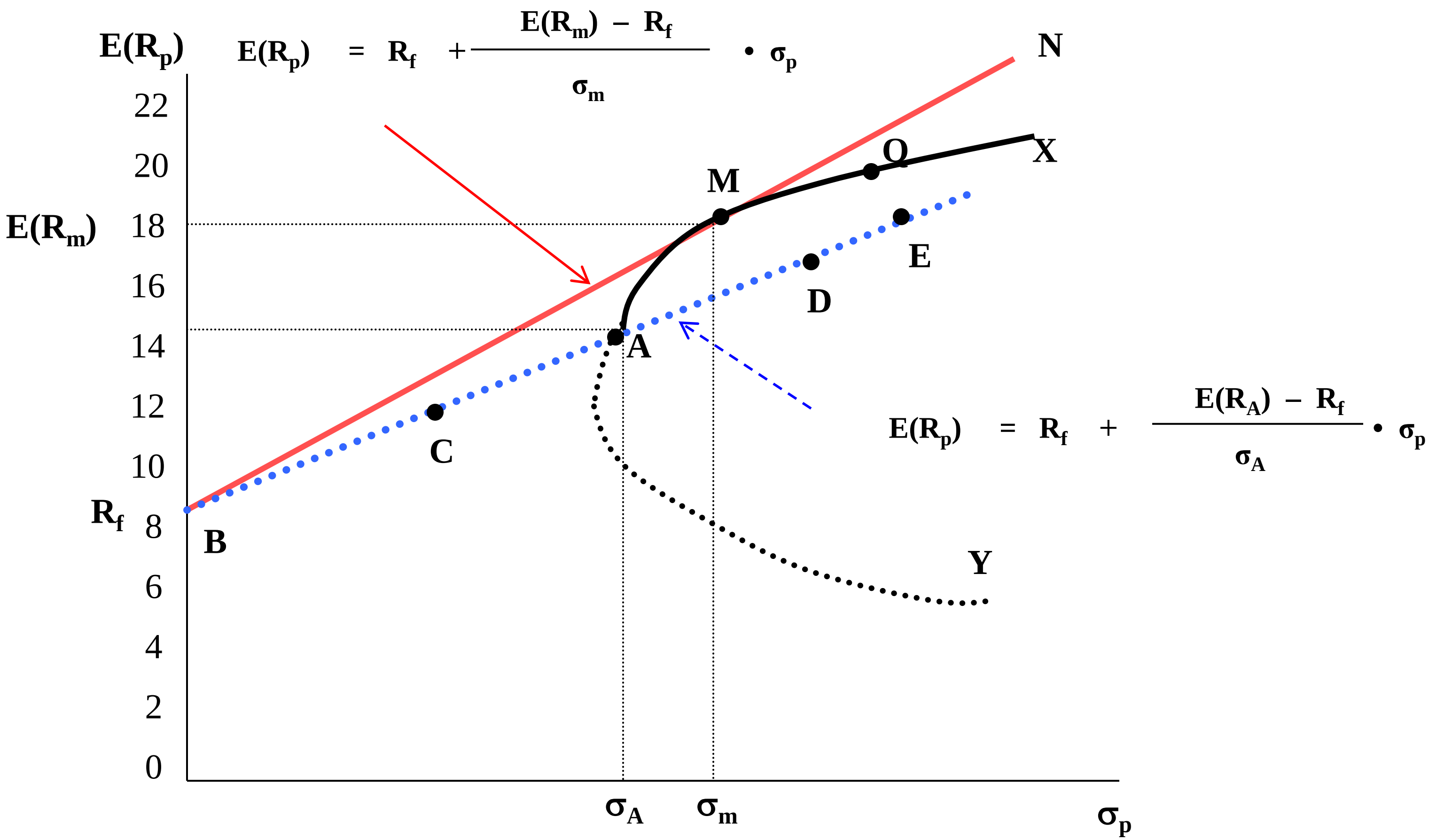
포트폴리오 투자기회집합(자본배분선)이 도출된다.

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_A) - R_f}{\sigma_A} \bullet \sigma_p$$

<그림> 위험자산만을 투자대상으로 할 경우의 투자기회



<그림> 무위험자산이 포함될 때의 투자기회



- 새로운 효율적 포트폴리오 : $R_f M N$

⟶ 주식과 같은 위험자산만으로 포트폴리오를 구성하는 것보다 무위험자산을 포트폴리오에 포함시켜 자산을 배분하는 것이 훨씬 우월한 투자성과를 기대케 함

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_A) - R_f}{\sigma_A} \cdot \sigma_p$$

- RVAR $= \frac{E(R_A) - R_f}{\sigma_A}$ (*RVAR* = 투자보수대 변동성 비율)

RVAR = 투자보수대 변동성 비율이 가장 큰 직선이 효율적 포트폴리오 집합

$$E(R_p) = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_p$$

* $R_f a$, $R_f MN$ 상의 RVAR(기울기)는 변하지 않는다.

예제

기대수익률과 표준편차가 다음과 같은 주식펀드 A가 있고, 이자율이 6%인 무위험자산이 있다. 이제 이 두 펀드로 포트폴리오를 구성하고자 한다.

주식펀드 A의 기대수익률과 표준편차 : $E(R_A)=18\%$, $\sigma_A=12\%$

(1) 이제 주식펀드 A와 무위험자산 두 펀드에 대한 투자비율을 60 : 40으로 구성할 때 포트폴리오의 기대수익률과 위험을 계산하라.

(2) 100% 전부를 주식펀드 A에 투자하는 것과 50 : 50으로 나누어 투자하는 것 사이에 투자보수 대 변동성비율이 차이가 있는가?

(3) 이 경우 자본배분선은 어떻게 표시되는가?

풀이

(1) 주식펀드에 대한 투자비율을 w, 무위험자산에 대한 투자비율을 $1-w$라고 표시하면, 포트폴리오 기대수익률과 위험은 다음 식과 같다.

$$E(R_p)=R_f+w[E(R_A)-R_f]=0.06+(0.6)(0.18-0.06)=0.132(13.2\%)$$

$$\sigma_p=w\cdot\sigma_A=(0.6)(0.12)=0.072$$

(2) 투자위험이 한 단위 증가할 때 얻게 되는 위험보상률의 증가, 즉 투자보수 대 변동성비율은 투자금액의 비율에 관계없이 일정하다. 이 결과에서 포트폴리오 기대수익률은 위험에 선형적으로 비례함을 확인할 수 있다.

$$\frac{E(R_A)-R_f}{\sigma_A}=\frac{0.18-0.06}{0.12}=\frac{0.12}{0.12}=1.0$$

(3) $E(R_p)=R_f+\dfrac{E(R_A)-R_f}{\sigma_A}\sigma_p=0.06+1.0\sigma_p$

수고하셨습니다.