5-5 굽힘응력

두 개의 동일한 크기의 집중하중 P가

작용하는 1-2구간

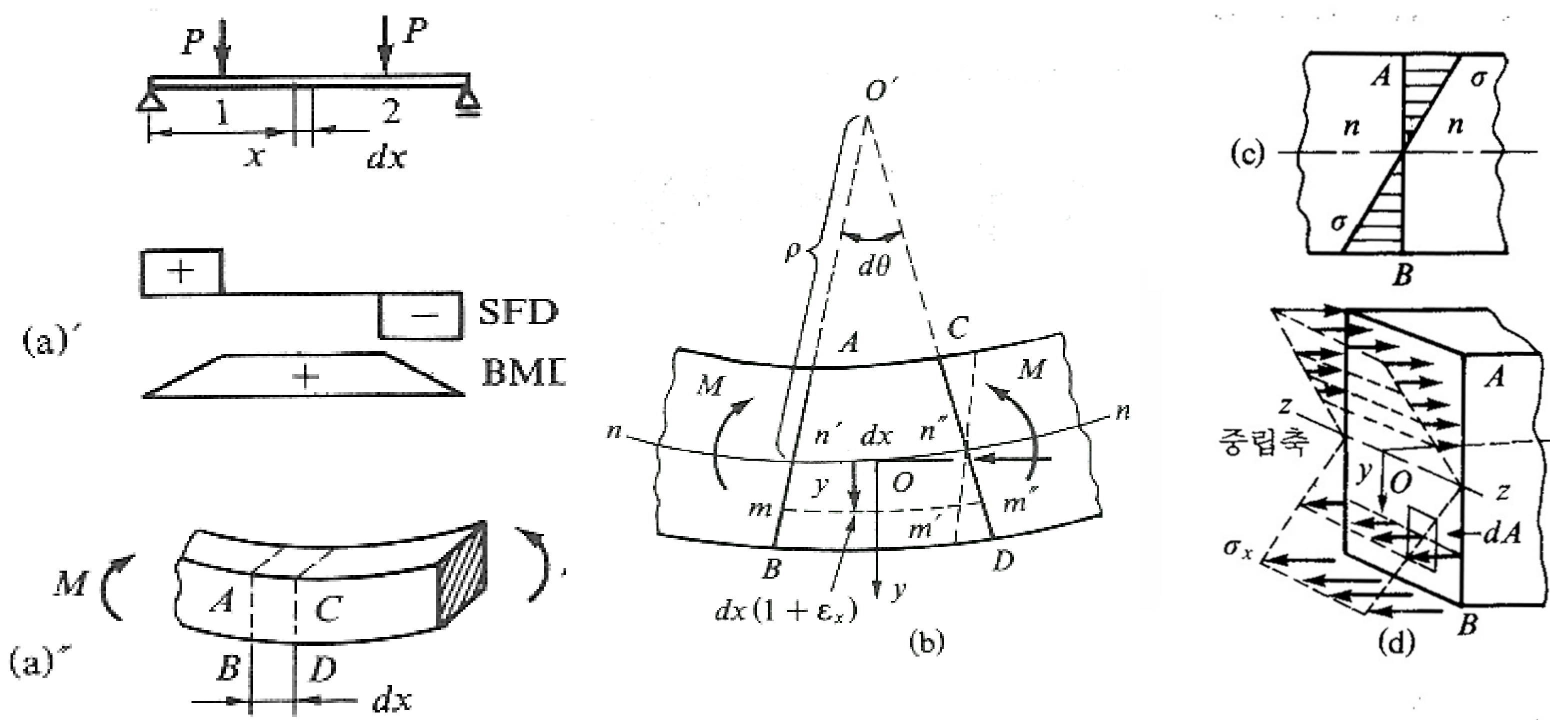
전단력이 존재하지 않고 균일한

굽힘모멘트만 존재함

◈ 순수굽힘(Pure bending)

: 같은 크기의 굽힘모멘트만이 작용하고

전단력이 없는 경우



[그림 5-11(a)] 굽힘응력(사각형 단면의 예)

▷보내에서의 굽힘응력의 해 ◁

⇒ 순수굽힘하에 다음과 같은 가정을 두어 해를 구함

(1) 균일단면의 곧은 보의 문제만 취급한다.

(2) 정하중을 받는 경우만 생각한다.

(3) 보의 단면은 하중면에 대해서 대칭이다.

(4) 보의 재료는 균질이다.

(5) 탄성한계 이하에서 취급한다.

(6) 인장이나 압축의 탄성계수는 동일하다.

(7) 변형은 작아서 항상 원래의 치수를 그냥 사용한다.

(8) 굽히기 전의 보의 횡단면은 굽히고 난 후에도 평면이다.

1-2구간에서 d_x의 미소부분의 평형관계를 생각.

이 때 보는 아래가 인장, 위는 압축이 되며 그 중간에 nn축은 인장도 압축도 아닌 길이의 변화가 없는 곳이 있게 되는데 이면을 중립면이라 한다.

이 중립면(中立面)상의 한 점을 원점 O로 하는 좌표축을 생각한다.

굽히고 난 후의 AB, DC단면은 n-n과는 수직이고 평면인 채로 약간 경사지게 됨

mm′-m´m´´만큼 늘어나고 처음 길이는 d_x이므로

m´m´´/ dx= ε_x

$$\varepsilon_x = \frac{\widehat{m'm''}}{\widehat{n'n''}} = \frac{y \cdot d\theta}{dx} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} \qquad (5\text{-}1)$$

미지수 ρ가 있어 σ_x 의 성질은 알 수 있어도크기는 알 수 없음

$$\Sigma P_x = 0 : \int_A \sigma_x \cdot dA = 0, \int E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int y dA = 0$$

$$\therefore \int y dA = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

⇒ 이 식은 Z축에 관한 면적모멘트가 0이므로

Z축은 도심을 지나는 축이 된다.

$$\Sigma M_{z-z} = 0 : \int_A (\sigma_x \cdot dA) \cdot y = M \qquad (5\text{-}3)$$

$$\int_A \frac{y}{\rho} E \cdot dA \cdot y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M \qquad (5\text{-}4)$$

$$\int_A y^2 dA = I_z \tag{5-5}$$

관성모멘트(moment of inertia)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \quad \text{(Bernoulli-Euler 의 법칙)} \tag{5-6}$$

굽힘강성(flexual rigidity)

⦿ 굽힘강성 : 단위의 곡률변화를 주는데 필요한 굽힘모멘트

(GI_p : 비틀림 강성, AE : 축 강성에 대응하는 식임)

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y \tag{5-7}$$

여기서 I_z는 단면 2차 모멘트(second moment of area) 또는

단면의 관성모멘트(moment of inertia)라 한다.

(첨자 z는 z축에 의한 관성모멘트라는 뜻)

$$\sigma_{max} = \frac{M}{I_z} c_1, \quad \sigma_{min} = \frac{M}{I_z}(-c_2) \qquad (5\text{-}8)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{max} = \dfrac{M}{Z_1}, \quad \sigma_{min} = -\dfrac{M}{Z_2} \\ \text{단,} \quad Z_1 = \dfrac{I_z}{c_1}, \quad Z_2 = \dfrac{I_z}{c_2} \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}9)$$

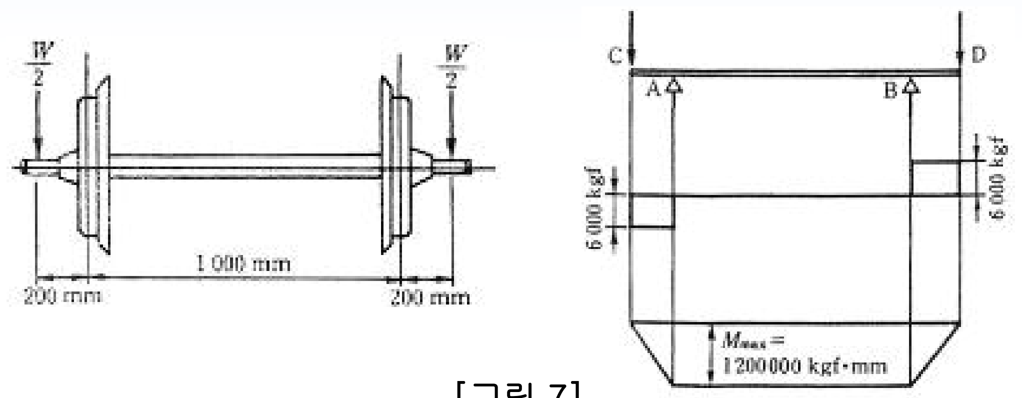
Z_1, Z_2 : 단면계수(section modulus)

c_1, c_2 : 중립축과 인장, 압축측 단면 끝까지의 거리

$\sigma_{max} \rightarrow \sigma_{al}$

$$Z = \frac{M_{max}}{\sigma_{al}} \qquad (5\text{-}10)$$

[예제 5-7] [그림 7]과 같은 차축이 12톤(W)의 하중을 받을 때 허용굽힘응력 σ_B=4.7kgf/mm^{2}으로 하여 축의 직경을 구하라.



[그림 7]

❖풀이

$$R_A \times 1{,}000 - 6{,}000 \times (1{,}000 + 200) + 6{,}000 \times 200 = 0$$

$$R_A = \frac{6{,}000 \times 1{,}200 - 6{,}000 \times 200}{1{,}000} = 6{,}000\,(\mathrm{kgf})$$

$$R_A + R_B - 6{,}000 - 6{,}000 = 0$$

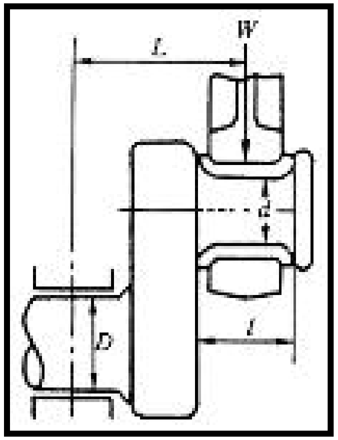
$$R_B = 6{,}000\,(\mathrm{kgf})$$

$$M_{\max} = M_{A\sim B} = -6{,}000 \times 200 = -1{,}200{,}000\,(\mathrm{kgf \cdot mm})$$

$$M_{\max} = \sigma_b Z = \frac{\pi d^3}{32}\sigma_b$$

$$\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi\sigma_b}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 1200000}{\pi \times 4.7}} \fallingdotseq 137.5\,(\mathrm{mm})$$

[예제 5-8] [그림 8]과 같은 외팔형 크랭크축에서 핀(pin)에 W=1,800kgf 의 수직하중이 걸릴 때 크랭크 핀의 직경 d와 길이 l 을 구하라. 단 l/d=1.5이고 허용굽힘응력 σ_b=6kgf/mm^{2}이다.



[그림 8]

❖풀이

$$M_{max} = \frac{1}{2}Wl = \frac{1}{2}W\left(\frac{l}{d}\right) \times d$$

$$M_{max} = \sigma_b Z, \quad Z = \frac{\pi}{32}d^3$$

$$= \frac{\pi}{32}d^3 \times \sigma_b$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}W(\frac{l}{d})d = \frac{\pi}{32}d^3\sigma_b$$

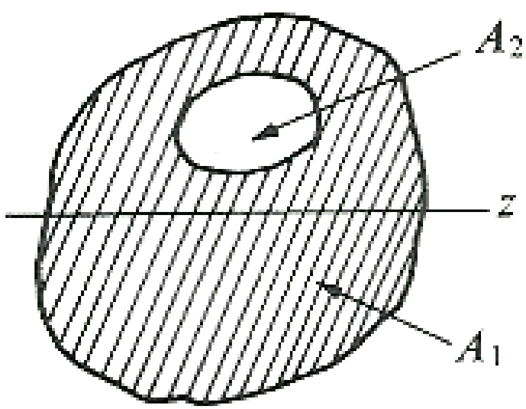
$$d = \sqrt{\frac{16W(\frac{l}{d})}{\pi\sigma_b}}$$

$W = 1{,}800kgf$, $l/d = 1.5$, $\sigma_b = 6\text{kgf/mm}^2$ 이므로

$$\therefore \begin{cases} d = \sqrt{\dfrac{16 \times 1{,}800 \times 1.5}{\pi \times 6}} \fallingdotseq 48\text{mm} \\ l = 1.5d = 1.5 \times 48 = 72(\text{mm}) \end{cases}$$

5-6 단면의 관성모멘트

$I_z = \int y^2 dA$ 는 중립축 z에 관한 관성모멘트. r=√I/A라고 놓고 이 때 r은 관성반지름(radius of gyration) 또는 단면 $(r_z = \sqrt{I_z/A},\ r_y = \sqrt{I_y/A})$



[그림 5-12] 면적을 분할시킬 때

단면적 $A=A_1+A_2+\cdots$로 분할할 때

$$I_z = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \cdots \tag{a}$$

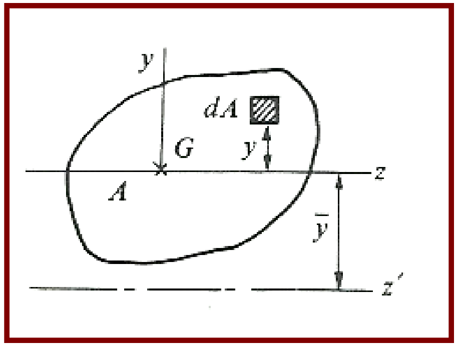
$A=A_1-A_2$일 때

$$I_z = \int_{A_1} y^2 dA - \int_{A_2} y^2 dA \tag{b}$$

정리 I

평행축의 정리(parallel-axis theorem)

: 관성모멘트가 그림처럼 도심(centroid)축을 지나지 않는 경우에 사용



[그림 5-13] z에 평행축 z′

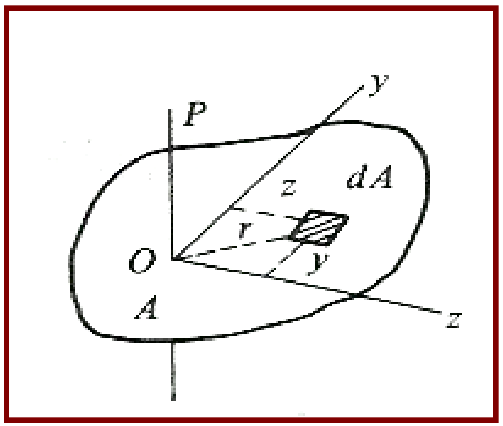
$$I_{z'} = \int_A (y+\bar{y})^2 dA = \int_A y^2 dA + 2\bar{y}\int_A y\,dA + \bar{y}^2 \int_A dA$$
$$= I_z + \bar{y}^2 A \qquad (5\text{-}11)$$

단, $\int_A dA = A, \qquad \int_A y\,dA = 0 \qquad (5\text{-}2)$

정리 II

극관성모멘트(polar inertia moment)

: 단면내의 임의 직교축 (Z,Y축), 또 그 단면에 수직인 축을 P축이라면 P축에 관한 단면 A의 관성모멘트는 다음과 같다.



[그림 5-14] 단면에 수직인 P축

$$I_P = \int_A r^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA$$
$$= \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_z \qquad (5\text{-}12)$$

⇒ 이때 같은 원점을 지나는 또 다른 직교축 z_1, y_1축에 대해서도 마찬가지로 $I_p = I_{z_1} + I_{y_1}$가 된다. 이 I_p를 극관성모멘트라 한다.

5-7 단면계수의 비교

보의 설계

굽힘강성을 크게 할뿐 아니라 경제적인 측면에서도 고려해야 함으로 동일조건 하에서 단면적이 크도록 해야 함.

(1) 사각형 단면 :

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} \qquad \begin{cases} b : \text{폭} \\ h : \text{높이} \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Z를 크게 하려면 h를 크게 할수록 더욱 효과적. 즉 정사각형 보다 높이가 큰 직사각형이 유리하지만 너무 높게 하면 좌굴 발생.

(2) 원형 단면 :

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8} = 0.125Ad \quad \text{(예제 4-5에서)} \qquad \text{(b)}$$

(a)와 비교를 위해 h=√π·d/2인 정사각형을 고려, 사각형의 경우 Z=0.148Ad이므로 정사각형의 단면이 원형단면보다 더욱 효과적

(3) I형 단면 :

그림과 같이 단면적을 두 부분으로 나누어 중립축에서 먼 곳에 배치 즉, A/2를 h/2의 거리에 두도록 함

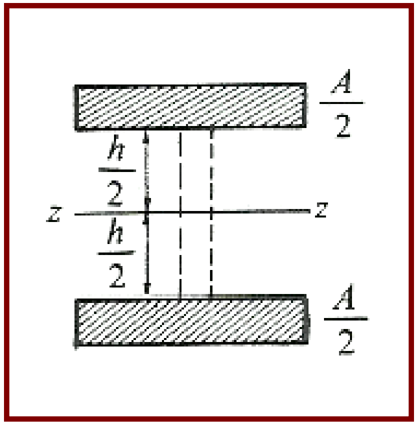


그림 5-16 I형 단면

웨브(web)가 존재

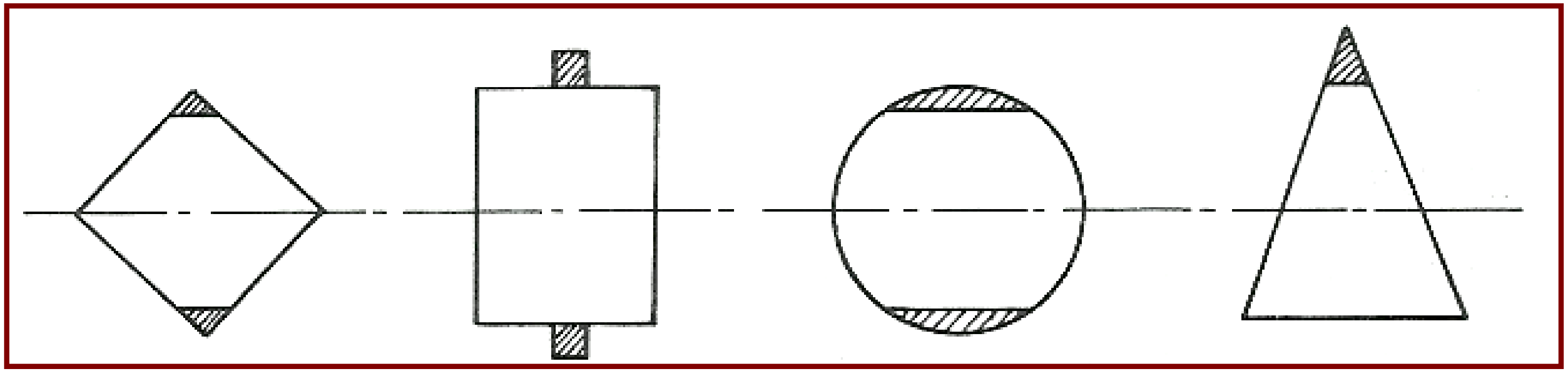
$$Iz = 2 \times \frac{A}{2} \times \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ah^2}{4}, Z = \frac{1}{2}Ah \qquad \text{(c)}$$

$$Z \fallingdotseq 0.3Ah \qquad \text{(d)}$$

이상 세가지 단면에서 비교하여 보면 I형 단면이 Z가 가장 크므로 경제적이며 그 다음으로 사각형단면임을 알 수 있다.

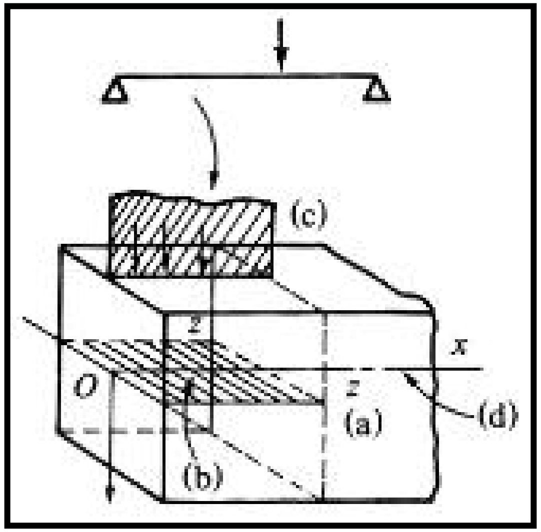
또한, I형 단면에서는 위의 다른 단면에 비해 좌굴(buckling)도 생기기 어렵기 때문에 보의 단면형태로 널리 사용된다.

Z=I/c(단면계수). 그림과 같이 빗금부분이 단면의 위나 아래에 있을 때는 이 돌기 부분을 없앰으로써 단면계수가 더 커지게 된다. 이것은 작은 면적을 제거함으로써 생긴 I_Z의 감소가 단면높이의 감소보다 작기 때문이다. 그러면, 작은 면적 부분에 큰 힘을 집중적으로 받게 되는 것을 방지하게 된다.



[그림 5-15] 단면의 돌기 부분(빗금 부분)

[예제 5-9] [그림 9(a)]는 사각형단면 보의 일부분을 나타낸다.
(a), (b), (c) 및 (d)의 명칭을 써보라



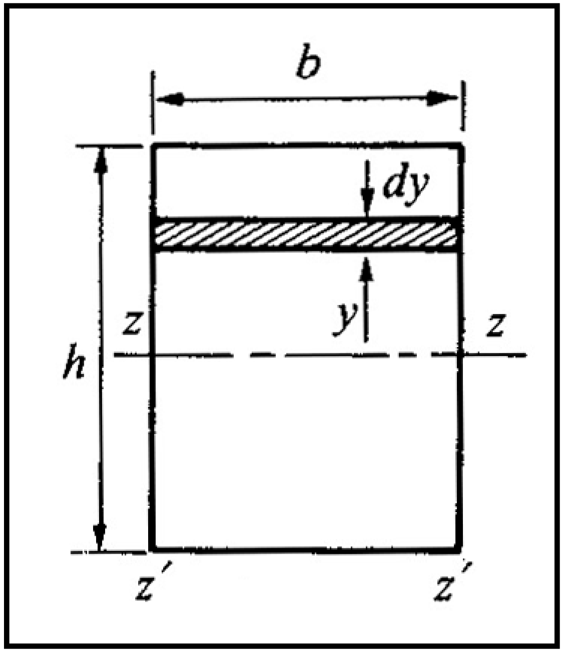
[그림 9(a)]

❖풀이

(a) 중립축(모멘트축, z−z축)
(b) 중립면,
(c) 하중면,
(d) 중심축(축심, O−z축)

[예제 5-10]

[그림 9(b)]의 사각형단면의 관성모멘트를 구하라.



[그림 9(b)]

❖풀이

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}$$

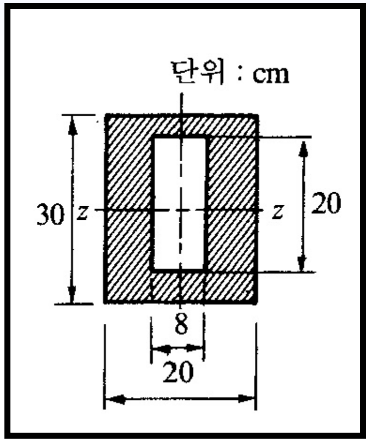
또는 $$2 \times \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b\,dy = \boxed{\frac{bh^3}{12}}$$

여기서 z-z는 도심축

$$I_{z'-z'} = \begin{cases} \int_0^h y^2 \cdot b\,dy = \frac{bh^3}{3} \text{ 또는} \\ I_z + \bar{y}^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{bh^3}{3} \end{cases}$$

$$\therefore Z = \frac{I_z}{h/2} = \boxed{\frac{bh^2}{6}}$$

[예제 5-11] 그림 같이 속이 빈 사각형 단면의 빗금친 부분의 I_z를 구하라.



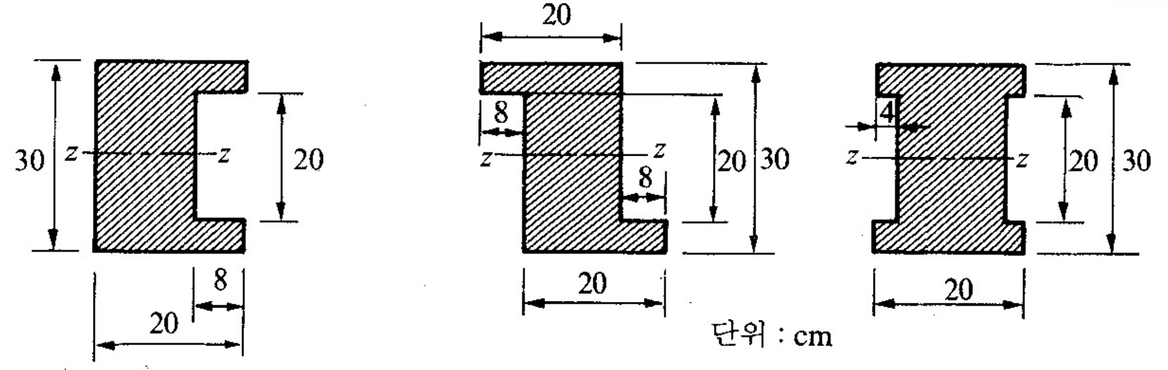
[그림 10]

❖풀이

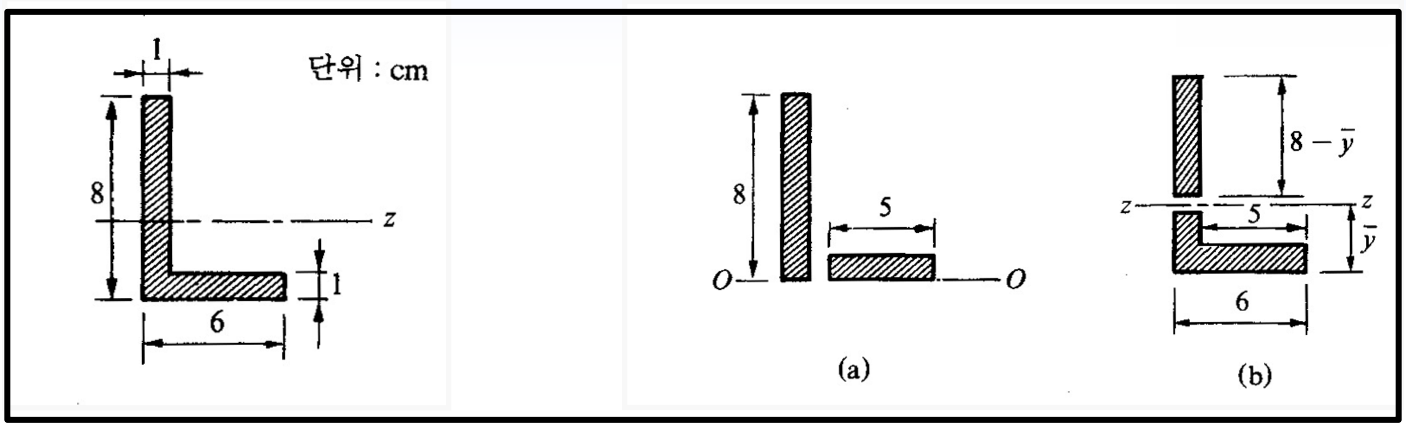
$$I_z = \frac{20 \times 30^3}{12} - \frac{8 \times 20^3}{12} = 39{,}667\,\text{cm}^4$$

참고

아래 단면들은 I_z는 같으나 I_y는 모두 다르다



[예제 5-12] [그림 11]의 형단면의 도심축인 축에 관한 를 구하라.



[그림 11]

❖풀이

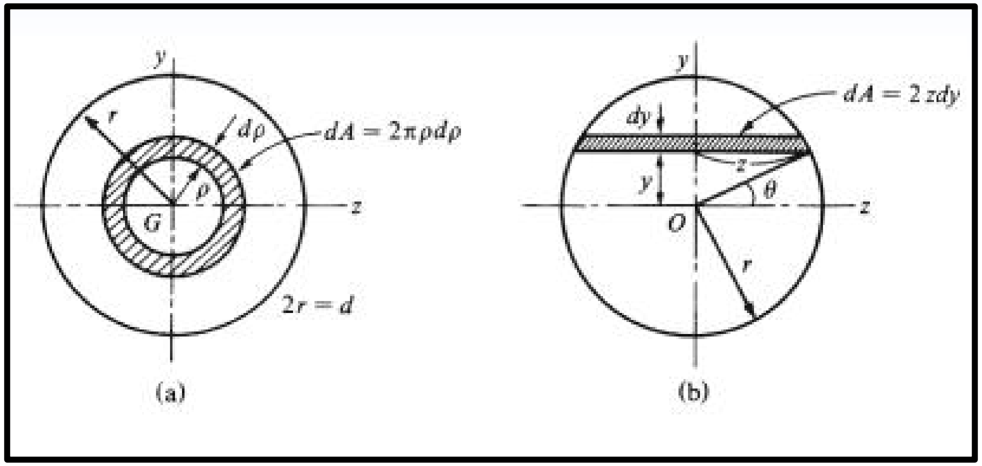
그림(a)처럼 분할하여 각 형상의 중립축을 구한다.

$$\bar{y} = \frac{8 \times 1 \times 4 + 5 \times 1 \times 0.5}{8 \times 1 + 5 \times 1} = 2.65\,\mathrm{cm}$$

그림(b)처럼 중립축을 기준하여 분할하고 I_z*를 구한다.*

$$\boxed{I_z = \frac{1 \times (8 - \bar{y})^3}{3} + \frac{6 \times \bar{y}^3}{3} - \frac{5 \times (\bar{y} - 1)^3}{3} = 81\,\mathrm{cm}^4}$$

[예제 5-13] 원형단면([그림 12])의 관성모멘트를 구하라.



[그림 12]

❖풀이 [그림(a)]에서 I_p를 구한다.

$$I_p = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_p = 2I_y = 2I_z = 2I = \frac{\pi d^4}{32} \qquad \therefore I = \frac{\pi d^4}{64}\left(= \frac{\pi r^4}{4}\right)$$

$$\therefore Z = \frac{\pi d^4}{64} / \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$I_z = \frac{\pi d_0^4}{64} - \frac{\pi d_i^4}{64} = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{64}, \quad Z = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{32 d_0}$$

[그림(a)]에서 I_z를 구해도 된다.

$$I_z = 2\int_0^r y^2 \cdot dA = 2\int_0^r y^2 \cdot 2z dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\theta)^2 \cdot [2r\cos\theta \cdot r\cos\theta d\theta]$$

$$= 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\therefore\ M_{max} = \frac{3}{8} w_0 l \cdot \frac{3}{8} l - \frac{w_0}{2}\left(\frac{3}{8} l\right)^2 = \frac{9 w_0 l^2}{128}$$

$$= \frac{9 \times 10 \times 200^2}{128} = 28{,}125\ \text{kgf} \cdot \text{cm}$$

$$\therefore\ \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z} = \sigma_{al}$$

$$Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{max}}{\sigma_{al}}$$

$$\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{32 \times M_{max}}{\pi \times \sigma_{al}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 28{,}125}{3.14 \times 800}} = \boxed{7.1\ \text{cm}}$$