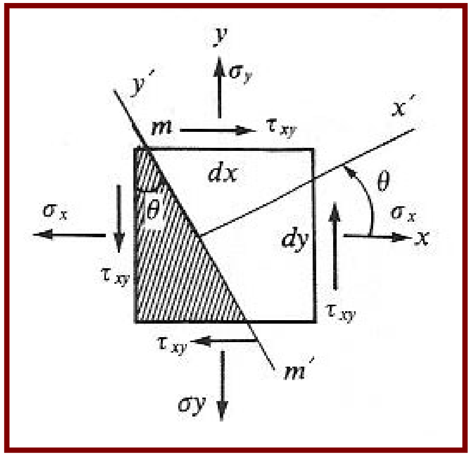
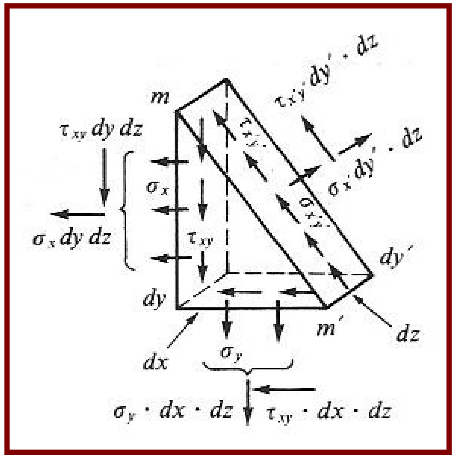
6-1 평면응력



(a) 요소의 평면응력상태



(b) 요소에 작용하는 힘

< 그림 6-1 >

비교적 두께가 얇은 물체가 힘을 받으면 **평면응력상태**에 있다고 한다. 경사면의 응력에서는 전단응력 또는 수직응력만이 있는 경우도 있었지만 일반적으로 면에는 수직응력과 전단응력이 동시에 작용한다.

그림 6-1의 FBD를 작성하고 (b)의 경사면을 포함하는 요소의 힘의 평형방정식을 적용시키면 다음 식을 얻는다.

$$\sum P_x = 0 : \sigma_{x'} dy'dz \cdot \cos\theta - \tau_{x'y'} dy'dz \cdot \sin\theta - \sigma_x dydz - \tau_{xy} dxdz = 0$$

$$\sum P_y = 0 : \sigma_{x'} dy'dz \cdot \sin\theta + \tau_{x'y'} dy'dz \cdot \cos\theta - \tau_{xy} dydz - \sigma_y dxdz = 0 \qquad \text{(a)}$$

여기서 $\dfrac{dx}{dy'} = \sin\theta, \quad \dfrac{dy}{dy'} = \cos\theta$

$$\sigma_{x'} \cos\theta - \tau_{x'y'} \sin\theta = \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta$$

$$\sigma_{x'} \sin\theta + \tau_{x'y'} \cos\theta = \sigma_y \sin\theta + \tau_{xy} \cos\theta \qquad \text{(b)}$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} &= -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}1)$$

식(6-1)는 **평면응력의 변환공식(transformation equations for plane stress)**이고 다음 절에서 평면응력에 대한 **모어 원(Mohr circle)**을 그리는 데 이용된다.

mm'면에 직각인 경사면의 응력은 θ대신 π/2+θ를 대입하여 정리하면,

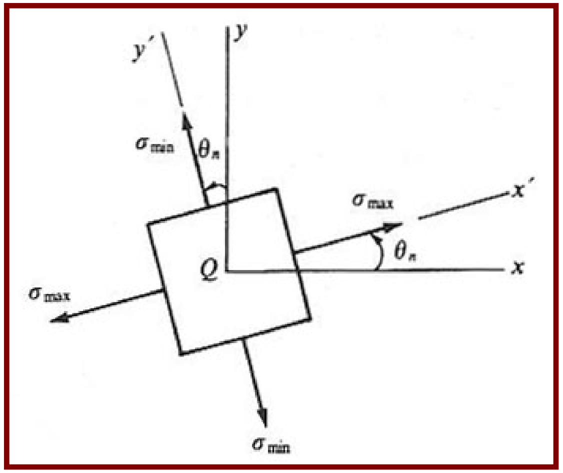
$$\left.\begin{aligned} \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{y'x'} &= \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\sin 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2)$$

식(6-2)와 식(6-3)을 연관시켜보면,

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y = const. \\ &\tau_{x'y'} = -\tau_{y'x'} \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}4)$$

▪ 주응력과 최대전단응력

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0 \quad \text{(c)} \qquad \tan 2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (6\text{-}4)$$



< 그림 6-2 >

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (6\text{-}5)$$

- 주응력(principal stress) – σ_1, σ_2
- 응력의 주면(principal plane of stress, 주응력면)
  – 주응력이 일어나는 면
- 응력의 주축(principal axis) – 주응력이 작용하는 방향

주응력을 구할 때와 같은 원리로,

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\tan 2\theta_t = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad \text{(6-6)}$$

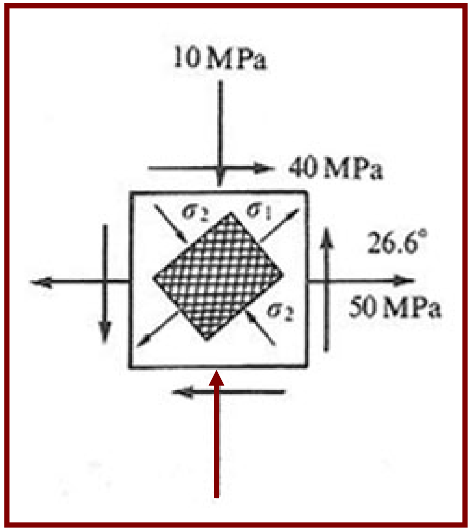
$$\tan 2\theta_n \cdot \tan 2\theta_t = -1 \qquad \text{(e)}$$

식(6-6)와 식(6-7)에서 위 식이 성립하며, 두 식이 직교함을 알 수 있다. 즉, 최대전단응력의 방향은 주응력의 방향과 45° 경사져있다.

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_{x'y',\max} \\ \tau_2 &= \tau_{x'y',\max} \end{aligned}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \text{(f)}$$

조합응력 하에 있을 때는 각각의 응력보다 주응력과 최대전단응력을 찾는 것이 중요하며, 이를 설계의 기준으로 삼아야 한다. 보통 **연성(ductile)재료**에서는 τ_1, **취성(brittle)재료**에서는 σ_1이 계산에 사용된다.

[예제 6-1] <그림 1>과 같은 평면응력상태에서, a) 주응력면, b) 주응력, c)최대전단응력을 구하라.



< 그림 1 >

풀이 a) 주응력면은 식(6-4)에 의해 구한다.

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(40)}{50-(-10)} = \frac{80}{60} \qquad \therefore 2\theta_n = 53.1^\circ \qquad \boxed{\therefore \theta_n = 26.6^\circ}$$

b) 주응력은 식(6-5)에 의해 구한다.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\boxed{\sigma_1 = 20 + 50 = 70MPa, \qquad \sigma_2 = 20 - 50 = -30MPa}$$

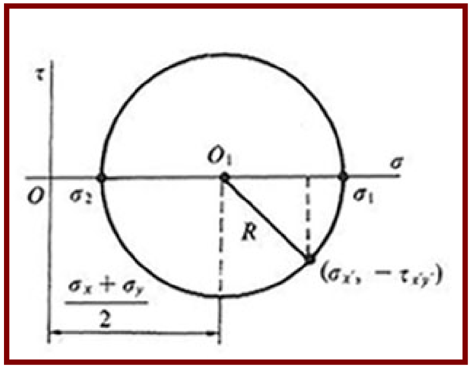
$$\sigma_{x'} = \frac{50-10}{2} + \frac{50+10}{2}\cos 53.1^\circ + 40\sin 53.1^\circ = 20 + 30\cos 53.1^\circ + 40\sin 53.1^\circ = 70MPa = \sigma_1$$

c) 최대전단응력은 다음과 같이 구한다.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \boxed{50MPa} \qquad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{70+30}{2} = \boxed{50MPa}$$

6-2 모어(Mohr)의 응력원

모어의 응력원은 6-1절에서 구한 여러 식들을 도식적으로 구할 수 있어 임의 경사면의 응력을 쉽게 계산할 수 있고 한 눈에 알아 볼 수 있는 장점이 있다.



< 그림 6-3 > 모어의 응력원

식(6-1)에서, $\left(\sigma_{x'} - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta\right)^2$

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(-\frac{\sigma - \sigma}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2 \qquad \text{(g)}$$

위의 두 식을 합하면,

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \qquad \text{(6-7)}$$

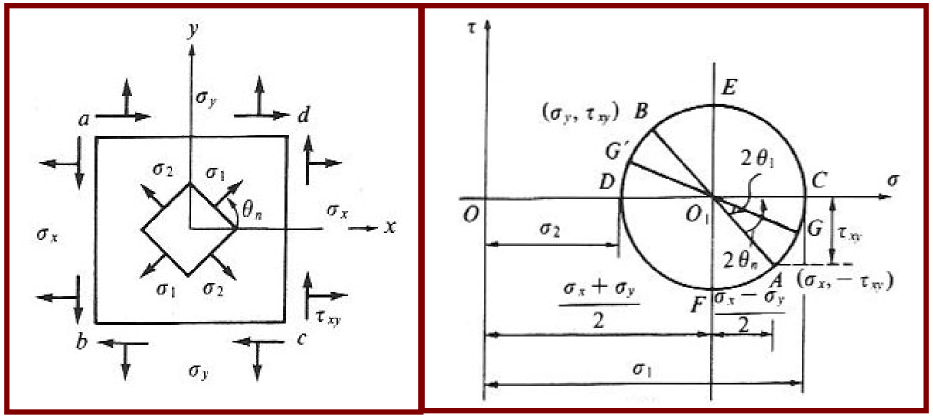
원의 중심 O_1은 σ축 상에 $\dfrac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}$, 반지름은 $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ 이다.

σ의 최대값(σ_1), 최소값(σ_2)은 σ축 상에 있으므로, $\tau_{x'y'}$가 0이다.

따라서, 식(6-9)에서 $\tau_{x'y'}$=0으로 두고 정리하면 식(6-6)과 같아진다.

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \text{(6-5)}$$

▪ 모어의 응력원 작도법



(a) ($\sigma_x > \sigma_y$) (b)

< 그림 6-4 > 모어의 응력원 작도법

응력원을 그리기 위해 우선 σ축 상에 중심을 잡고 반지름 R인 원을 그린다.

중심의 좌표 : $\left(\dfrac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}, 0\right)$

반지름 : $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

1) $(\sigma_x, -\tau_{xy})$를 σ − τ 좌표상에 점 A로 정한다.

2) (σ_y, τ_{xy})를 점 B로 정한다.

3) AB를 직경으로 하는 원을 그리면 O_1이 원점이 된다.

$$\overline{OO_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad \overline{AO_1} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_1, \sigma_2 = \overline{OO_1} \pm R$$

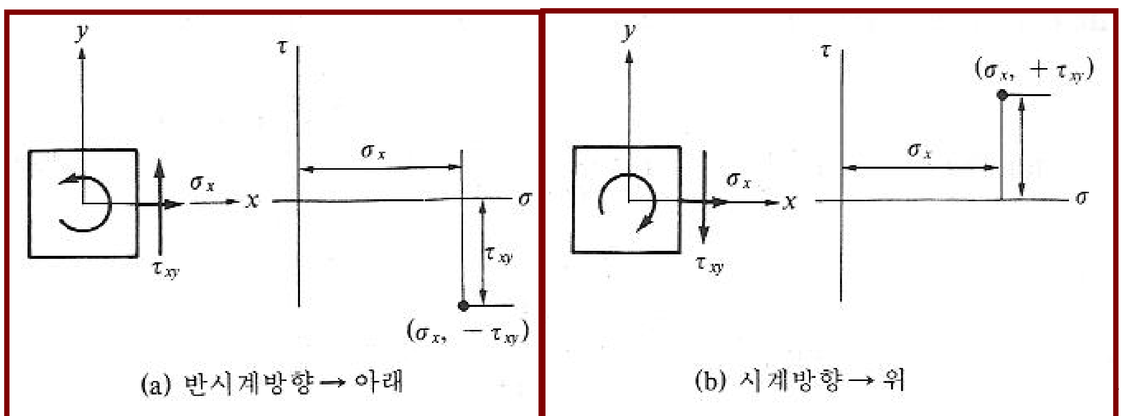
단, 모어의 응력원에서는 항상 **각도를 두 배**로 해야 한다.

그림 6-6 (b)와 같이 σ축과 θ만큼 경사진 mm’면의 응력상태를 구해보자.

$$\sigma_{x'} = \overline{OO_1} + R\cos(2\theta_n - 2\theta_1) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \cdot \cos(2\theta_n - 2\theta_1)$$

단,

$$\begin{cases} \cos(2\theta_n - 2\theta_1) = \cos 2\theta_n \cdot \cos 2\theta_1 + \sin 2\theta_n \cdot \sin 2\theta_1 = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}\right)\cos 2\theta_1 + \dfrac{\tau_{xy}}{R}\sin 2\theta_1 \\ \cos 2\theta_n = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\Big/R, \quad \sin 2\theta_n = \dfrac{\tau_{xy}}{R}, \quad R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$



< 그림 6-5 >

※ 모어의 응력원을 작성할 때

x면의 응력상태는 <그림6-5>의

$\sin 2\theta_1$ 부호규약에 따른다.

즉, 반시계 방향을 +로 한다.

$\cos 2\theta_1$ (g)