

Chapter 6: Empirical and practical relations for forced-convection heat transfer

■ 서론

앞서 살펴보았던 대류 문제는 해석적인 방법을 통해서 풀릴 수 있는 문제로서(연속방정식과 운동량 방정식을 동시에 풀었음을 참조), 대류에 있어서 열전달의 원리와 이해를 돕기위한 간단한 문제에 한정되었다. 하지만, 실제로는, 해석적인 방법을 통해서 실용적인 열전달 현상에 적용하는 것은 한계가 있기 때문에, 실험을 통해 도출된 공식이나 도표를 이용하여 대류에 있어서의 열전달을 계산하는 방법이 이용된다(실험을 통해서 도출된 식, 즉 특정 환경에서의 실험 데이터를 통해서 회귀분석 등의 통계적 방법을 이용하여 도출된 식을 일반적으로 실험식이라고 한다).

■ 파이프와 관유동에 대한 실험적 관계

앞선 5 장의 대류의 원리에서는 다룬 관내의 층류 유동은 완전히 발달한 층류유동을 해석적으로 접근하여 식을 도출하였다. 하지만, 이는 완전히 발달하지 않은 층류유동이나 유체의 성질이 온도에 따라 변하는 유동, 그리고 난류유동에는 적용하기 어렵기 때문에 이런 상당히 복잡하지만 중요한 공학적 문제는 실험식을 적용해서 문제에 접근할 수 있다.

앞으로 나오는 식들은 모두 좌변에 Nusselt 수가 있음을 유의하자. 즉, 관계식은 Nusselt 수에 대한 식이다. 대류열전달 문제에 있어서 중점은 대류 열전달 계수를 측정하는 것이므로(대류열전달계수를 알아야 대류열전달을 구할 수 있고, 대류열전달계수는 열전도계수와 달리 물체의 고유한 성질이 아니라 주변 환경에 따라 변화하므로 측정이 매우 어렵고, 측정값의 오차도 크다), 관에서 Nusselt 수의 정의를 이용하여 ($Nu_d = \frac{hd_o}{k}$) 이를 바탕으로 대류열전달계수를 측정한다. 식에서 알 수 있듯이 관의 지름과 전도계수는 측정하기가 쉬우므로, Nusselt 수만 구한다면 대류열전달계수를 계산하는 것이 가능하다.

▶ 관내를 흐르는 완전히 발달된 난류 유동에서 열전달

1) 매끈한 관내를 흐르는 완전히 발달된 난류 유동에서 열전달

① Dittus 와 Boelter 에 의한 식

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{0.8} Pr^n \quad n = \begin{cases} 0.4 & \text{유체가 가열되는 경우} \\ 0.3 & \text{유체가 냉각되는 경우} \end{cases}$$

$$Re_d = \frac{u_m d}{\nu}$$

주어진 실험식은 프란틀 수(Pr)가 0.6 에서 100 사이의 범위이고 벽과 유체사이에 적당한 온도차 조건을 갖는 유체가 매끈한 관내를 흐르는 완전히 발달된 난류유동에 대하여 유효하다. 이때 유체의 성질은 평균 유체 체적온도에서 구한값이 된다.

② Gnielinski 는 매끈한 관 내의 난류 유동에 대해 보다 더 좋은 결과를 보여주는 식을 제안하였다.

$$Nu = 0.0214(Re^{0.8} - 100)Pr^{0.4}$$

사용범위는 $0.5 < Pr < 1.5$, $10^4 < Re < 5 \times 10^6$

$$Nu = 0.012(Re^{0.87} - 280)Pr^{0.4}$$

사용범위는 $1.5 < Pr < 500$, $3000 < Re < 10^6$

③ 유동에서 큰 온도차가 존재하면, 관벽과 중심부분의 유동사이에 유체의 성질이 상당히 변할 수 있다. 그림에서 보여지는 등온유동에 해당하는 속도분포의 변화는 기체의 점성은 온도에 따라 증가하고, 반면에 액체의 점성은 온도에 따라 감소한다는 사실로부터 얻어진다(그림에서 기체의 가열 혹은 액체의 냉각으로 인한 점성의 증가가 층류를 발달 시킨다고 볼 수 있고(층류는 점성의 영향아래에 있을 때 발생하는 유동의 형태임) 기체의 냉각 혹은 액체의 가열로 인한 점성의 감소는 난류와 비슷한 유체 흐름 패턴을 야기한다. 즉, 이 경우 점성의 영향이 약해진다).

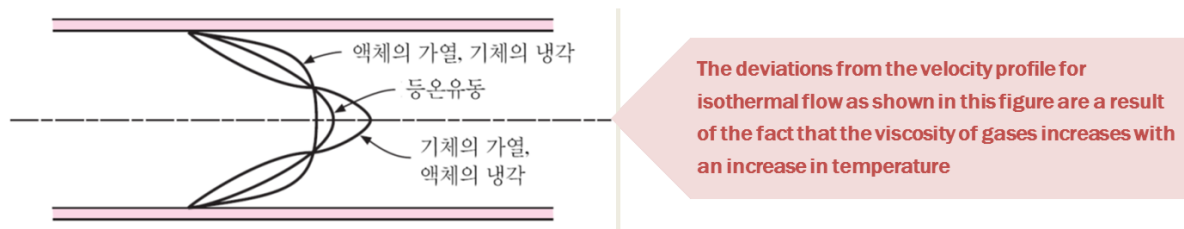


Figure 1. Deviations from the velocity profiles according to heating and cooling of liquids and gases (Holman 10th edition, 2011)

유체의 성질 변화를 고려하여 Sieder 와 Tate 는 다음관계식을 추천하였다.

$$Nu_d = 0.027 Re_d^{0.8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$$

μ_w 는 벽온도의 값이고, 나머지 성질은 체적온도 조건에서 구한다

2) 관내의 완전히 발달된 난류유동에 대해 복잡하지만 정확한 식 (Petukhov)

Petukhov 는 매끈한 관내의 완전히 발달된 난류유동에 대해 복잡하지만 정확한 식을 개발하였다.

$$Nu_d = \frac{(f/8) Re_d Pr}{1.07 + 12.7(f/8)^{1/2} (Pr^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w} \right)^n$$

여기서, n 값은 다음과 같이 결정된다.

$$T_w > T_b \Rightarrow n = 0.11$$

$$T_w < T_b \Rightarrow n = 0.25$$

$$\text{Constant heat flux or gases} \Rightarrow n = 0$$

μ_b 와 μ_w 를 제외하고는 모든 성질은 $T_f = \frac{T_w + T_b}{2}$ 에서 계산한다

마찰계수는 다음의 그림(교재 그림 6.4)를 이용하여 구하거나(유체역학 참고), 매끈한 관에 대해서는 다음식을 사용할 수 있다.

$$f = (1.82 \log_{10} Re_d - 1.64)^{-2}$$

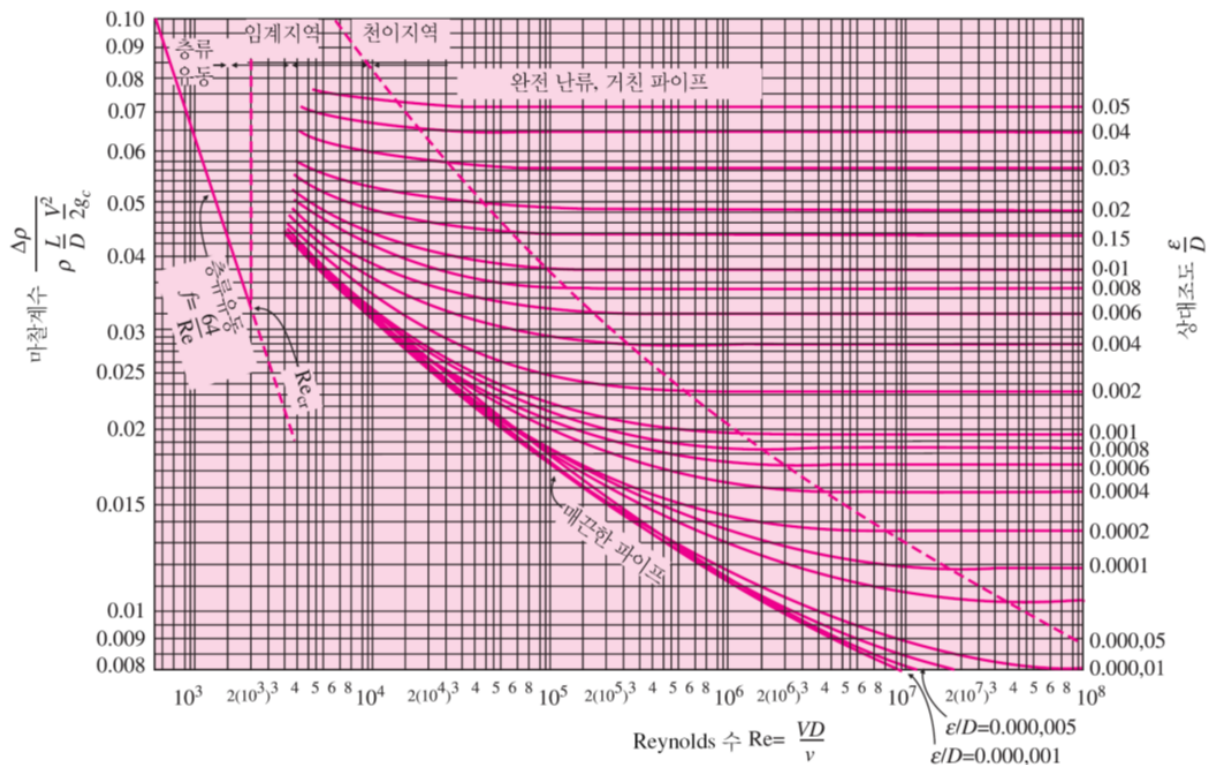


Figure 2. Friction factors in pipe flows (Holman 10th edition, 2011)

위의 식은 다음과 같은 조건에서 사용할 수 있다.

$$0.5 < Pr < 200 \quad \text{정확도 6\%}$$

$$0.5 < Pr < 2000 \quad \text{정확도 10\%}$$

$$10^4 < Re_d < 5 \times 10^6$$

$$0.8 < \frac{\mu_b}{\mu_w} < 40$$

3) 거친관의 적용

위의 식은 매끈한 관에 대해 적용는 식이다(Petukho의 식은 경우에 따라 거친관에도 적용가능). 일반적으로 거친관에 적용되는 상관관계는 드물고, 이런 경우는 유체 마찰과 열전달간의 Reynolds 유사를 사용하는 것이 적절하기 때문에, Stanton 수를 이용하여 나타낸다.

$$St_b Pr_f^{2/3} = \frac{f}{8}$$

이때 St 수에 대한 유체의 물성은 체적온도에서, Pr 수와 마찰계수에 대한 유체 물성은 막온도에 구한다.

마찰계수 f 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \rho \frac{u_m^2}{2g_c} \quad \text{여기서 } u_m \text{은 평균속도이다}$$

거친관에 적용되는 마찰계수 경험식은 다음과 같다.

$$f = \frac{1.325}{[\ln(\varepsilon/3.7d) + 5.74/Re_d^{0.9}]^2}$$

이때 식을 사용할 수 있는 조건은 다음과 같다.

$$10^{-6} < \varepsilon/d < 10^{-3}$$

$$5000 < Re_d < 10^8$$

2. 난류 유동이 발달하지 않은 입구영역에서의 열전달

$$Nu_d = 0.036 Re_d^{0.8} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{0.055} \quad \text{for } 10 < \frac{L}{d} < 400$$

여기서 d 는 관의 지름, L 은 관의 길이이다.

3. 관내를 흐르는 완전히 층류 유동에서 열전달

① 일정한 벽온도에서 관 내의 완전히 발달된 층류운동에 대한 열전달 (Hausen)

$$\overline{Nu}_d = 3.66 + \frac{0.0668(d/L)Re_dPr}{1 + 0.04[(d/L)Re_dPr]^{2/3}}$$

이 관계를 통해 구한 대류열전달계수는 관의 총길이에 대한 평균값이 된다. 관의 길이가 충분히 길다면, Nusselt 수는 3.66 에 접근함을 알 수 있다.

② 관내의 층류열전달에 관한 좀 더 간단한 식 (Sieder 와 Tate)

$$\overline{Nu}_d = 1.86(Re_d Pr)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

μ_w 는 벽온도의 값이고, 나머지 성질은 체적온도 조건에서 구한다. 식을 보면 알겠지만, 이 식은 관이 매우 긴 경우 ($L \rightarrow \infty$) 열전달 계수가 0 이 되어 사용할 수 없다.

이 식의 유효성은 Kundsén 과 Katz 에 의해 다음의 조건에 유효한 것이 보여졌다.

$$Re_d Pr \frac{d}{L} > 10$$

층류유동의 상관관계식에서 나타나는 Reynolds 수와 Prandtl 수의 곱을 Peclet 수로 부른다.

$$Pe = \frac{d u \rho c_p}{k} = Re_d Pr$$

♠ Peclet 수는 체적열전달을 열전도계수로 나눈 무차원 수로서 물리적으로는 체적열전달과 전도열전달의 비율이라 할 수 있다.

Peclet number

$$Pe = \frac{d u \rho c_p}{k} = Re_d Pr$$

- The product of the Reynolds and Prandtl numbers that occurs in the laminar-flow correlations is called Peclet number
- Dimensionless number defined by the ratio of bulk heat transfer to conductivity

4. 완전히 발달된 속도분포를 갖는 경우의 원형관의 층류입구 영역

완전히 발달된 속도분포를 갖는 경우에 원형관의 층류입구영역에 대한 국소 및 평균 Nusselt 수를 계산하여 Graetz 수의 역수로 다음의 그림에 나타내었다(교재 그림 6.5).

$$\text{Graetz 수} = Gz = RePr \frac{d}{x}$$

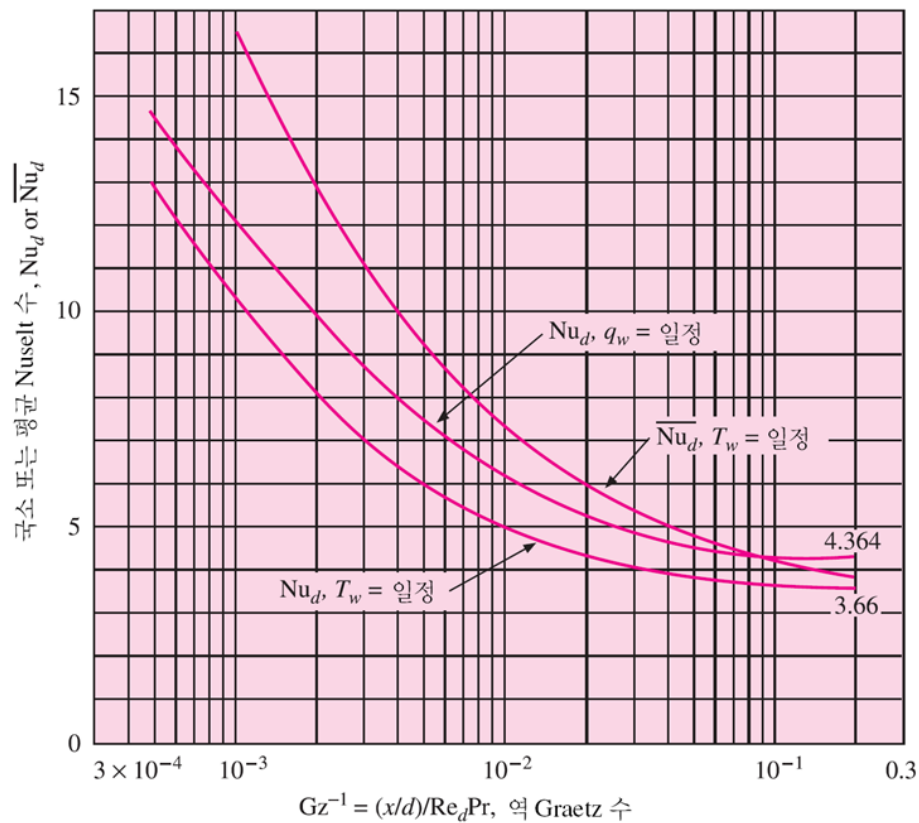


Figure 3. Local and average Nu for circular tube thermal entrance regions in fully developed laminar flow (Holman 10th edition, 2011)

5. 난류유동에서의 입구의 영향

관에서 난류에 대한 입구의 영향은 층류보다 더 복잡하다. 다음의 그림(교재 그림 6.6)에 결과가 요약하여 나타나 있다. 세로축은 입구로부터 아주 먼 곳 또는 완전히 발달된 열적 조건에서의 Nusselt 수에 대한 국소 Nusselt 수의 비이다. 일반적으로, Pr 수가 커짐에 따라 입구길이는 더 짧아지면, 층류보다 난류에서 열적 입구길이가 훨씬 짧은 것을 알 수 있다.

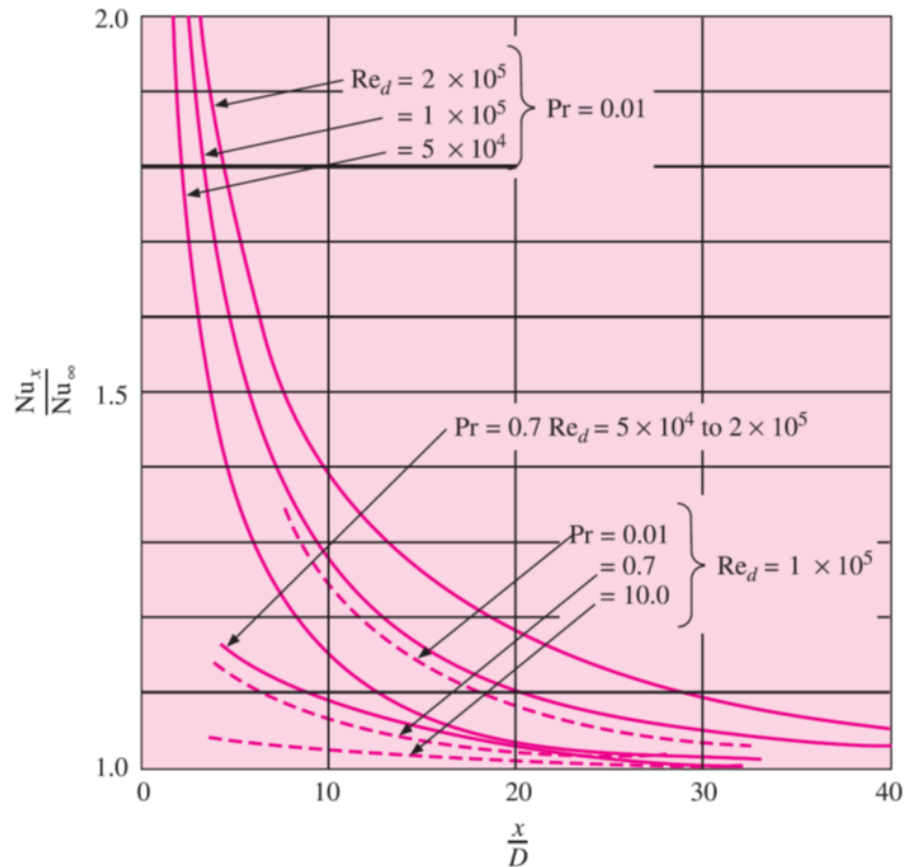


Figure 4. Turbulent thermal entry Nu for circular tubes with constant heat flux (Holman 10th edition, 2011)

▶ 수력학적 지름

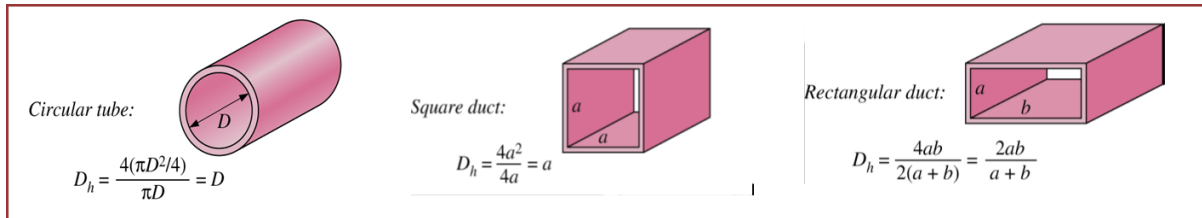
수력학적 지름은관이 완전한 원형이 아닐 때, 혹은 덕트가 완전한 사각형이 아닐 때 사용한다. 완전히 원형이 아닌 경우의 수력학적 지름은 다음과 같다.

$$D_H = \frac{4A}{P}$$

A 는 유체가 흐르는 단면적, P 는 접수주변길이 (유체가 맞닿는 곳은 둘레)

완전히 사각형이 아닌 경우의 수력학적 지름은 기하학적 평균과 같다.

$$D_h = \frac{2ab}{a+b}$$



교재의 표 6.1(291 페이지)은 여러가지 단면을 갖는 덕트에서 완전히 발달된 층류유동에 대해 유체마찰과 열전달을 보여준다. 이 표에서 Nusselts 수와 Reynolds 수는 수력학적 지름을 사용했으며, 다음과 같은 기호가 사용되었다.

- $\overline{Nu_H}$: 특정 유동단면에서 유동방향으로 열유속이 일정하고 벽면 온도가 일정할 때의 평균 Nusselt 수
- $\overline{Nu_T}$: 벽면 온도가 일정할 때의 평균 Nusselt 수
- $fRe_{DH}/4$: 수력학적 지름을 사용한 Re수와 마찰계수의 곱

■ 예제

1. 안지름 5 cm, 길이 75 m 의 거친 관이 질량유속 80 kg/s 의 물을 운반한다. 물의 체적평균온도는 21.1°C 이며, 관의 표면은 54.5°C 의 균일한 온도로 유지되고 있다(단, 관의 거칠기는 0.05 mm 이다).

1) 대류열전달 계수와 물을 운반하기 위해 필요한 동력을 구하여라(단, 중력가속도 보정계수는 1 로 가정한다)

(solution)

유체의 물성을 구하기 위한 온도는,

$$T_f = \frac{T_w + T_b}{2} = 37.8^\circ\text{C}$$

이 때의 물의 관련 물성을 찾으면,

$$k = 0.63 \text{ W/m} \cdot \text{K}, \quad \rho = 993 \text{ kg/m}^3, \quad c_p = 4.174 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}, \quad \mu = 6.82 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad Pr = 4.53$$

유체의 흐름 형태를 구하면,

$$\dot{m} = \rho u_m A \rightarrow u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi d^2}$$

$$Re = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{4\dot{m}}{\mu \pi d} = \frac{4 \times 80}{6.82 \times 10^{-4} \times \pi \times 0.05} = 2987072$$

따라서, 완전히 발달한 난류이다.

거친 관이므로, Petukhov 의 식을 이용하면

$$f = \frac{1.325}{[\ln(\varepsilon/3.7d) + 5.74/Re_d^{0.9}]^2} = \frac{1.325}{[\ln((0.05 \times 10^{-3})/(3.7 \times 0.05)) + 5.74/2987072^{0.9}]^2} = 0.0196$$

$$\mu_b = 9.8 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad \mu_w = 5.13 \times 10^{-4} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad T_w > T_b \Rightarrow n = 0.11$$

$$Nu_d = \frac{(f/8) Re_d Pr}{1.07 + 12.7 \left(\frac{f}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1\right)} \left(\frac{\mu_b}{\mu_w}\right)^n = \frac{\left(\frac{0.0196}{8}\right) \times 2987072 \times 4.53}{1.07 + 12.7 \left(\frac{0.0196}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \left(4.53^{\frac{2}{3}} - 1\right)} \left(\frac{9.8}{5.13}\right)^{0.11} = 16462$$

$$\bar{h} = \frac{Nu_d k}{d} = \frac{16462 \times 0.63}{0.05} = 207.4 \text{ kW/m}^2\text{°C}$$

동력을 구하기 위해서 압력강하와 유체속도를 구하면,

$$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{4 \times 80}{993 \times \pi \times 0.05^2} = 40.8 \text{ m/s}$$

$$\Delta p = f \frac{L}{d} \rho \frac{u_m^2}{2g_c} = 0.0196 \times \frac{75}{0.05} \times 993 \times \frac{40.8^2}{2} = 24298916 \text{ Pa} = 24.3 \text{ MPa}$$

$$P = \Delta p \times \dot{V} \leftarrow \dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{80}{993} = 0.08 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\therefore P = \Delta p \times \dot{V} = 24298916 \times 0.08 = 1943913 \text{ W} = 1.94 \text{ MW}$$

2) 관의 길이가 1m 인 지점에서 열전달계수를 구하여라.

(solution)

$$10 < \frac{L}{d} = \frac{1}{0.05} = 20 < 400$$

따라서 1m 에서는 완전히 발달하지 않은 입구영역이라 할 수 있으므로, 다음의 식을 적용할 수 있다.

$$Nu_d = 0.036 Re_d^{0.8} Pr^{\frac{1}{3}} \left(\frac{d}{L}\right)^{0.055} = 0.036 \times 2987072^{0.8} \times 4.53^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{0.05}{1}\right)^{0.055} = 7649$$

$$\bar{h} = \frac{Nu_d k}{d} = \frac{7649 \times 0.63}{0.05} = 96.4 \text{ kW/m}^2\text{°C}$$

2. 물이 3kg/s 로 5cm 의 내부지름을 갖는 구리관을 지나면서 5°C에서 15°C로 가열된다. 관의 벽온도가 90°C로 유지될 때 관의 길이를 구하여라 (단, 체적평균온도는 유체의 평균온도로서 구하며, 식은 Dittus 와 Boelter 의 식을 이용하여라)

(solution)

유체가 5°C에서 15°C로 가열되므로 체적평균온도는 10°C이다. 이때의 물의 물성은 표 A.9 에 의해

$$c_p = 4.195 \text{ kJ/kg} \cdot \text{°C}, \quad \mu = 1.31 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad \rho = 999.2 \text{ kg/m}^3, \quad k = 0.585 \text{ W/m} \cdot \text{°C}, \quad Pr = 9.40$$

열전달은 유체의 온도변화에 의해서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$q = c\dot{m}\Delta T = 4195 \times 3 \times (15 - 5) = 125850 \text{ W}$$

또한,

$$u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{3}{999.2 \times (0.025^2 \pi)} = 1.53 \text{ m/s}$$

$$Re_d = \frac{\rho u_m d}{\mu} = \frac{999.2 \times 1.53 \times 0.05}{1.13 \times 10^{-3}} = 58350$$

유체가 가열되는 경우이므로, Dittus 와 Boelter 식에 의해

$$Nu_d = 0.023 Re_d^{0.8} Pr^{0.4} = 0.023 \times 58350^{0.8} \times 9.40^{0.4} = 366.28$$

$$h = \frac{Nu_d k}{d} = 366.28 \times \frac{0.585}{0.05} = 4285.47 \text{ W/m}^2\text{°C}$$

$$\therefore q = h(\pi d L)(90 - 10) \Rightarrow 125850 = 4285.47 \times \pi \times 0.05 \times L \times 80$$

$$\therefore L = \frac{125850}{4285.47 \times \pi \times 0.05 \times 80} = 2.34 \text{ m}$$