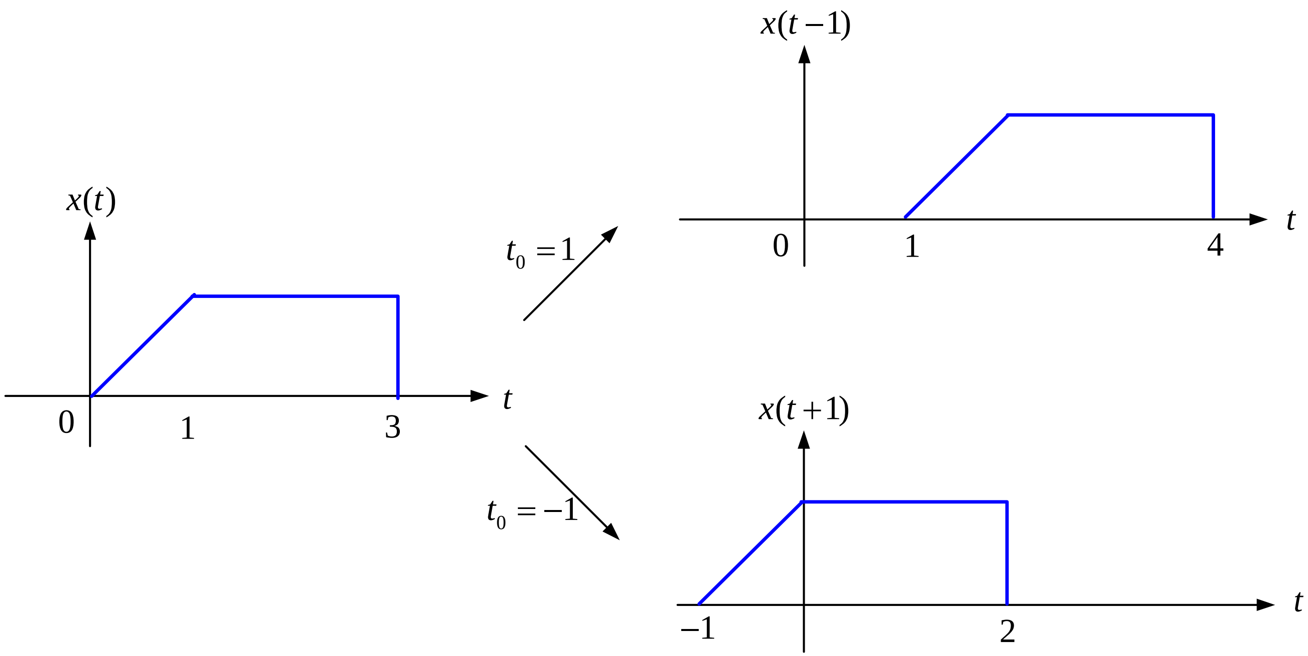
Ch.2 연속시간 신호의 시간영역 표현

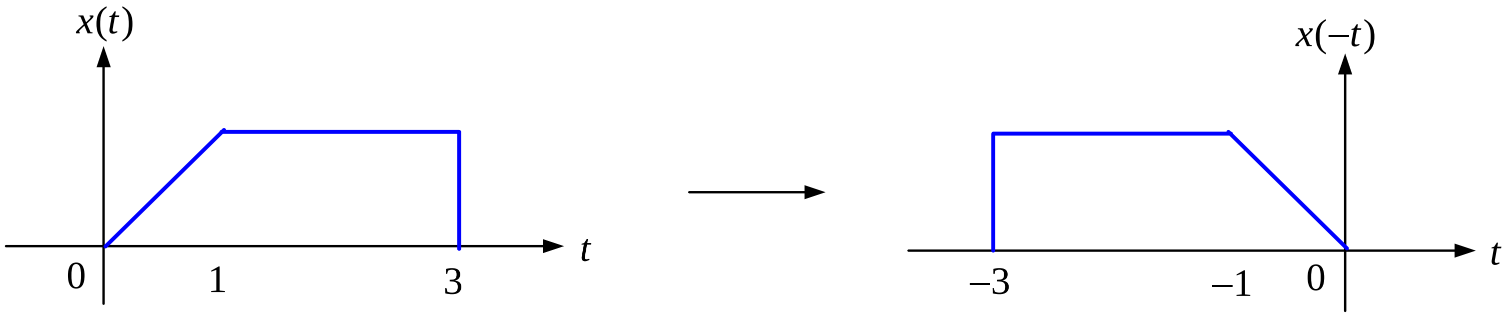
신호의 기본 연산

- 시간 천이 (time shift): $x(t\text{-}t_0)$
  - 신호를 시간축 상에서 t_0 만큼 오른 쪽으로 이동
  - $t_0 > 0$: time delay
  - $t_0 < 0$: time advance (파형은 왼 쪽으로 이동)



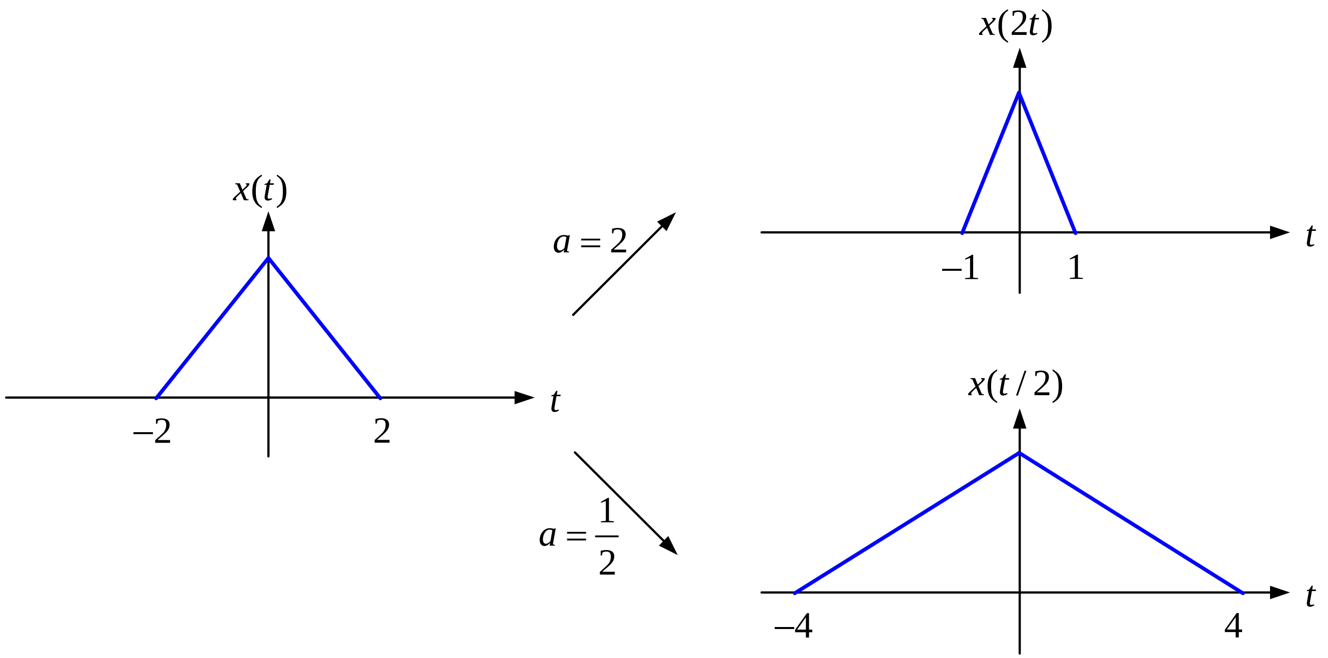
신호의 기본 연산

- 시간 반전 (time reversal; reflection): $x(-t)$
  - mirror image
  - 음반에 녹음된 음악을 반대 방향으로 재생시키는 것과 같은 조작



신호의 기본 연산

- 시간 척도 변경 (time scaling): $x(at)$
  - $|a| > 1$: 압축/contraction (a=2 경우 2배속 빠르게 재생)
  - $|a| < 1$: 확장/expansion (느리게 재생)



개요

❑ 신호 분해(Signal Decomposition)

- 자연계에서 발생하는 신호들을 특정 함수들의 선형 조합으로 표현

$$x(t) = \sum_n c_n \psi_n(t)$$

- 선형 조합의 기본이 되는 특정 함수인 기저 함수(basis function)

$$\psi_n(t), \quad n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$$

- 대표적인 기저 함수: 정현파 신호 $\sin\omega t$ 및 복소 지수함수 $\exp(j\omega t)$

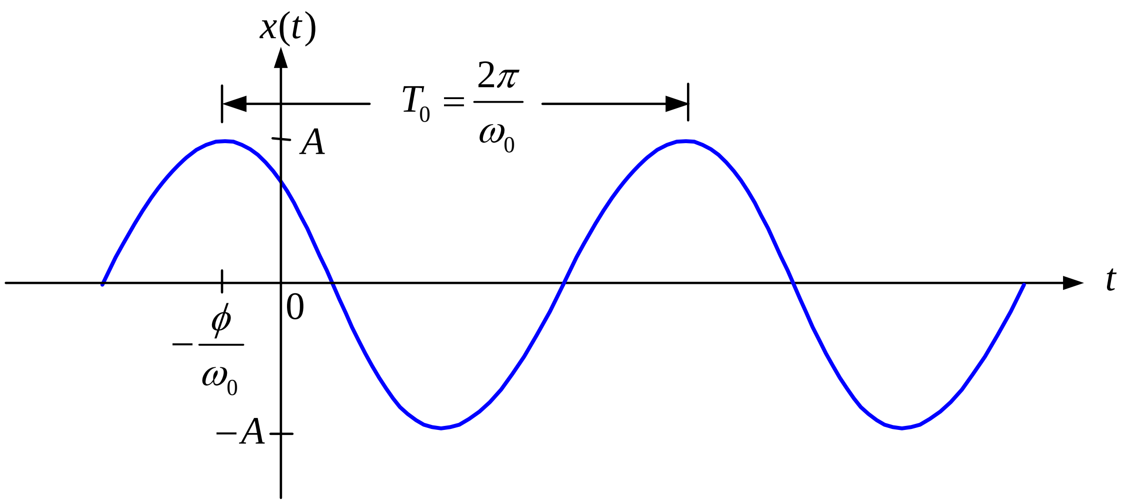
- 여러 주파수의 정현파 또는 복소 지수함수의 선형 조합으로 표현:
  선형 조합의 가중치는 특정 주파수 성분을 나타내는 척도

정현파 함수

- 정현파 신호(Sinusoidal Signal)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

- A: amplitude
- f_0: frequency [Hz]
- ω_0: angular frequency [rad/sec] $\omega_0 = 2\pi f_0$
- ϕ_0: initial phase [rad]
- Period: $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$

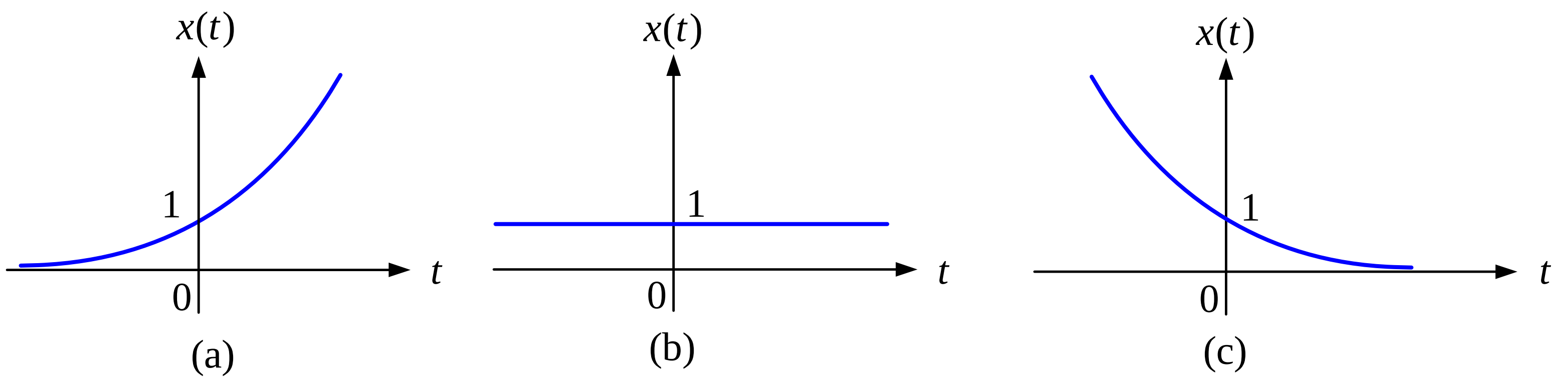


복소 지수 함수

❑ 지수 함수 (Exponential Function)

$$x(t) = e^{st}$$

(1) s가 실수인 경우 : real exponential function



$s > 0$ $s = 0$ $s < 0$

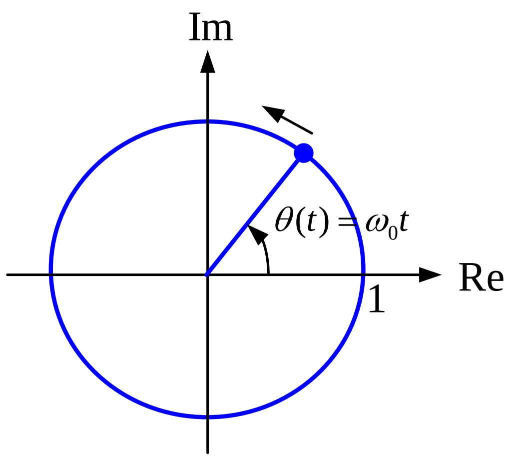
복소 지수 함수

- 지수 함수 (Exponential Function) $x(t) = e^{st}$

(2) $s=j\omega_0$인 경우 : $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, 주기적 함수(periodic function)

- 주기(period) $T_0 = 2\pi/\omega_0$: $e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0(t+2\pi/\omega_0)} = e^{j\omega_0 t}e^{j2\pi} = e^{j\omega_0 t}$

- 복소 평면에서 반지름이 1인 원주 상을 등각속도 ω_0로 회전



복소 지수 함수

- 오일러(Euler) 항등식을 이용한 표현

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

- 정현파와 여현파는 각각 다음과 같이 복소 지수 함수로 표현

$$\sin\omega_0 t = \mathrm{Im}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

$$\cos\omega_0 t = \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

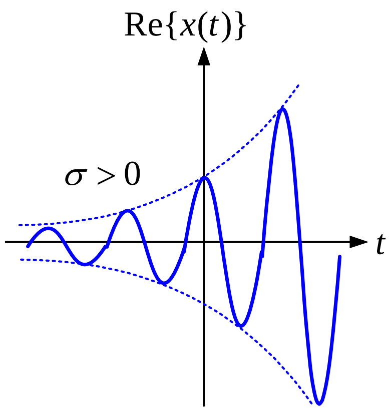
복소 지수 함수

- 지수 함수 (Exponential Function) $x(t) = e^{st}$

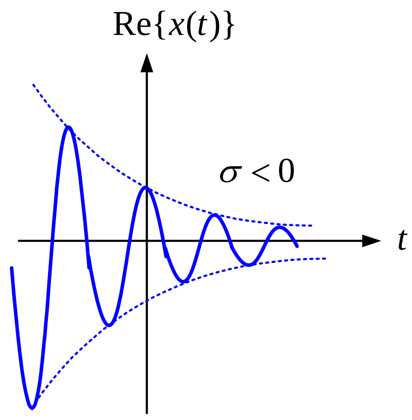
(3) $s=\sigma+j\omega_0$인 경우 : 비주기적 함수(non-periodic function)

$$x(t) = e^{(\sigma+j\omega_0)t} = e^{\sigma t}\cos\omega_0 t + je^{\sigma t}\sin\omega_0 t$$

- σ의 부호에 따라 진동하면서 진폭이 커지거나 진폭이 감쇠



(a)

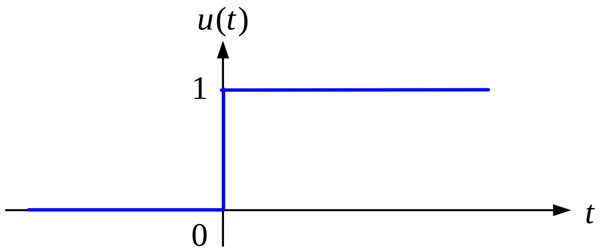


(b)

Step Function

- 정의: Unit Step Function

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



- 사용
  - 전원이 갑자기 가해지거나 제거되는 스위치 동작을 표현
  - 시구간의 일부를 절사(truncate)한 파형을 표현: $x(t)u(t), \quad x(t)u(-t)$

Step Function

❑ [예제 2.1]

- 다음 신호의 파형을 그려 보라.

(a) $x(t) = u(t-3)$

(b) $x(t) = 2u(t+1)$

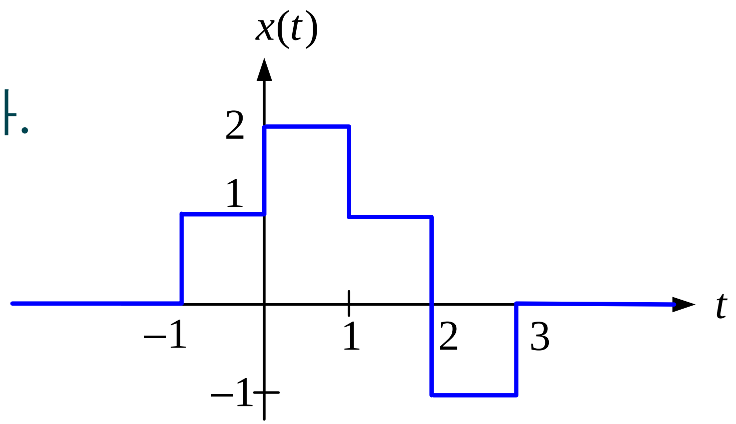
(c) $x(t) = u(-t+1)$

(d) $x(t) = u(t+2) - u(t-4)$

(e) $x(t) = \cos t\left[u(t) - u(t-2\pi)\right]$

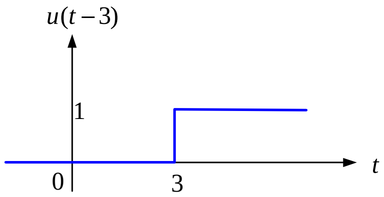
❑ [예제 2.2]

- Unit step function을 사용하여 표현하라.

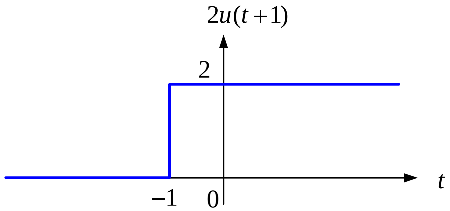


Step Function

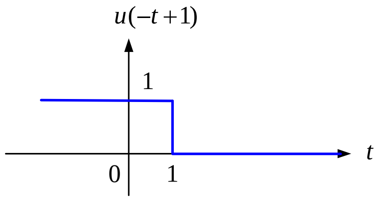
❑ [예제 2.1]



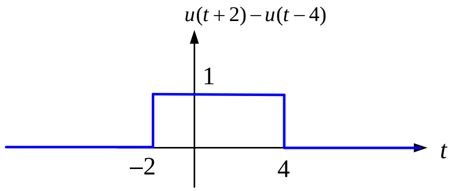
(a)



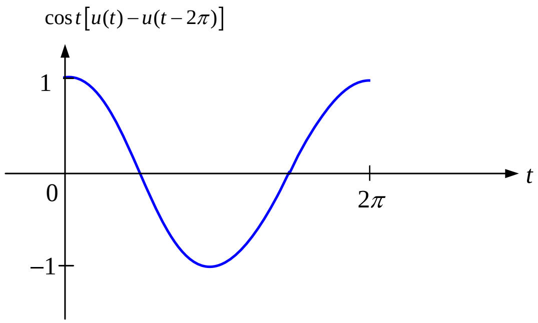
(b)



(c)



(d)



(e)

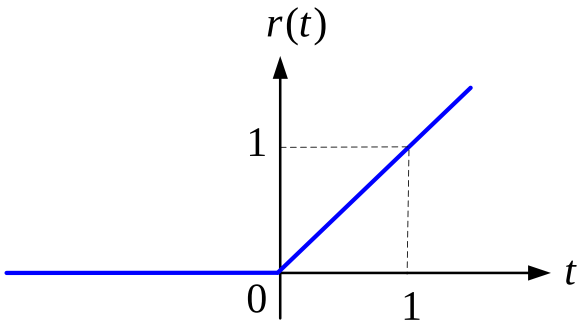
❑ [예제 2.2]

$$x(t) = u(t+1) + u(t) - u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

Ramp Function

- 정의: Unit Ramp Function

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$= t\,u(t)$$



- Unit step function과의 관계

$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

Impulse Function

- 정의: Impulse Function

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0), \qquad t_1 < 0 < t_2$$

i) $\delta(t) = 0 \quad \text{for } t \neq 0$

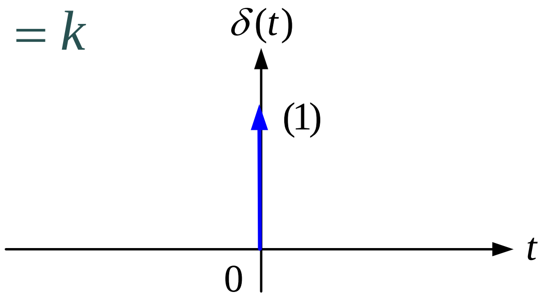
ii) $\delta(0) \to \infty$

iii) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{for any } \varepsilon > 0$

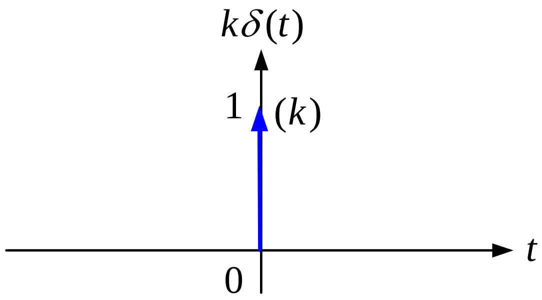
iv) $\delta(t) = \delta(-t)$ i.e. even function

- Impulse의 weight $k\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t)\,dt = k$$



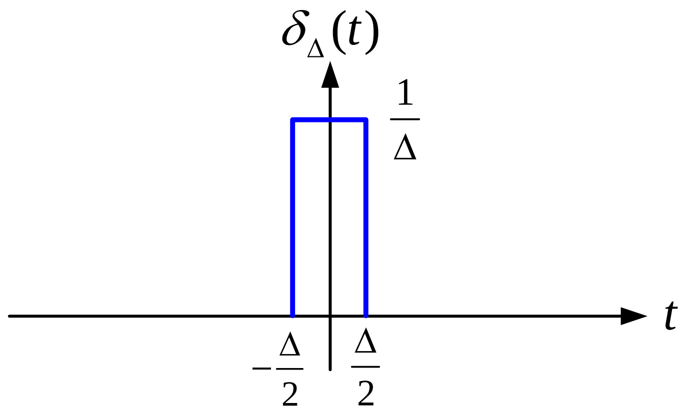
(a)



(b)

Impulse Function

- impulse 함수의 근사화
  - 단위 면적을 가지고 폭이 좁은 사각 펄스로 근사화
  - 폭 Δ가 좁을수록 펄스의 크기 $1/\Delta$는 커짐
  - 펄스 폭 $\Delta \to 0$의 극한이 취해지면 임펄스 함수로 수렴

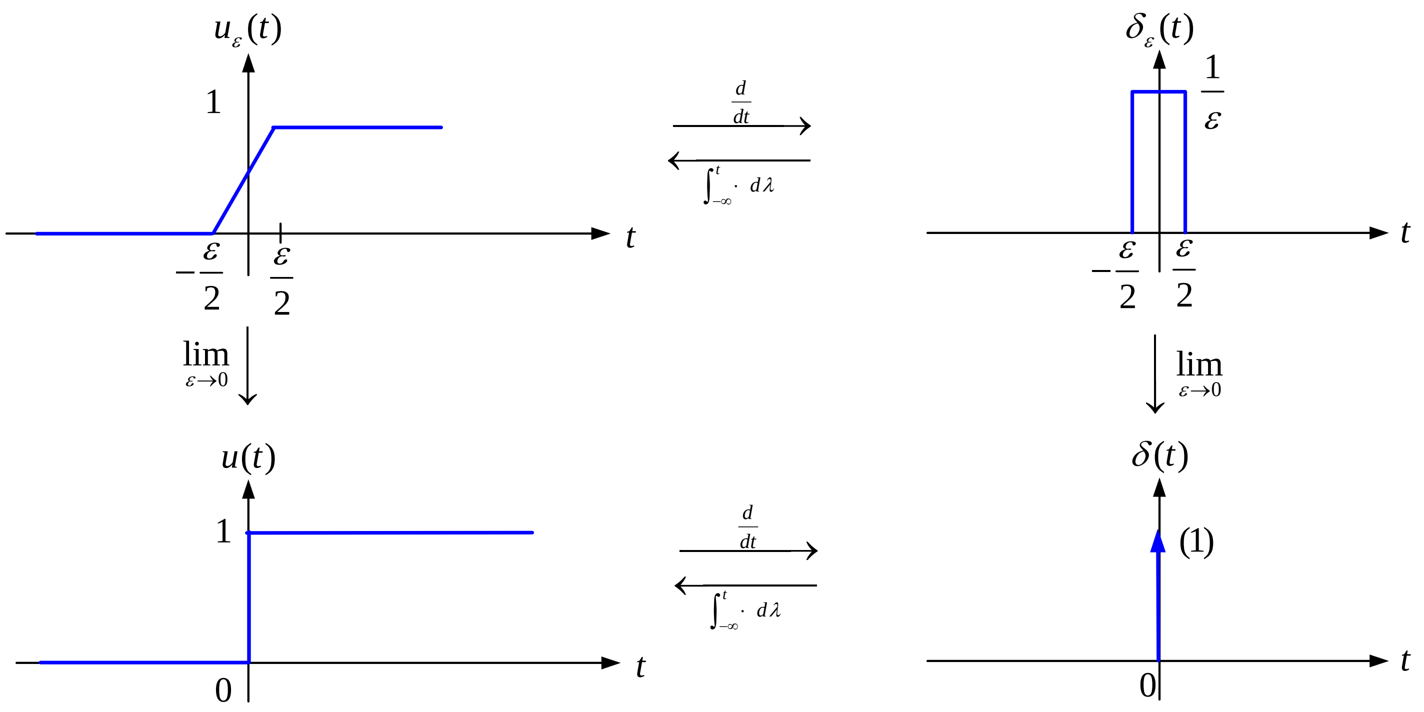


Impulse Function

- Step function과의 관계

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda = u(t)$$



Impulse Function

- Sampling property

$$x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

- Sifting property

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t)\,dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} x(t_0), & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Impulse Function

- Convolution property

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)*\delta(t) = x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

- Scaling property

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

Impulse Function

❑ [예제 2.3]

(a) $\int_{-4}^{2} \left(2t + t^3\right) \delta(t-3)dt$

(b) $\int_{1}^{4} \left(2t + t^3\right) \delta(t-3)dt$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t-3\right) \delta(2t-6)dt$

- 풀이

(a) $t_0 = 3 \notin \left(-4, 2\right) \Rightarrow 0$

(b) $\left[2t + t^3\right]_{t=3} = 6 + 27 = 33$

(c) $\left[\frac{1}{2}\exp\left(t-3\right)\right]_{t=3} = \frac{1}{2}$

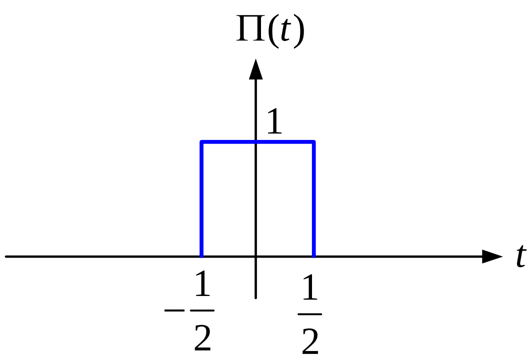
Rectangular Pulse

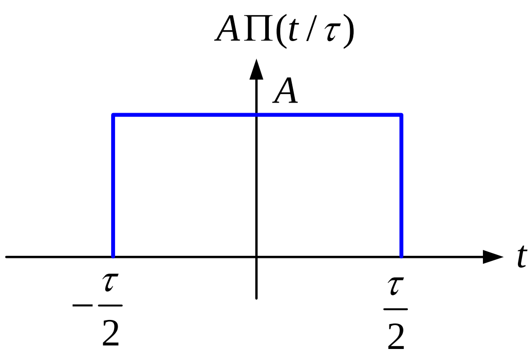
❑ 크기가 1이고 펄스 폭이 1인 사각 펄스(구형파)

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- 크기가 A이고 펄스 폭이 τ인 사각 펄스: $A\Pi(t/\tau)$



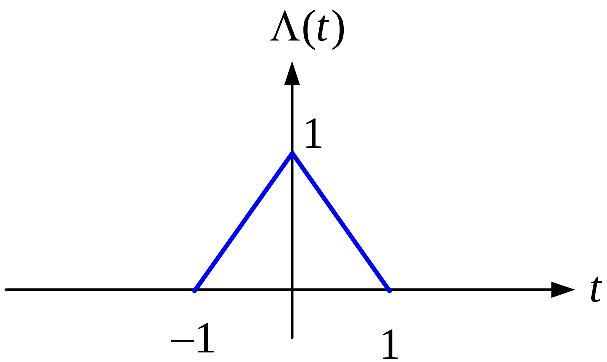


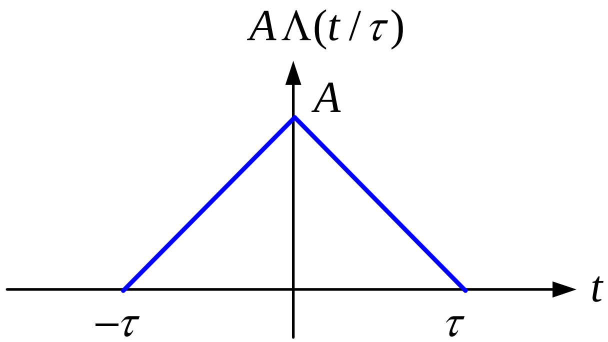
Triangular Pulse

- 크기가 1이고 펄스 폭이 2인 삼각 펄스

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{for } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

  - 크기가 A이고 펄스 폭이 2τ인 삼각 펄스: $A\Lambda(t/\tau)$



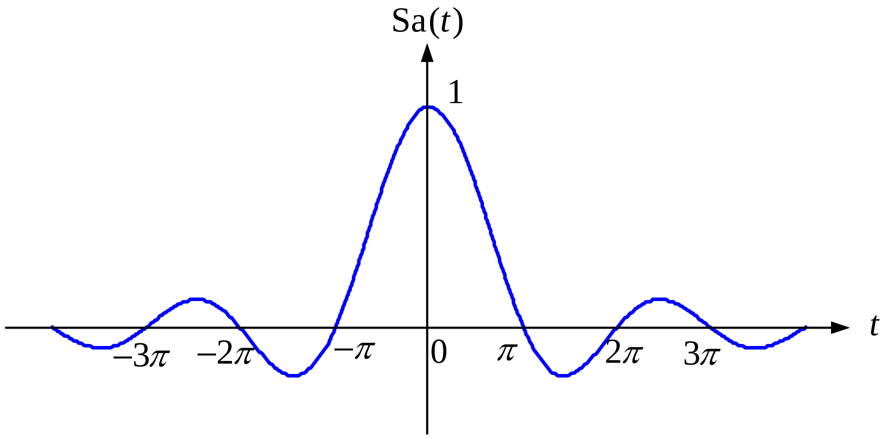


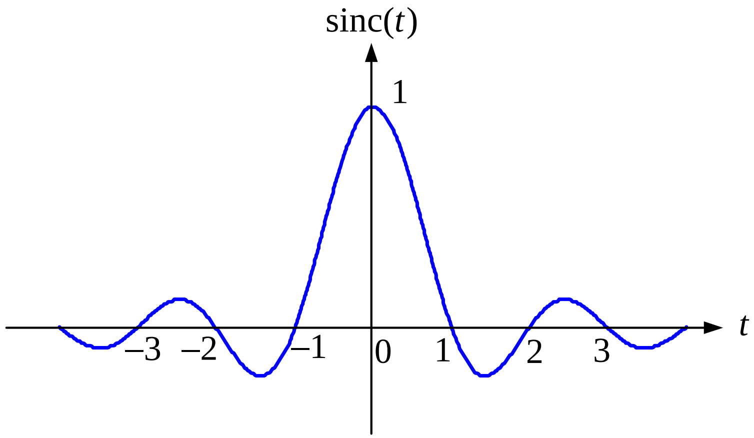
Sampling Function

❑ Sa 함수와 sinc 함수

$$\mathrm{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

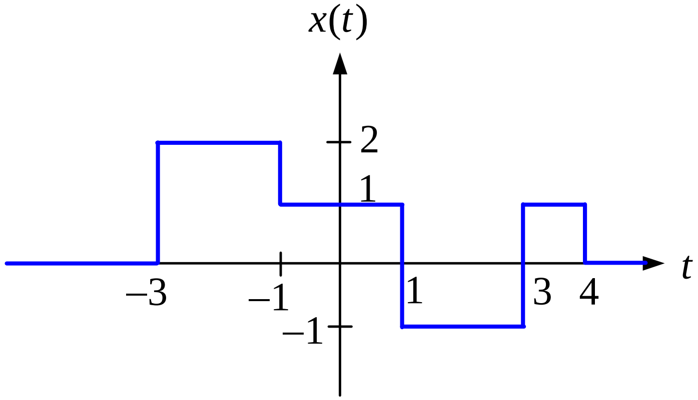
$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \mathrm{Sa}(\pi t)$$

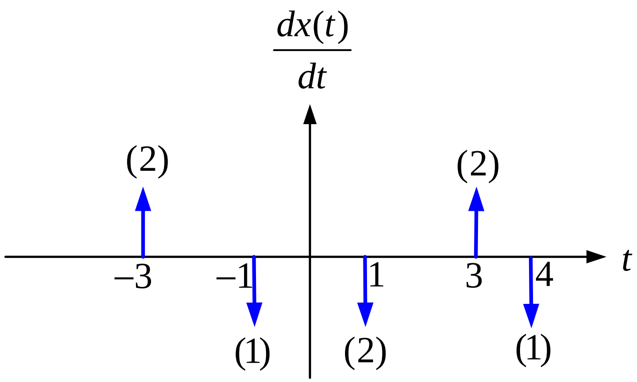




신호의 표현

- [예제 2.4]
  - 신호 $x(t)$를 미분한 신호 $dx(t)/dt$의 파형을 그리고, 단위 계단함수와 단위 임펄스 함수를 사용하여 수식으로 표현하라.





$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\delta(t+3) - \delta(t+1) - 2\delta(t-1) + 2\delta(t-3) - \delta(t-4)$$

신호의 표현

- [예제 2.5]
  - 신호 $x(t)$와 이를 미분한 신호 $dx(t)/dt$의 파형을 그리고, 단위 계단함수와 단위 임펄스 함수를 사용하여 수식으로 표현하라.

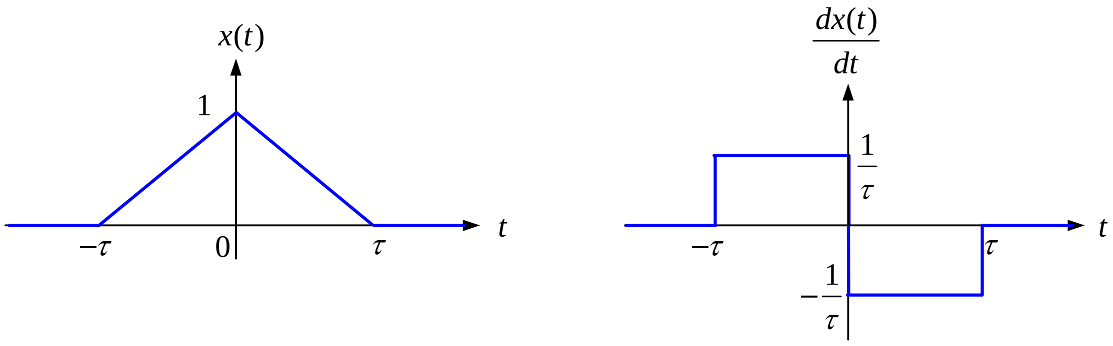
(a) $\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$

(b) $\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$

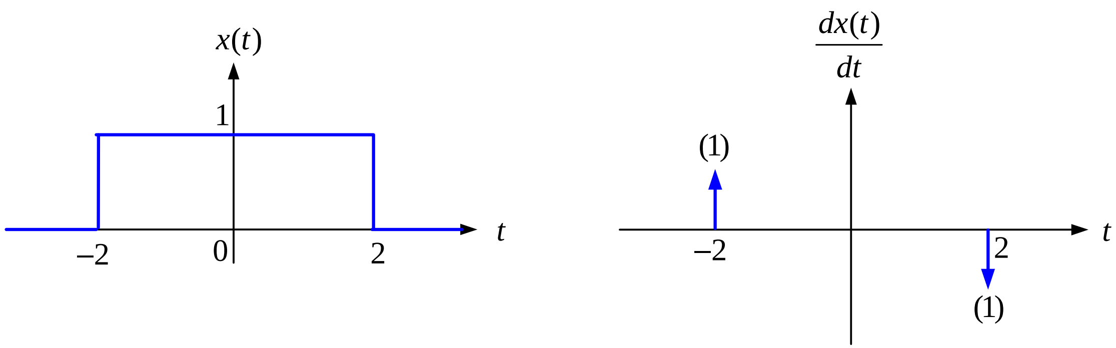
(c) $$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1 \\ 2t-1 & 1 \le t < 2 \\ -1 & 2 \le t < 4 \\ -t+3 & 4 \le t < 5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

신호의 표현

❑ [예제 2.5] 풀이



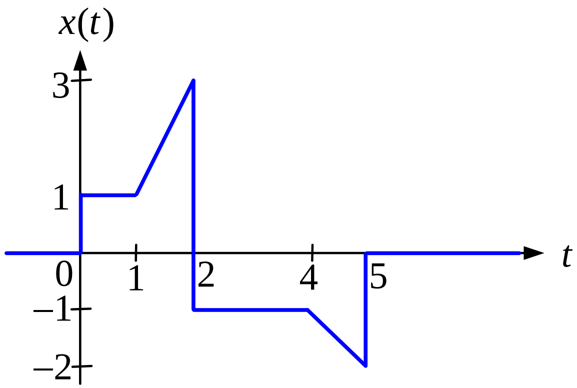
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\tau}\left[u(t+\tau) - 2u(t) + u(t-\tau)\right]$$

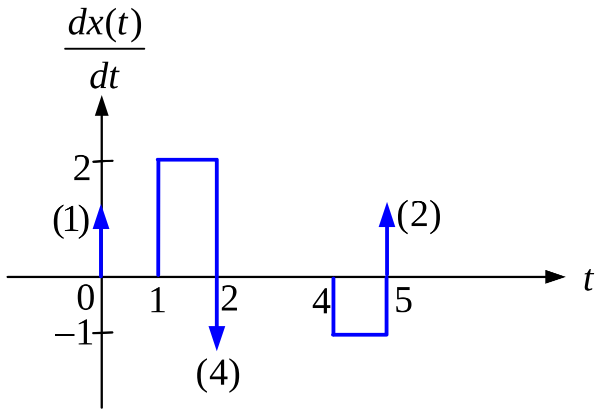


$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t+2) - \delta(t-2)$$

신호의 표현

❑ [예제 2.5] 풀이





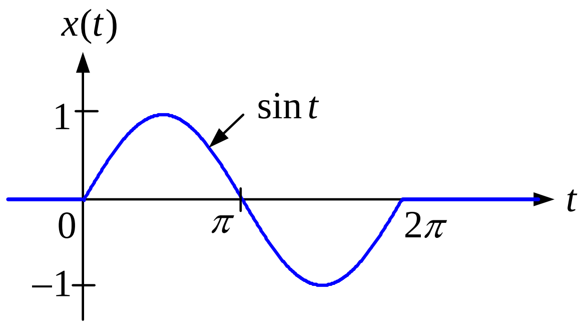
$$\frac{dx(t)}{dt} = 2u(t-1) - 2u(t-2) - u(t-4) + u(t-5) + \delta(t) - 4\delta(t-2) + 2\delta(t-5)$$

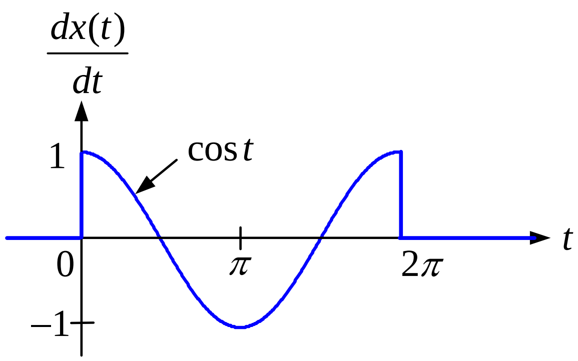
신호의 표현

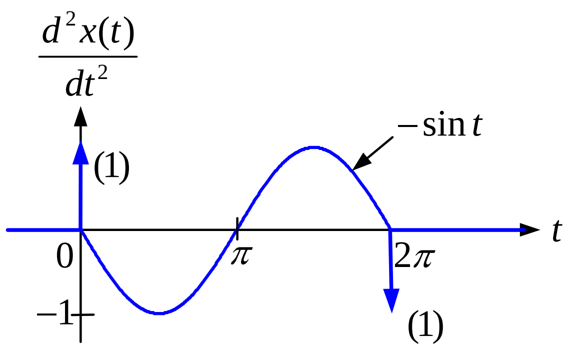
❑ [예제 2.6]

- 신호 $x(t)$와 이의 1, 2차 도함수 파형을 그리고, 정현파 신호와 단위 계단함수 및 단위 임펄스 함수를 사용하여 수식으로 표현하라.

$$x(t) = \sin t\left[u(t) - u(t-2\pi)\right]$$







신호의 표현

❑ [예제 2.6]

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\sin t)'\,[u(t) - u(t-2\pi)] + (\sin t)[u(t) - u(t-2\pi)]'$$

$$= \cos t\,[u(t) - u(t-2\pi)] + (\sin t)[\delta(t) - \delta(t-2\pi)] = \cos t\,[u(t) - u(t-2\pi)]$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = (\cos t)'\,[u(t) - u(t-2\pi)] + (\cos t)[u(t) - u(t-2\pi)]'$$

$$= -\sin t\,[u(t) - u(t-2\pi)] + (\cos t)[\delta(t) - \delta(t-2\pi)]$$

$$= -\sin t\,[u(t) - u(t-2\pi)] + \delta(t) - \delta(t-2\pi)$$