수와 연산

인류의 역사와 함께 시작된 수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념이다. 수는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 수의 연산은 수학의 가장 기본적인 기능 중 하나이며, 무리수의 계산은 이후 고등학교에서 학습할 무리식과 무리함수의 개념 학습에 선수 학습 내용이다.

<1~3학년>

영역	2007 교육과정	2009 교육과정	수학적 과정	비고
수와 연산	$\boxed{1}$ 집합(1학년) ① 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. ② 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. ③ 집합의 연산을 할 수 있다.			• 이동 : 현행 $\boxed{1}$집합을 고등으로 이동
	$\boxed{2}$ 자연수의 성질(1학년) ① 거듭제곱의 뜻을 안다. ② 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해 할 수 있다. ③ 최대공약수와 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다. ④ 최대공약수와 최소공배수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. ⑤ 십진법과 이진법의 원리를 이해하고, 자연수를 십진법과 이진법의 전개식으로 나타낼 수 있다. ⑥ 십진법과 이진법 사이의 관계를 이해한다.	$\boxed{1}$ 소인수분해(1학년) ① 거듭제곱의 뜻을 안다. ② 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다. ③ 최대공약수와 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다. ④ 최대공약수와 최소공배수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.	① 의사소통 ③ 추론 ④ 문제해결	• 영역명 변경 (학습 내용의 특성을 잘 보여주기 위해) • 현행 ⑤, ⑥ 삭제 (학습량 감축)
	$\boxed{3}$ 정수(1학년) ① 정수의 개념을 이해한다. ② 정수의 대소 관계를 이해한다. ③ 정수의 사칙계산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다. $\boxed{4}$ 유리수(1학년) ① 유리수의 개념을 이해한다. ② 유리수의 대소 관계를 이해한다. ③ 유리수의 사칙계산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	$\boxed{2}$ 정수와 유리수(1학년) ① 정수와 유리수의 개념을 이해한다. ② 정수와 유리수의 대소 관계를 이해한다. ③ 정수와 유리수의 사칙계산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.	③ 문제해결	• 영역 통합
	$\boxed{5}$ 유리수와 순환소수(2학년) ① 순환소수의 의미를 이해한다.	$\boxed{3}$ 유리수와 순환소수(2학년) ① 순환소수의 의미를 이해한다.		

<1~3학년>

영역	2007 교육과정	2009 교육과정	수학적 과정	비고
	② 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.	② 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.	② 추론	
	$\boxed{6}$ 근삿값(2학년) ① 근삿값과 오차의 의미를 이해하고, 근삿값에 대한 참값의 범위를 구할 수 있다. ② 근삿값의 표현 방법을 안다.			• 삭제 (학습량 감축)
	$\boxed{7}$ 제곱근과 실수(3학년) ① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. ② 무리수의 개념을 이해한다. ③ 수직선에서 실수의 대소 관계를 이해한다.	$\boxed{4}$ 제곱근과 실수(3학년) ① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. ② 무리수의 개념을 이해한다. ③ 실수의 대소 관계를 이해한다.		
	$\boxed{8}$ 근호를 포함한 식의 계산(3학년) ① 근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있다.	$\boxed{5}$ 근호를 포함한 식의 계산(3학년) ① 근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있다.		
용어와 기호	집합, 원소, 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 서로 같다, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, 소수, 합성수, 거듭제곱, 지수, 밑, 소인수, 소인수분해, 서로소, 십진법, 이진법, 진법의 전개식, 양수, 음수, 양의 정수, 음의 정수, 정수, 수직선, 양의 유리수, 음의 유리수, 유리수, 절댓값, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 역수, $a \in A$, $b \notin B$, $\varnothing$, $A \subset B$, $A = B$, $A \neq B$, $A \cup B$, $A \cap B$, U, A^C, $A - B$, $n(A)$, $1011_{(2)}$, 양의 부호$(+)$, 음의 부호$(-)$, 절댓값 기호($\lvert\ \rvert$), $\leq$, $\geq$ 유한소수, 무한소수, 순환소수, 순환마디, 참값, 측정값, 근삿값, 오차, 오차의 한계, 유효숫자, $2.\dot{4}1\dot{5}$, $a \times 10^n$ $(1 \leq a < 10$, n은 양의 정수), $a \times \frac{1}{10^n}$ $(1 \leq a < 10$, n은 양의 정수) 제곱근, 근호, 무리수, 실수, 분모의 유리화, $\sqrt{\ }$	소수, 합성수, 거듭제곱, 지수, 밑, 소인수, 소인수분해, 서로소, 양의 정수, 음의 정수, 정수, 수직선, 양의 유리수, 음의 유리수, 유리수, 양수, 음수, 절댓값, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 역수, 유한소수, 무한소수, 순환소수, 순환마디, 제곱근, 근호, 무리수, 실수, 분모의 유리화, 양의 부호$(+)$, 음의 부호$(-)$, 절댓값 기호($\lvert\ \rvert$), $\leq$, $\geq$, 순환소수 표현(예. $2.\dot{4}1\dot{5}$), $\sqrt{\ }$		• 이동(고등) : 집합, 원소, 원소나열법, 조건제시법, 유한집합, 무한집합, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 서로 같다, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, $a \in A$, $b \notin B$, $\varnothing$, $A \subset B$, $A = B$, $A \neq B$, $A \cup B$, $A \cap B$, U, A^C, $A - B$, $n(A)$ • 삭제 : 십진법, 이진법, 진법의 전개식, 서로 같다, 참값,

<1~3학년>

영역	2007 교육과정	2009 교육과정	수학적 과정	비고
				측정값, 근삿값, 오차, 오차의 한계, 유효숫자, $a \times 10^n$ $(1 \le a < 10$, n은 양의 정수), $a \times \frac{1}{10^n}$ $(1 \le a < 10$, n은 양의 정수)
교수·학습 상의 유의점	① 집합의 연산에서는 두 집합의 연산을 주로 다룬다. ② 약수와 배수는 자연수의 범위에서만 다룬다. ③ 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 강조하지 않는다. ④ 순환소수를 분수로 고칠 때 공식화하는 것은 강조하지 않는다. ⑤ 근삿값을 다룰 때 과학이나 실생활 관련 소재를 사용한다. ⑥ 제곱근의 근삿값이 필요할 때에는 제곱근표나 계산기를 사용하고, 제곱근 풀이법은 다루지 않는다.	① 약수와 배수는 자연수의 범위에서만 다룬다.($\boxed{1}$) ② 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다.($\boxed{3}$) ③ 순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로만 다룬다.($\boxed{3}$) ④ 다양한 상황을 이용하여 음수와 무리수의 필요성을 인식하게 한다.($\boxed{2}$, $\boxed{4}$) ⑤ 수의 계산에서 자신의 풀이 방법을 설명하게 한다.($\boxed{2}$, $\boxed{5}$)	④ 의사소통 ⑤ 의사소통	

1. 소인수분해

1.1. 이론적 배경

(1) 자연수와 페아노 공리

오늘날 지구상에는 아직도 수를 표현하는 방법으로 '하나', '둘', '많다'라는 것만 사용하는 종족이 있다고 한다. 이들은 개수를 헤아리는 단위로서 하나와 그것의 짝이 되는 수 두 개와 많다는 것 밖에 알지 못하고 있는 것이다. 이것으로 미루어 볼 때, 1과 2는 인류에 의해 이해된 최초의 수 개념이라 볼 수 있다.

이런 흔적은 여러 나라의 수 관련 언어에서도 찾아볼 수 있다. 수메르인의 언어에서 1, 2, 3을 지칭하는 말은 '게슈(gesh)', '민(min)', '에슈(esh)'인데 게슈는 1을 지칭하기도 했고, 남자를 뜻하기도 했다. 이와 유사하게 '민'은 2를 지칭하기도 했고 여성을 뜻하기도 했다. 그리고 '에슈'는 3 또는 많다는 것을 의미했다. 고대 라틴어에서 유래된 영어의 three는 3이라는 뜻 이외에도 많다는 의미로 쓰이기도 했다. 고대 중국에서는 나무의 그림자를 세 번 반복함으로써 '숲'을 표현했고, 사람의 형상을 세 번 재현하여 군중을 뜻하기도 했다. 이렇게 고대 각 민족의 수 역사의 시초를 살펴보면 숫자를 직접적으로 인지하는 인간의 능력이 4를 넘어서지 못하였음을 알 수 있다. 그런데 이런 출발에도 불구하고 오늘날 무한의 수까지 사용할 수 있게 된 것은 '일대일대응'이라는 방법을 인간이 사용할 수 있었기 때문이다.

자연수는 물건의 개수를 세거나 순서를 정할 때 일상적으로 흔히 사용될 뿐 아닐 수학의 가장 기초가 되는 개념이다. 자연수는 직관적으로 1에서 차례로 증가하는 수의 계열로 이해할 수 있지만, 이러한 직관적인 개념만으로는 수학 이론을 엄밀하게 전개해 나갈 수가 없다. 19세기에 페아노(Peano, G. ; 1858 ~ 1932)는 자연수를 공리적으로 엄밀하게 정의하였는데, 이에 따르면 자연수는 다음의 5가지 공리를 만족하는 집합 N의 원소이다.

① 1은 N의 원소이다.
② n이 N의 원소이면 n'도 N의 원소이다.(여기서 n'은 n의 후자(successor)이다.)
③ ①과 ②의 과정에서 얻어진 것만이 N의 원소이다.(수학적 귀납법의 원리)
④ N의 어떤 원소에 대해서도 n'은 1과 같지 않다.
⑤ N의 두 원소 n, m에 대하여 $n' = m'$ 이면 $n = m$이다.

위의 5개 공리를 자연수에 대한 '페아노 공리'라고 한다. 페아노 공리를 만족하는 집합 N을 자연수의 집합이라 하고, 그 원소를 자연수라고 한다. 이때 1, 후자(successor), 집합 N 등은 기본적인 개념으로서 별도의 정의가 없는 무정의 용어로 취급한다.

(2) 소수와 소인수분해

'소수는 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수'라는 정의는 유클리드(Euclid, 기원전 330?-275?)의 원론에 처음으로 등장했다.

13권으로 이루어진 유클리드의 원론 중 제VII, VIII, IX권은 기초적인 수론을 다루고 있다. 제VII권은 짝수, 홀수, 소수, 합성수 등과 같은 기본적인 용어에 대한 정의로 시작하며, 두 자연수의 최대공약수를 구하는 유클리드의 호제법이 소개되어 있다.

제IX권에는 수론에서 중요한 정리를 많이 찾아볼 수 있는데, 특히 소수와 관련된 정리로 자연수의 소인수분해는 소수를 나열하는 순서를 제외하면 유일하다는 ‘산술의 기본 정리’(명제 14)가 있다.

산술의 기본 정리에 의하여, 소수는 곱셈 과정을 통해 다른 모든 자연수를 구성하는 기초적인 요소가 된다. 그리고 자연수를 소인수분해하면, 그 수의 수학적 성질을 파악할 수 있는 중요한 정보를 얻게 된다. 이런 점에서, 소수는 화학의 원소나 물리학의 소립자에 비유되며, 그와 같은 중요성을 수학에서 가진다.

소인수분해를 이용하면, 주어진 자연수의 구조를 한눈에 파악할 수 있으며, 큰 자연수의 약수를 빠뜨리지 않고 쉽게 찾을 수 있는 이점이 있다. 그리고 자연수들의 최대공약수와 최소공배수도 착오 없이 거의 기계적으로 구할 수 있다.

(3) 소수 판정법

어떤 자연수의 소수 여부를 판정하는 가장 알기 쉽고 확실한 방법은 주어진 수보다 작은 자연수로 차례로 나누어보는 것이다. 물론, 모든 자연수로 나누어볼 필요는 없으며, 소수만으로 나누어보면 충분하다. 예를 들어 자연수 n이 2로 나누어떨어지면, n은 합성수이다. 한편, n이 2로 나누어떨어지지 않으면, 4로도 나누어떨어지지 않는다. 또, n이 2와 3으로 나누어떨어지지 않으면, 6으로도 나누어떨어지지 않는다. 그러므로 합성수인 4나 6으로 나누어볼 필요가 없다.

실제로는 $\sqrt{n}$보다 작거나 같은 소수로 나누어보면 충분하다. 왜냐하면 n이 합성수이면 1과 n 사이의 두 장녀수 a와 b가 존재하여 $n = ab$이고, a와 b 중에서 적어도 하나는 $\sqrt{n}$보다 클 수 없기 때문이다.

이와 같은 원리를 이용한 것이 바로 ‘에라토스테네스의 체’이다. 에라토스테네스(Erarosthenes, 기원전 275-194)는 젊은 시절 아테네에서 연구했으며, 약 40세 때 알렉산드리아로 초빙되어 왕자의 개인 교수와 알렉산드리아 박물관의 책임자로 근무했다. 그는 소수를 찾는 방법뿐 아니라, 지구의 둘레를 최초로 매우 정확하게 측정했고 지도를 만들기도 했다.

그런데 앞에서 설명한 방법을 이용하면 작은 자연수의 소수 여부를 쉽게 판정할 수 있지만, 수가 커지면 적용하기가 매우 어려워진다. 예를 들면, 슈퍼컴퓨터를 사용하더라도 20자리의 수는 약 1시간, 50자리의 수는 약 10억년, 100자리의 수는 약 1035년이 걸린다고 한다. 오늘날 암호학에서는 50자리에서 100자리 정도의 소수가 이용되고 있다.

현재 거대한 자연수의 소수 판정에 이용되는 가장 훌륭한 방법으로 ‘APRCL 판정법’이 있다. 슈퍼컴퓨터에서 이 방법을 이용하면, 20자리의 수는 10초 미만, 50자리의 수는 15초 미만, 100자리의 수는 40초 미만이 걸린다고 한다.

그런데 주어진 자연수의 소수 판정에 비해, 소인수분해는 훨씬 더 어렵다. 그리고 소인수분해하는 방법이 있지만, 컴퓨터를 사용해도 큰 수의 경우는 매우 오랜 시간이 걸린다. 이와 같이 소인수분해의 어려움을 이용하는 암호화 방법으로 현재 널리 사용되고 있는 ‘공개 열쇠 암호 체계’가 있다.

(4) 소수의 무한성

유클리드의 원론 제IX권에는 소수가 무한히 많다는 정리(명제 20)도 있다. 이에 대한 증명은 참고 문헌의 ‘정수론’을 보라.

무수히 많은 소수를 한 개의 공식을 나타낼 수 있다면, 매우 편리할 것이다. 이에 따라 많은 수학자는 그와 같은 공식을 찾으려고 시도했다. 예를 들면, 페르마(Pierre de Fermat, 1601?-1665)는 다음과 같은 공식으로 얻는 ‘페르마 수’는 항상 소수가 된다고 주장했다.

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

실제로, 처음 다섯 개의 페르마 수는 소수이다.

$F_0=2$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=65537$

페르마 수는 지수도 2의 거듭제곱이기 때문에, n의 값이 커짐에 따라 그 값이 급격하게 증가해서 소수 여부의 판정이 매우 어려워진다. 페르마의 주장은 1732년 오일러(Leonhard Euler, 1707−1783)에 의하여 거짓으로 밝혀졌다. F_5는 다음과 같이 소인수분해되는 합성수이다.

$$F_5=4294967297=641\times6700417$$

F_5부터 F_{23}까지의 모든 페르마 수를 포함해서 그 속성이 밝혀진 100여 개의 페르마 수는 모두 합성수이다. 이에 따라, 처음 다섯 개를 제외한 나머지 모든 페르마 수는 합성수일 것이라고 추측되고 있다. 페르마 수는 몇 가지의 경우를 관찰하고 일반적인 결과를 주장할 수 없음을 보여주는 훌륭한 예로 활용되고 있다.

<페르마 수와 작도 가능성>

페르마 수와 관련된 놀라운 사실이 있다. 가우스(Karl Friedrich Gauss, 1777- 1855)는 다음과 같은 사실을 증명했다.

“정n각형을 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있는 필요충분조건은 2 이상의 자연수 k에 대하여 $n=2^k$이거나 음이 아닌 정수 l에 대하여 $n=2^l p_1 p_2 \cdots p_r$이다. 여기서 p_1, p_2, $\cdots$, p_r은 서로 다른 소수인 페르마 수이다.”

그러므로 소수 p에 대하여 정p각형을 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있는 필요충분조건은 p가 페르마 수이다.

그렇다면 소수만을 그리고 모든 소수를 값으로 가지는 공식이 있을까? 그런 공식들이 있기는 하지만, 약간 복잡하거나 활용 가치가 높지 않다. 한 개의 예를 들겠다.

임의의 자연수 m과 n에 대하여 다음과 같이 k를 정하자.

$$k=m(n+1)-(n!+1)$$

그리고 다음을 계산하자.

$$p=\frac{1}{2}(n-1)\{|k^2-1|-(k^2-1)\}+2$$

그러면 p의 값은 언제나 소수이고, 모든 소수는 m과 n의 적당한 값에 대한 p의 값으로 나타난다. 무수히 많은 m과 n에 대하여 p=2가 되고, 다른 소수는 단 한 가지의 m과 n의 값에 대하여 p의 값이 된다. 예를 들면 다음과 같다.

m=1, n=2 ⇒ p=3
m=5, n=4 ⇒ p=5
m=103, n=6 ⇒ p=7
m=329891, n=10 ⇒ p=11
⋮ ⋮ ⋮

<소수 정리>

소수 생성 공식이 있지만, 소수는 일정한 규칙에 따라 나타나지 않고, 다음 소수가 언제 나타날 지를 전혀 예측할 수 없다.

그렇지만 소수의 '밀도'에는 일정한 규칙이 있다. 즉, 주어진 자연수 n보다 작은 소수의 개수를 $\pi(n)$이라고 하면, n의 값이 커짐에 따라 밀도 $\pi(n)/n$은 $1/\ln n$에 접근한다. 극한을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}=1$$

이를 '소수 정리'라고 하는데, 가우스가 처음으로 추측했고, 1896년 프랑스의 아다마르(J. Hadamard)와 벨기에의 푸생(C. J. Poussin)이 독자적으로 증명했다.

(5) 메르센 소수

소수는 무한히 많기 때문에, 가장 큰 소수는 없고 현재까지 발견된 소수보다 더 큰 소수가 언제나 존재한다. 이에 따라 더 큰 소수를 찾기 위한 경쟁이 치열하게 진행되고 있다.

그렇지만 컴퓨터를 사용해도 거대한 수의 소수 판정이 쉽지 않고 시간이 많이 걸린다. 그래서 효율적인 알고리즘으로 소수 여부를 쉽게 판정할 수 있는 특별한 형태의 수들을 선택한다. 그와 같은 수로 다음과 같이 정의되는 '메르센 수'가 있다.

$M_n=2^n-1$

메르센 수는 프랑스의 메르센(Marin Mersenne, 1588-1648)의 이름을 따서 부르고 있다. 메르센은 1644년 이런 수가 n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257에 대하여 소수이고, 257보다 작은 다른 모든 n에 대해서는 합성수라고 말했다. 메르센의 말은 탁상용 계산기가 출현한 1947년에 이르러서야 진위 여부가 판명되었는데, 그는 다섯 가지 실수를 범했다. M_{67}과 M_{257}은 소수가 아니고, M_{61}, M_{89}, M_{107}은 소수이다.

소수인 메르센 수를 '메르센 소수'라고 하는데, 그 동안 가장 큰 소수의 기록을 유지했던 수는 대부분 메르센 소수였다. 메르센 소수는 위에서 말한 12개를 포함해서 현재(2012년 2월)까지 47개가 발견되었다. 가장 최근에 발견된 메르센 소수는 지난 2009년 6월에 발견된 $2^{42643801}-1$이고, 지금까지 발견된 가장 큰 메르센 소수는 지난 2008년 8월에 발견된 $2^{43112609}-1$이다. 다음 표는 메르센 소수 7개를 가장 큰 것부터 나열한 것이다.

소수	자리의 수	발견 연도
$2^{43112609}-1$	12978189	2008
$2^{42643801}-1$	12837064	2009
$2^{37156667}-1$	11185272	2008
$2^{132582657}-1$	9808358	2006
$2^{30402457}-1$	9152052	2005
$2^{25964951}-1$	7816230	2005
$2^{24036583}-1$	7235733	2004

1.2. 교육과정 및 교과서 내용

1 소인수분해

이 영역에서는 소수와 합성수 및 거듭제곱의 뜻과 이를 이용한 자연수의 소인수분해에 대하여 알아본다. 또 소인수분해를 이용하여 두 개 이상의 자연수의 최대공약수와 최소공배수 구하는 방법과 그 활용에 대하여 알아본다.

다음은 이 영역을 도입할 때 학생들의 관심과 흥미를 유발하기 위해 사용할 수 있는 실생활 소재의 한 예이다.

13년, 17년 동안 땅 속에서 사는 매미가 있다.

매미는 땅 속에서 일정 기간을 애벌레로 지내다가 땅 위로 나와 성충이 된 다음 2~4주 남짓한 기간을 살다가 번식을 하고 생을 마감한다. 보통 매미는 땅 속에서 1~7년을 애벌레로 지내지만 북아메리카에는 자그만치 13년, 17년 동안 애벌레로 지내는 두 종의 매미가 있다. 이 매미들이 이렇게 오랫동안 땅 속에서 지내는 이유는 두 가지라고 한다. 첫째는 거미, 사마귀와 같은 천적을 피해 종족을 가급적 많이 번식시키기 위한 것이고, 둘째는 이 두 종의 매미가 한 여름에 동시에 나타나게 되면 먹이 경쟁을 할 수 밖에 없으므로 이를 피하기 위한 것이라고 한다.

생각해 봅시다

1

2

① 거듭제곱의 뜻을 안다.

◦ 거듭제곱의 뜻을 알게 한다.

같은 수를 여러 번 곱한 것을 거듭제곱으로 **간단히** 나타내고, 거듭제곱에서 지수와 밑이 되는 수를 알게 한다. 지수는 자연수 범위에서만 다룬다. 여기서 '제곱'은 순우리말로 '자기 자신과의 곱'을 의미하고, '거듭'은 '여러 번'을 의미하므로, 거듭제곱은 순우리말로 자기 자신을 여러 번 곱하는 것을 의미한다. '밑'은 순우리말인 것에 비해 '지수'는 한자말인데, '지수'를 대신할 순우리말 용어는 없는지 생각해 볼 일이다.

다음은 거듭제곱의 개념을 도입할 때 학생들의 흥미와 관심을 유발할 수 있는 실생활 소재를 이용한 활동의 한 예이다.

거듭제곱이란 무엇일까?

요리사가 손으로 국수를 만들 때, 반죽을 손으로 잡아당겨 늘인 다음 반으로 접고 다시 잡아당겨 늘이는 일을 반복한다. 이때, 한 번 접으면 국수는 2가닥이 되고 두 번 접으면 2×2가닥이 된다.

1 세 번 접으면 국수는 몇 가닥이 되는가?

2 열 번 접으면 국수는 몇 가닥이 되는지 식으로 나타내어 보자.

② 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다.

◦ 소수(素數; prime number)의 뜻을 알게 한다.

소수와 합성수의 뜻을 알고, 에라토스테네스의 체 등을 이용하여 소수를 찾게 한다.

소수와 합성수는 무엇일까?

6개의 쌓기나무를 직육면체 모양으로 배열하는 방법은 다음과 같이 2가지가 있다.

활동

가. 12개의 쌓기나무를 직육면체 모양으로 배열해 보자. 몇 가지 방법이 있는지 찾아보자.
나. 13개의 쌓기나무를 직육면체 모양으로 배열해 보자. 몇 가지 방법이 있는지 찾아보자.

❶ 위 활동 가, 나에서 각각 몇 가지 방법을 찾았는가?
❷ 쌓기나무를 직육면체 모양으로 배열했을 때, 한 모서리에 있는 쌓기나무의 개수는 전체 개수와 어떤 관계가 있는가?
❸ 직육면체 모양으로 배열하는 방법이 하나밖에 없는 것은 어떤 경우인지 서로 이야기해 보자.

◦ 소인수분해의 방법을 알고, 주어진 자연수를 소인수분해하게 한다.

소인수와 소인수분해의 뜻을 알고, 주어진 자연수를 소인수분해할 수 있게 한다. 소인수분해를 이용하여 약수를 구할 수 있게 한다.

소인수분해란 무엇일까?

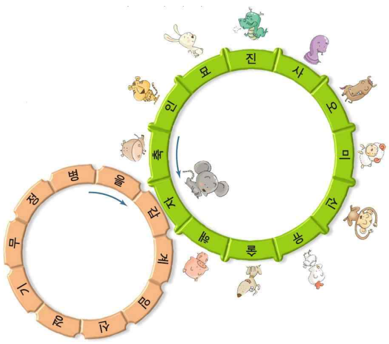
1이 아닌 자연수가 쓰인 카드가 각각 여러 장 있다. 각 카드는 거기에 쓰인 수와 곱하여 같게 되는 수가 쓰인 2장의 카드와 맞바꿀 수 있다. 예를 들어 12가 쓰인 카드는 다음 그림과 같은 순서로 각각 2, 2, 3이 쓰인 3장의 카드와 바꿀 수 있다.

❶ 24가 쓰여 있는 카드를 2장의 카드와 바꿀 수 있는 방법을 모두 말해 보자.
❷ 24가 쓰여 있는 카드를 될 수 있으면 많은 카드와 바꾸려고 한다. 어떤 순서로 하면 되는지 위와 같이 그림으로 나타내어 보자.
❸ 위 ❷에서 그린 그림을 다른 친구들의 그림과 비교해 보자. 또, 마지막 결과가 모두 같은가?

③ 최대공약수와 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

60년마다 반복되는 하늘과 땅의 조화

예전에는 하늘을 뜻하는 10개의 천간(갑, 을, 병, 정, 무, 기, 경, 신, 임, 계)과 땅을 뜻하는 12개의 지지(자, 축, 인, 묘, 진, 사, 오, 미, 신, 유, 술, 해)를 차례대로 사용해 갑자년, 을축년, 병인년, …등으로 해의 이름을 붙였다. 이와 같이 해의 이름을 정하면 60년마다 같은 이름의 해가 돌아온다.



생각해 봅시다

❶

❷

◦ 최대공약수의 성질을 이해하고 소인수분해를 이용하여 최대공약수를 구하게 한다.

자연수 a와 b의 모든 공약수는 최대공약수의 약수임을 예를 통해 이해하고, a와 b의 최대공약수가 1일 때

두 수를 ‘서로소’라고 함을 알게 한다. 소인수분해를 이용하여 두 수의 최대공약수를 구하게 한다.

소인수분해를 이용하여 180과 252의 최대공약수를 구하여라. 또, 공약수를 모두 구하여라.

풀이. 주어진 두 수를 각각 소인수분해하여 공통으로 나타나는 소인수들을 모두 찾아 곱하면 된다.

$$\begin{array}{rl} 180 = & 2\times2\times3\times3\times5 \\ 252 = & 2\times2\times3\times3\quad\times7 \\ \hline & 2\times2\times3\times3\qquad=36 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 180=2^2\times3^2\times5 \\ 252=2^2\times3^2\quad\times7 \\ \hline \quad 2^2\times3^2\qquad=36 \end{array}$$

위와 같이 구하는 최대공약수는 $2\times2\times3\times3$, 즉 36이다.

또, 공약수는 36의 약수인 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이다.

◦ 최소공배수의 성질을 이해하고 소인수분해를 이용하여 최소공배수를 구하게 한다.

자연수 a와 b의 모든 공배수는 최소공배수의 배수임을 예를 통해 이해하고, 소인수분해를 이용하여 두 수의 최소공배수를 구하게 한다. 약수와 배수는 자연수의 범위에서만 다룬다.

소인수분해를 이용하여 18과 30의 최소공배수를 구하여라. 또, 공배수를 구하여라.

풀이

주어진 두 수를 각각 소인수분해하여 공통으로 나타나는 소인수들과 어느 한쪽에만 나타나는 소인수들을 찾아 곱하면 된다.

$$\begin{array}{rl} 18 = & 2\times3\times3 \\ 30 = & 2\times3\qquad\times5 \\ \hline & 2\times3\times3\times5=90 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 18=2\times3^2 \\ 30=2\times3\times5 \\ \hline \quad 2\times3^2\times5=90 \end{array}$$

위와 같이 구하는 최소공배수는 $2\times3\times3\times5$, 즉 90이다. 또, 공배수는 90의 배수인 90, 180, 270, $\cdots$이다.

답 최소공배수 : 90 , 공배수 : 90, 180, 270, $\cdots$

④ 최대공약수와 최소공배수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

◦ 최대공약수와 최소공배수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하게 한다.

최대공약수와 최소공배수가 활용되는 실생활 문제 상황에서 최대공약수와 최소공배수를 이용하여 문제를 해결하게 한다.

초콜릿 56개와 사탕 72개를 되도록 많은 주머니에 나누어 담으려고 한다. 모든 주머니에 들어 있는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수를 각각 같게 하고 초콜릿이나 사탕이 남지 않게 하려면 주머니가 몇 개 있어야 하는가?

풀이

문제의 이해 초콜릿 56개를 같은 개수로 나누어 담으려면 주머니의 수가 56의 약수이면 된다. 마찬가지로 사탕 72개를 나누어 담으려면 주머니의 수는 72의 약수이어야 한다.

계획 세우기 구하는 주머니의 수는 56의 약수이고 72의 약수인 자연수, 즉 56과 72의 공약수가 된다. 이때, 되도록 많은 주머니에 나누어 담기 위하여 최대공약수를 구한다.

계획 실행 56과 72를 각각 소인수분해하면 오른쪽과 같으므로 최대공약수는 $2\times2\times2$, 즉 8이다. 따라서 주머니의 수는 8이다.

$$\begin{array}{l} 56=2\times2\times2\qquad\qquad\times7 \\ 72=2\times2\times2\times3\times3 \\ \hline \quad\;\; 2\times2\times2\qquad\qquad=8 \end{array}$$

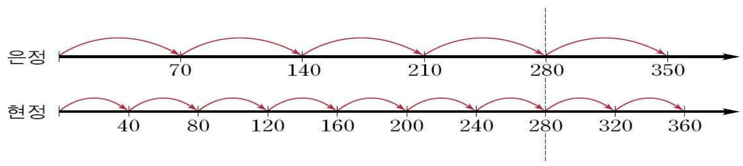
반성과 검토 8개의 각 주머니에는 초콜릿 7개, 사탕 9개씩 나누어 담을 수 있음을 확인할 수 있다.

답 8개

운동장 한 바퀴를 도는 데 은정이는 뛰어서 70초가 걸리고 현정이는 자전거를 타고 40초가 걸린다. 두 사람이 동시에 같은 곳에서 출발하여 같은 방향으로 돌 때, 처음으로 두 사람이 동시에 출발한 곳으로 돌아오는 것은 몇 초 후인가? 또, 그때까지 은정이는 운동장을 몇 바퀴 돌게 되는가?

풀이

문제의 이해 은정이와 현정이가 출발한 곳으로 돌아오는 시간을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



계획 세우기 구하는 시간은 70과 40의 공배수가 된다. 그런데 처음으로라고 했으므로 최소공배수를 구한다.

계획 실행 70과 40을 각각 소인수분해하면 오른쪽과 같으므로 70과 40의 최소공배수는 $2\times2\times2\times5\times7$, 즉 280이다. 따라서 280초 후에 처음으로 두 사람이 동시에 출발한 곳으로 돌아온다. 또, $280\div70=4$이므로 280초는 은정이가 4바퀴를 도는 시간이다.

$$\begin{array}{l} 70=2\qquad\qquad\;\;\times5\times7 \\ 40=2\times2\times2\times5 \\ \hline \qquad 2\times2\times2\times5\times7=280 \end{array}$$

반성과 검토 280초 후에 은정이와 현정이는 4바퀴, 7바퀴를 돌아 출발한 곳으로 되돌아옴을 확인할 수 있다.

답 280초, 4바퀴

논리를 키우는 수학!!

다음 글을 읽고 물음에 답하여라.

1.  석우 : 소수를 작은 수부터 차례로 나열하였을 때, 처음부터 두 개의 소수를 곱한 값에 1을 더한 수는 다시 소수가 돼.

 민준 : 처음부터 세 개의 소수를 곱한 값에 1을 더해도 다시 소수가 돼.

 혜원 : 같은 방법으로 네 개의 소수를 곱한 값에 1을 더한 수도 소수가 될 것 같은데?
그렇다면 소수를 작은 수부터 차례로 나열하였을 때, 처음부터 다섯 개의 소수, 여섯 개의 소수, …를 곱한 값에 1을 더한 수도 다시 소수가 되지 않을까?

2. 골드바흐의 추측은 18세기 러시아의 수학자 골드바흐(Goldbach, C. ; 1690~1764)에 의하여 제기된 문제로 '2보다 큰 모든 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다.'이다.
예를 들면 $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$이다.
이 문제는 보기에는 쉬워도 아직까지 해결하지 못한 수학에서의 난제 중의 하나이다.

1. 석우와 민준이가 말한 소수는 각각 무엇인가?

2. 혜원이가 말한 수의 약수를 구하여 혜원이의 생각이 옳은지 토의하여라.

3. 다음 수를 두 개의 소수의 합으로 나타내어 골드바흐의 추측을 확인하여라.

(1) 10　　(2) 18　　(3) 32

1.3. 교수학습 참고자료

가장 큰 소수는...?

가장 큰 소수는 존재하지 않는다. 유클리드는 그의 원론 제9권 명제20에서 소수는 무한히 많으며, 따라서 가장 큰 소수는 존재하지 않음을 다음과 같이 증명했다.

소수가 유한개 있고 그 중 가장 큰 소수를 n이라 가정하자. n까지의 모든 소수들의 곱을 $P=2\times3\times\cdots n$라고 하면, $P+1$은 소수이거나 합성수이다. 만약 $P+1$이 합성수라면 n이하의 소수 중 하나로 나누어져야 하지만, 이것은 불가능하므로 $P+1$은 소수이어야 한다. 그러나 이것은 n이 가장 큰 소수라는 가정에 모순이다. 따라서 소수는 무한히 많고, 가장 큰 소수는 존재하지 않는다.

[주의] 위의 증명에서 $P+1$은 합성수가 아니지만, 그렇다고 항상 소수인 것도 아니다. 예를 들어

$2\times3+1=7$, $2\times3\times5+1=31$,

$2\times3\times5\times7+1=211$, $2\times3\times5\times7\times11+1=2311$

은 소수이지만 $2\times3\times5\times7\times11\times13+1=30031=59\times509$는 소수가 아니다.

1000 이하의 소수 목록

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997

<더 많은 소수의 목록을 볼 수 있는 사이트>

http://www.math.utah.edu/~pa/math/primelist.html

n 이하의 소수를 모두 찾으려면 - 에라토스테네스의 체

에라토스테네스의 체를 이용하여 n 이하의 소수를 찾으려면, $\sqrt{n}$보다 작은 소수들의 배수를 모두 지우면 된다. 예를 들어, 10000 이하의 소수를 모두 찾으려면 $\sqrt{10000}=100$ 이하의 소수 중 가장 큰 소수인 97의 배수까지 지우면 된다.

<에라토스테네스의 체를 직접 실행해볼 수 있는 사이트>

http://math.utah.edu/~alfeld/Eratosthenes.html

거듭제곱의 위력

고대 인도의 왕자 살라는 체스 게임에 매료된 나머지 체스의 발면가 세타를 불러 상을 내리겠다고 했다. 세타는 국왕에게 다음과 같이 아뢰었다.

"체스 판은 모두 64칸으로 되어 있습니다. 저에게 쌀을 주시되 첫째 칸에는 한 알, 둘째 칸에는 두 알, 셋째 칸에는 네 알, 이렇게 다음 칸에는 바로 앞 칸의 두 배가 되도록 64칸까지 계산해서 그것들을 주실 수 있나요? "

"뭐 그 정도 쯤이야. 내 그렇게 상을 내리리라.“

살라는 세타의 소박한 바램을 흔쾌히 허락했다.

그런데 과연 살라는 세타의 소원을 들어줄 수 있었을까?

세타의 소원대로 쌀을 주면

10째 칸에는 512알, 20째 칸에는 524,288알,
30째 칸에는 536,870,912알, …
쌀 800알이 약 1kg이므로 30째 칸이면 약 671089kg 또는 671톤이 된다.
즉 64번째 칸까지 채우게 될 쌀의 양은 어마어마한 양이었던 것이다.

약수와 인수

약수(約數, divisor)는 나눗셈에서, 인수(因數, factor)는 곱셈에서 비롯된 용어이지만, 소인수분해와 관련된 내용을 다룰 때는 통상적으로 약수보다는 인수라는 용어를 사용한다.

소인수분해의 유일성

12를 여러 가지 방법으로 소인수분해하게 한 뒤, 자연수를 어떤 방법으로 소인분해해도 소인수들을 곱하는 순서를 고려하지 않으면 그 결과는 오직 한 가지뿐이라는 사실을 알게 한다. 이것을 '산술의 기본 정리' 혹은 '소인수분해의 유일성'이라고 한다.
자연수 1을 소수에서 제외시킨 것은 소인수분해의 유일성과 관련이 있다고 볼 수 있는데, 만약 1을 소수로 취급하면 다음과 같이 소인수분해의 결과를 여러 가지로 나타낼 수 있게 된다.
$6=2\times3=1\times2\times3=1^2\times2\times3=\cdots$

자연수를 소수들의 합으로 – 골드바흐의 추측

1보다 큰 모든 자연수는 소수들의 곱으로 나타낼 수 있고, 이를 소인수분해라고 한다. 그렇다면 자연수를 소수들의 합으로도 나타낼 수 있을까? 이와 관련된 문제 중의 하나인 '골드바흐의 추측'은 소수와 관련하여 아직 해결되지 않은 미해결 문제 중 하나로 2보다 큰 모든 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다는 것이다. 예를 들어, 20까지의 짝수는 다음과 같이 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

4 = 2+2 , 6 = 3+3 ,
8 = 3+5 , 10 = 3+7 = 5+5 ,
12 = 5+7 , 14 = 3+11 = 7+7 ,
16 = 3+13 = 5+11 , 18 = 5+13 = 7+11 ,
20 = 3+17 = 7+13 , …

그러나 모든 짝수에 대해서 가능한지는 아직까지 증명도 반증도 되지 않았다.

소인수분해의 활용_약수의 개수와 총합

자연수 n이 두 소수 a와 b로 $n=a^pb^q$와 같이 소인수분해될 때, a^p의 약수는 $1, a, a^{2,} \cdots, a^p$의 $(p+1)$개이고, b^q의 약수는 $1, b, b^{2,} \cdots, b^q$의 $(q+1)$개이다.
따라서 n의 약수의 개수는 $(p+1)(q+1)$이고,
n의 약수의 총합은 $(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)$이다.
자연수 n이 3개 이상의 소인수들의 거듭제곱의 곱으로 소인수분해되는 경우에도 마찬가지 방법으로 약수의 개수와 총합을 구할 수 있다. 예를 들어 $360=2^3\times3^2\times5$의 약수의 개수는 $(3+1)(2+1)(1+1)=4\times3\times2=24$이고, 약수의 총합은 $(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\times13\times6=1170$이다.

[수준별 활동 - 상]

약수의 개수가 홀수인 자연수는 어떤 수일지 생각해보게 하고, 100 이하의 자연수 중에서 이런 수를 모두 찾아보게 한다.

[풀이] 어떤 자연수의 약수의 개수가 홀수라는 것은 각 소인수의 지수에 1을 더한 결과가 모두 홀수임을 의미한다. 따라서 주어진 자연수의 각 소인수는 모두 짝수이고, 각 소인수의 지수가 모두 짝수인 자연수는 제곱수이다.

최대공약수의 성질

두 자연수의 공약수는 모두 이 두 수의 최대공약수의 약수임을 다음과 같이 보일 수 있다.

두 자연수 a와 b의 최대공약수를 d라 하면, 다음을 만족시키는 서로소인 두 자연수 x와 y가 존재한다.

$$a = dx\,,\ b = dy$$

두 자연수 a와 b의 공약수 중에서 d의 약수가 아닌 공약수가 존재한다고 가정하고, 그 수를 c라 하자. c는 a와 b의 공약수이면서 d의 약수는 아니므로, c의 소인수 중에서 a와 b의 공약수이지만 d의 약수가 아닌 수 e가 존재한다. 즉, 소수 e는 $a = dx$ 와 $b = dy$ 의 공약수이고, d의 약수는 아니다. 그러므로 e 는 x와 y 의 공약수이다. 소수 e 는 1보다 크므로 이것은 x 와 y 가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 두 자연수 a와 b의 공약수 중에서 d의 약수가 아닌 공약수는 존재하지 않는다. 즉, 두 자연수의 공약수는 모두 이 두 수의 최대공약수의 약수이다.

두 수의 최대공약수를 구하는 다른 방법

4와 6의 최대공약수는 2이고, 이는 4와 2(=6-4)의 최대공약수인 2와 같다. 이와 같이 $a < b$인 두 자연수 a와 b의 최대공약수는 a와 $(b-a)$의 최대공약수와 같다.

이 성질을 여러 번 반복해서 사용하면 두 자연수의 최대공약수를 쉽게 구할 수 있다. 예를 들어 두 자연수 15와 24의 최대공약수를 (15, 24)라 하면, 다음이 성립한다.

(15, 24) = (15, 24-15) = (15, 9) = (15-9, 9) = (6, 9) = (6, 9-6) = (6, 3)

따라서 15와 24의 최대공약수는 6과 3의 최대공약수와 같고, 6과 3의 최대공약수는 3이므로 결국 15와 24의 최대공약수는 3이다.

두 자연수의 최대공약수를 구하는 이런 방법을 유클리드의 호제법(Euclidean algorithm)이라 한다. 유클리드의 호제법을 이용하면 공약수를 찾아 나누어보거나 소인수분해를 하지 않고도 두 자연수의 최대공약수를 구할 수 있다.

<두 수 혹은 세 수의 최대공약수를 구할 수 있는 사이트>

http://www.wolframalpha.com/input/?i=greatest+common+divisor

$ax + by = d$

두 자연수 a와 b의 최대공약수를 d라 할 때, 다음을 만족시키는 두 정수 x와 y가 존재한다.

$$ax + by = d$$

특히 두 자연수 a와 b가 서로소이면 $ax + by = 1$ 을 만족시키는 두 정수 x와 y가 존재하고, 따라서 임의의 자연수 n에 대하여 $as + bt = n$ 을 만족시키는 두 정수 s와 t가 존재한다.

예를 들어 서로소인 두 자연수 5와 3에 대하여 $5 \times 2 + 3 \times (-2) = 4$가 성립한다. 이 식으로부터 5갤런 짜리 물통을 2번 채우고 3갤런 짜리 물통을 2번 비우면 4개런의 물을 남길 수 있음을 알 수 있다. 이를 5갤런 짜리 물통과 3갤런 짜리 물통을 이용하여 4갤런의 물을 담아내는 과정에 대응시켜 살펴보면 다음과 같다.

❶ 우선 5갤런 통을 가득 채운 후 3갤런 통에 따라내어 2갤런이 남도록 한다.

--> 5갤런 짜리 물통을 1번 채운다.

❷ 3갤런 통을 비운 후 5갤런 통에 남아있는 2갤런의 물을 붓는다. 이제 3갤런 통에는 1갤런이 더 들어갈 수 있다.

--> 3갤런 짜리 물통을 1번 비운다.

❸ 5갤런 통을 가득 채운 후 2갤런이 들어 있는 3갤런 통을 가득 채우면, 5갤런 통에는 4갤런의 물이 남게 된다.

--> 5갤런 짜리 물통을 1번 채우고, 3갤런 짜리 물통을 1번 비운다.

그러나 6갤런 짜리 물통과 3갤런 짜리 물통으로 4갤런의 물을 담아내는 것은 불가능하다. 왜냐하면 6갤런과 3갤런 짜리 물통 두 개를 가득 채우고 비우는 과정을 반복하는 것은 6과 3을 서로 더하고 빼는 과정을 반복하는 것과 같고, 이 과정을 반복해서 담을 수 있는 물의 양은 3갤런, 6갤런, 9갤런, … 과 같이 (3의 배수)갤런 중 하나인 반면 4는 3의 배수가 아니기 때문이다.

나누어보지 않고도 알 수 있는 배수 판정법

모든 자연수는 1의 배수이다. 2의 배수인 동시에 3의 배수인 자연수는 6의 배수이다. 주어진 자연수가 2의 배수인지 아닌지 혹은 3의 배수인지 아닌지 판정하려면 그 수를 2와 3으로 직접 나누어보면 된다. 그러나 다음과 같이 나눗셈을 직접 해보지 않고도 주어진 자연수가 어떤 수의 배수인지 아닌지를 판단하는 방법이 있다.

	규칙
2의 배수	일의 자리의 수가 0 또는 짝수
3의 배수	각 자리의 숫자의 합이 3의 배수
4의 배수	마지막 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수
5의 배수	일의 자리의 수가 0 또는 5
9의 배수	각 자리의 숫자의 합이 9의 배수

<두 수 혹은 세 수의 최소공배수를 구할 수 있는 사이트>

http://www.wolframalpha.com/input/?i=least+common+multiple

두 수의 최대공약수와 최소공배수의 관계

두 자연수 A와 B의 최대공약수를 G라 하면, 다음을 만족시키는 서로소인 두 자연수 a와 b가 존재한다.

$$A = aG, \quad B = bG$$

이때 두 자연수 A와 B의 최소공배수를 L이라 하면 다음이 성립한다.

$$L = abG$$

위 사실로부터 두 수의 최대공약수와 최소공배수 사이에 다음의 관계가 있음을 알 수 있다.

(1) $AB = aG \times bG = (abG)G = LG$이다. 즉, 두 자연수의 곱은 그 두 수의 최대공약수와 최소공배수의 곱과 같다.

$$AB = LG$$

(2) $L = G$이면 $ab = 1$ 즉, $a = b = 1$이므로 $A = B$이다. 즉, 두 자연수의 최대공약수와 최소공배수가 같다면 그 두 수는 같은 수이다.

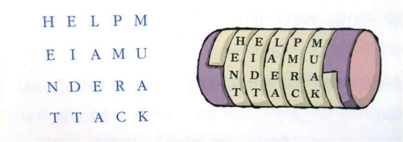
(3) $AB = L$이면 $G = 1$이다. 즉, 두 자연수의 곱이 최소공배수와 같다면 그 두 수는 서로소이다.

고전 암호 - 전치 암호와 이동 암호

(1) 전치 암호

암호는 기원전 고대 그리스 시대부터 사용되었는데, 그 중 가장 먼저 나타난 암호는 문자의 위치를 바꾸는 전치 암호이다. 전치 암호는 고대 그리스의 스파르타에서 사용 되었는데, 전쟁에 나간 군대와 본국에 남아 있는 군대가 같은 굵기의 원통형 막대를 나누어 가지고, 이 막대에 폭이 좁고 긴 양피지를 감고 평문을 가로로 쓴 뒤 풀어 놓으면, 문자가 뒤

섞여 같은 두께의 막대가 있지 않으면 암호를 풀 수가 없게 된다.



전치 암호는 댄 브라운의 소설 '다빈치 코드' 에도 들어 있다.

암호문 : O DRACONIAN DEVIL
(오, 드라코같은 악마여)

평문 : LEONARDO DA VINCI
(레오나르도 다빈치)

(2) 이동 암호

일명 시저라고도 하는 로마의 황제 카이사르(Julius Caesar, BC 100~ BC 44)는 브루투스에게 암살당하기 전 QHYHUWUXVWEUXWXV 라는 암호문을 키케로에게 보냈다. 무슨 내용일까?

암호문 : QHYHUWUXVWEUXWXV
평문 :

Q를 N으로 H를 E로 바꾸는 식으로 알파벳을 세 자리씩 앞당겨 올라가는 규칙을 적용해 카이사르가 보낸 암호를 풀면 NEVER TRUST BRUTUS 가 된다.이렇게 암호의 키를 푸는 단서를 '키'라 한다. 여기서는 키가 3이다. 이와 같이 알파벳을 일정한 간격으로 이동하여 적는 방식의 암호를 이동 암호라고 한다.

2. 정수와 유리수

2.1. 이론적 배경

(1) 음수

(가) 중국의 음수

중국에서는 고대부터 음수를 사용했는데, 후한(25~220) 시대에 현재와 같은 모습을 갖춘 구장산술(九章算術)에서는 연립방정식의 풀이에서 양수(正數)와 음수(負數)을 사용하고 있으며, 양수와 음수의 덧셈과 뺄셈 방법인 '정부술'(正負術)을 설명하고 있다. 예를 들어, 구장산술의 제8장 '방정'에 나타나는 셋째 문제는 다음과 같다.

> "상급벼가 2단, 중급벼가 3단, 하급벼가 4단 있는데, 거기서 [탈곡하여] 나오는 벼의 양을 어느 것이든 1말에 못 미친다. 하지만 상급벼(2단)에 중급벼 1단을 더하고, 중급벼(3단)에 하급벼 1단을 더하고, 하급벼(4단)에 상급벼 1단을 더하면, 어느 것이든 거기서 나온 벼의 양이 정확히 1말이 된다. 그렇다면 상·중·하급벼에서 나오는 벼의 양을 각각 얼마인가?"

구장산술에서는 이 문제를 오늘날의 '가우스 소거법'과 같은 방법으로 풀었는데, 그 과정에서 음수를 자유롭게 사용하였다(그렇지만 양수의 해만을 다루었다.). 또 다음과 같이 제8장의 여섯째 문제에서는 처음에 계수의 나열부터 음수를 사용하고 있다.

> "상급벼가 3단 있다. 여기서 나온 벼의 양에 6말을 더하면, 하급벼 10단에 해당한다. 하급벼 5단이 있는데, 여기서 나온 벼에 1말을 더하면 상급벼 2단에 해당한다. 그렇다면 상·하급벼 1단에서 나오는 벼의 양을 각각 얼마인가?"

상급 볏단	하급 볏단	벼의 양	오늘날의 표현
3	-10	6	$3x-10z+6=0$
-2	5	1	$-2x+5z+1=0$

이때 양수와 음수를 구별하기 위해서 양수는 빨간 산대로 음수는 검은 산대로 나타내거나, 일의 자리를 나타내는 산대 위에 다른 산대를 비스듬히 올려놓는 방법으로 음수를 나타내기도 했다. 예를 들어, 다음은 732와 -732를 산대를 사용하여 각각 나타낸 것이다.

한편, 구장산술에서 비롯되어 조선 시대의 산학서에서도 널리 이용된 정부술, 즉 양수와 음수의 덧셈과 뺄셈 방법은 다음과 같다. 다음에서 위의 네 가지는 뺄셈 규칙이고 아래의 네 가지는 덧셈 규칙에 해당한다. (여기서 $a>b$이다.)

同名相減	$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$
異名相加	$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$
正無負之	$0-(+b)=-b$
負無正之	$0-(-b)=+b$
異名相減	$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b)$
同名相加	$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b)$
正無正之	$0+(+b)=+b$
負無負之	$0+(-b)=-b$

두 수의 뺄셈에서 부호가 같으면 절대값을 빼고 부호가 다르면 절대값을 더한다(同減異加). 그리고 사람이 없다는 것은 상대가 없다는 것으로, '빼임수(피감수)가 없다면(0이라면)'의 뜻으로 $-$(양수)$=$음수, $-$(음수)$=$양수를 뜻한다. 그리고 부호가 같은 것을 同名, 부호가 다른 것을 異名이라 하였다.

뺄셈에서와 마찬가지로, 덧셈에서도 절대값에 대한 설명에 해당한다. 부호가 같으면 절대값을 더하고 부호가 다르면 절대값을 뺀다(異減同加). 그리고 '상대가 없으면'은 '더하임수(피가수)가 없다면(0이라면)'의 뜻으로 $+$(양수)$=$양수, $+$(음수)$=$음수를 뜻한다.

(나) 인도와 유럽의 음수

인도의 브라마굽타(Brahmagupta, 588- 660?)는 양수와 음수 사이의 관계를 재산과 부채와 같이 서로 반대되는 개념을 설명했는데, 음수와 0의 산술에 대한 체계적인 연구를 최초로 시행했다. 그는 이차방정식의 일반적인 해법을 연구했는데, 두 근 중에서 하나가 음수인 경우도 다루었다.

인도의 음수는 13세기경 아라비아를 거쳐 이탈리아의 피보나치에 의해 유럽에 전해졌다. 카르다노(Girolamo Cardano, 1501- 1576)는 삼ㆍ사차방정식의 대수적 해법을 다룬 책 위대한 계산법(Ars Magna, 1545)에서 음수를 사용했는데, 데카르트(René Descartes, 1596-1650)에 의해 음수의 뜻이 완성되었다.

그렇지만 데카르트마저도 음수 근을 '거짓 근'(false root)이라고 불렀듯이, 음수의 도입은 큰 저항을 받았다. 파스칼(Blaise Pascal, 1623-1662)은 '영보다 작은' 수는 존재할 수 없다고 생각했으며, 라이프니츠는 음수를 이용하면 어리석은 결과를 낳을 수 있지만 계산에서 음수가 유용한 도구라고 사실은 인정했다.

오일러는 음수를 받아들이기는 했지만, $\frac{a}{0}=\infty$이므로 a를 0보다 작은 수로 나눈 결과는 ∞보다 커야 한다는 논리에서 음수가 ∞보다 크다고 믿었다.

18세기에 이르러 음수는 일반적으로 받아들여졌고 대수학에서 이용되었지만, 여전히 수학자들은 음수의 이용에 불안을 느꼈고 가능하면 이를 피하려고 했다. 음수(와 복소수)가 정당한 수로 완전히 인정받은 것은 수에 대한 공리적 접근이 이루어진 뒤였다.

(2) 정수와 유리수

19세기에 페아노(Peano, G. ; 1858 ~ 1932)는 자연수를 공리적으로 엄밀하게 정의하였는데, 이에 따르면 자연수는 다음의 5가지 공리를 만족하는 집합 N의 원소이다.

① 1은 N의 원소이다.
② n이 N의 원소이면 n'도 N의 원소이다.(여기서 n'은 n의 후자(successor)이다.)
③ N의 어떤 원소에 대해서도 n'은 1과 같지 않다.
④ N의 두 원소 n, m에 대하여 $n' = m'$이면 $n = m$이다.
⑤ M을 다음 조건을 만족시키는 자연수의 집합이라 하자. (1) M은 1을 포함한다. (2) M은 n를 포함할 때마다 n'을 포함한다. 그러면 M은 모든 자연수를 포함한다.

n'을 n+1로 해석하고 덧셈과 곱셈을 적절히 정의하면, 위의 페아노의 공리로부터 자연수의 성질들을 유도할 수 있다. 또, 자연수로부터 정수와 유리수를 구성하여 정의하고 그 성질을 유도할 수 있다.

(가) 정수의 구성

정수는 자연수의 순서쌍들의 동치류로 구성하여 정의할 수 있다.
먼저 자연수 전체의 집합 N에 대하여 N×N 위의 관계 ~를 다음과 같이 정의하자.

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$$

그러면 관계 ~는 집합 N×N 위의 동치 관계이다. 이 동치 관계에 대하여 (a,b)의 동치류를 다음과 같이 $[a,b]$라고 하자.

$$[a,b] = ((x,y) \mid (x,y) \sim (a,b)\}$$

이들 동치류 전체의 집합을 Z라 하고, 집합 Z 위에 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$[a,b]+[c,d] = [a+c, b+d]$$

$$[[a,b] \times [c,d] = [ac+bd, ad+bc]$$

이와 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.
그리고 동치류 $[a,b]$는 다음과 같이 나타낸다.
(1) $a=b$인 경우 즉, $[a,a]$는 0으로 나타낸다.
(2) $a>b$인 경우 $[a,b]$는 $+(a-b)$로 나타낸다.
(3) $a<b$인 경우 $[a,b]$는 $-(b-a)$로 나타낸다.
이에 따르면 동치류 [1,1]은 0이고, [1,2]는 -1, [1,3]은 -2, ⋯ , $[1, n+1]$은 $-n$, ⋯ 을 의미하며, [2,1]은 +1, [3, 1]은 +2, ⋯ , $[n+1, 1]$은 $+n$, ⋯ 을 의미한다. 이와 같이 각 동치류를 0과 자연수 및 양의 부호와 음의 부호를 이용하여 나타내면, 위에서 정의한 자연수의 순서쌍의 동치류 전체의 집합 Z가 바로 우리에게 익숙한 정수 전체의 집합임을 알 수 있다.

(나) 유리수의 구성

정수를 자연수의 순서쌍들의 동치류로 정의했듯이, 유리수를 정수의 순서쌍들의 동치류로 정의할 수 있다.
먼저 정수 전체의 집합 Z에 대하여 Z×(Z-{0}) 위의 관계 ~를 다음과 같이 정의하자.

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

그러면 관계 ~는 집합 Z×(Z-{0}) 위의 동치 관계이다. 이 동치 관계에 대하여 (a,b)의 동치류를 다음과 같이 $[a,b]$라고 하자.

$$[a,b] = ((x,y) \mid (x,y) \sim (a,b)\}$$

이들 동치류 전체의 집합을 Q라 하고, 집합 Q 위에 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$[a,b]+[c,d] = [ad+bc, bd]$$

$[[a,b]\times[c,d]=[ac,bd]$

이와 같이 정의된 덧셈과 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

그리고 동치류 $[a,b]$를 $\dfrac{a}{b}$로 나타내면, 위에서 정의한 정수의 순서쌍들의 동치류 전체의 집합 Q가 바로 우리에게 익숙한 유리수 전체의 집합임을 알 수 있다.

(다) 유리수의 성질

위에서와 같이 덧셈과 곱셈이 정의된 유리수 전체의 집합 Q는 다음의 성질, 즉 체의 공리와 순서 공리를 만족시키는 순서체(ordered field)이다.

[1] 체의 공리(field axioms)

임의의 a∈Q, b∈Q, c∈Q에 대해 다음이 성립한다.

A.1: a+b=b+a

A.2: (a+b)+c=a+(b+c)

A.3: 특정한 원소 0∈Q이 존재하여 a+0=0+a=a이다.

A.4: -a∈Q이 존재하여 a+(-a)=(-a)+a=0이다.

M.1: a · b=b · a

M.2: (a · b) · c=a · (b · c)

M.3: 특정한 원소 1(≠0)∈Q이 존재하여 a · 1=1 · a=a이다.

M.4: 각 a(≠0)∈Q에 대하여 a-1∈Q이 존재하여 a · a-1=a-1 · a=1이다.

D: a · (b+c)=a · b+a · c

[2] 순서 공리(order axioms)

Q에는 다음을 만족시키는 부분집합 P(≠∅)가 존재한다.

O.1: 임의의 a∈P와 b∈P에 대하여 a+b∈P이고 a · b∈P이다.

O.2: 임의의 a∈Q에 대하여 다음 중 하나만이 성립한다.

(i) a∈P (ii) a=0 (iii) -a∈P

집합 P를 원소를 양수라고 한다. 임의의 a∈Q와 b∈Q에 대하여 a+(-b)∈P일 때, a는 b보다 크다 또는 b는 a보다 작다고 하며, 기호로 a>b 또는 b<a와 같이 나타낸다.

2.2. 교육과정 및 교과서 내용

2 정수와 유리수

한반도와 그 해역에서

가장 높은 곳과 가장 깊은 곳

백두대간은 백두산에서 시작하여 동쪽 해안을 따라 남쪽으로 뻗어 지리산까지 이어지는 한반도의 뼈대를 이루는 산줄기이다.

백두대간을 중심으로 하여 여러 갈래로 뻗어나간 산줄기는 삼국 시대에는 국경을 구분 짓는 경계로, 조선 시대에서는 행정 구역의 경계로 쓰였으며 그로 인해 각 지방의 언어와 풍습을 구분 짓는 경계가 되기도 하였다.

또 백두대간의 각 산줄기는 강의 발원지로서 이곳에서부터 시작한 강은 동해, 남해, 황해로 이어지고 있다. 따라서 백두대간은 한반도의 자연 지리적 상징인 동시에 한민족의 문화적 기반이 되는 산줄기라고 할 수 있다.

다음은 백두대간에 있는 주요 산의 높이와 한반도 해역의 최대 수심이다.

산	높이 (m)	바다	최대 수심 (m)
백두산	2744	동해	4049
설악산	1708	황해	103
지리산	1915	남해	210

생각해 봅시다

❶

❷

① 정수와 유리수의 개념을 이해한다.

◦ 자연수를 확장하여 정수의 개념을 이해하게 한다.

음수의 필요성을 인식하여 자연수를 정수로 확장하게 한다. 양의 부호(+)와 음의 부호(−)를 이용하여 양의 정수와 음의 정수를 나타내고, 정수가 양의 정수(자연수), 0, 음의 정수로 구분됨을 이해하게 한다. 양의 부호 +는 생략하여 나타낼 수 있음을 알게 한다.

다음 그림은 3월 어느 날 세계 10개 도시의 최저 기온과 최고 기온을 나타낸 것이다.

탐구 1 서울의 최저 기온은 몇 도(℃)인가?

탐구 2 런던의 최저 기온은 몇 도(℃)인가?

$+3$과 같이 자연수에 $+$부호를 붙인 수를 **양의 정수**라 하고, -2와 같이 자연수에 $-$부호를 붙인 수를 **음의 정수**라고 한다. 그리고 양의 정수, 0, 음의 정수를 통틀어 **정수**라고 한다.

◦ 유리수의 개념을 이해하게 한다.

유리수의 뜻을 알게 한다. 유리수를 정수인 것과 정수가 아닌 것으로 분류하여 초등학교부터 지금까지 학습한 수가 유리수의 범위에 들어감을 알고 수가 확장되는 과정을 이해하게 한다.

$+\frac{2}{3}$, $+\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{4}$ 등과 같이 분자, 분모가 자연수인 분수에 양의 부호($+$)를 붙인 수와 음의 부호($-$)를 붙인 수, 그리고 0을 통틀어 **유리수**라고 한다. 특히, 양의 부호($+$)가 붙은 수를 **양의 유리수** 또는 **양수**, 음의 부호($-$)가 붙은 수를 **음의 유리수** 또는 **음수**라고 한다.

② 정수와 유리수의 대소 관계를 이해한다.

◦ 정수의 절댓값을 이해하게 한다.

수직선 위에서 어떤 수를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 그 수의 절댓값이라 하고, 기호 | |를 써서 나타냄을 알게 한다.

다음 수에 대응하는 점을 수직선 위에 나타내었을 때, 물음에 답하여라.

탐구1 원점에서 가장 멀리 떨어져 있는 점은 어느 것인가?

탐구2 원점에서 같은 거리에 있는 점은 어느 것인가?

◦ 수직선을 이용하여 정수와 유리수의 대소 관계를 알게 하고, 정수의 대소 관계와 절댓값 사이의 관계를 이해하게 한다.

정수와 유리수를 수직선에 나타내었을 때, 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 큰 수라는 점을 이용하여 정수와 유리수의 대소 관계를 이해하고, 두 수의 크기를 비교하게 한다. 또, 정수와 유리수의 부호와 절댓값의 크기에 따라 대소 관계를 판정할 수 있음을 알게 한다. '크거나 같다'와 '작거나 같다'는 기호 $\leq$와 $\geq$로 나타내게 한다.

정수의 대소 관계	❶ 양의 정수는 0보다 크고, 음의 정수는 0보다 작다. 즉, 양의 정수는 음의 정수보다 크다. ❷ 두 양의 정수에서는 절댓값이 큰 수가 크다. ❸ 두 음의 정수에서는 절댓값이 큰 수가 작다.

③ 정수와 유리수의 사칙계산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

◦ 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈 방법을 이해하고 그 계산을 능숙하게 한다.

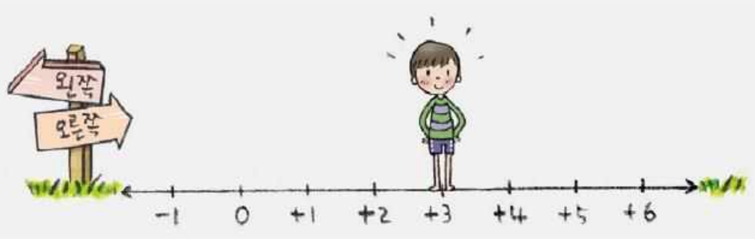
정수와 유리수의 덧셈의 원리를 이해하고, 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계를 활용하여 뺄셈의 원리를 이해하게 한다. 이 때, 수직선 모델, 셈돌 모델, 우체부 모델, 귀납적 외삽법 등을 활용할 수 있다. 하지만 어느 모델도

한계가 있음을 유의하며, 모델로부터 수학적으로 형식화된 의미를 이해하여야 한다. 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈의 원리에 대한 이해를 바탕으로, 정수와 유리수의 덧셈과 뺄셈을 능숙하게 할 수 있게 한다.

$+3$에 대응하는 점에 서 있는 사람이 다음과 같이 이동하였을 때, 이동한 후의 점에 대응하는 수를 말하여라.

(1) 오른쪽으로 2만큼 이동한다.

(2) 왼쪽으로 1만큼 이동한다.



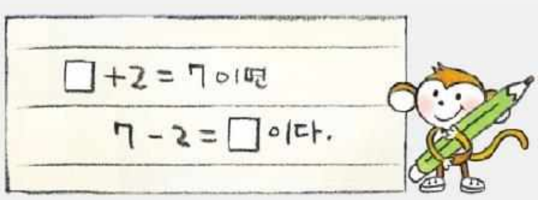
정수의 덧셈

❶ 부호가 같은 두 정수의 합은 두 수의 절댓값의 합에 공통인 부 호를 붙인 것과 같다.

❷ 부호가 다른 두 정수의 합은 두 수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙인 것과 같다.

특히 절댓값이 같고 부호가 다른 두 정수의 합은 0이다.

다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.



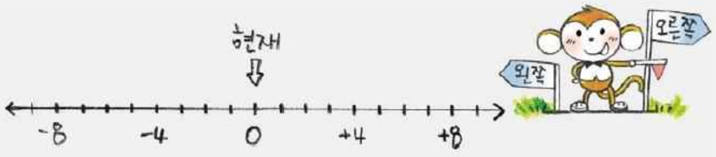
정수의 뺄셈

정수의 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 덧셈으로 고쳐서 계산한다.

◦ 정수와 유리수의 곱셈과 나눗셈 방법을 이해하고 그 계산을 능숙하게 한다.

정수와 유리수의 곱셈에서 곱의 부호가 어떻게 결정되는지를 알고, 정수와 유리수의 곱셈을 능숙하게 할 수 있게 한다. 곱셈과 나눗셈이 역연산 관계에 있음을 활용하여 정수와 유리수의 나눗셈에서 계산결과의 부호가 결정되는 원리를 이해하게 한다. 예를 들어, $(-2)\times(+2)=(-4)$의 역연산으로 $(-4)\div(+2)=(-2)$임을 알게 한다. 또한, 정수와 유리수의 나눗셈은 나누어지는 수에 나누는 수의 역수를 곱하는 것과 같은 것임을 이해하고, 계산 방법을 형식화하여 나눗셈을 능숙하게 할 수 있게 한다.

좌우로 길게 뻗은 직선 철로 위를 분속 4 km로 달리는 고속 열차가 있다.



탐구 1 현재 시각을 기준으로 2분 후 +2로 나타내면 2분 전은 어떻게 나타낼 수 있는가?

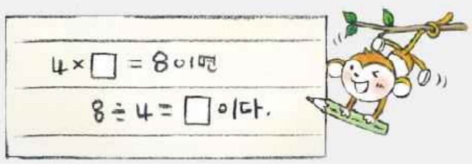
탐구 2 왼쪽에서 오른쪽으로 달리는 고속 열차의 현재의 위치가 0일 때, 2분 후의 위치에 대응하는 수를 말하여라.

탐구 3 오른쪽에서 왼쪽으로 달리는 고속 열차의 현재의 위치가 0일 때, 2분 후의 위치에 대응하는 수를 말하여라.

정수의 곱셈

① 부호가 같은 두 정수의 곱은 두 수의 절댓값의 곱에 양의 부호＋를 붙인 것과 같다.
② 부호가 다른 두 정수의 곱은 두 수의 절댓값의 곱에 음의 부호 －를 붙인 것과 같다.
③ 어떤 정수와 0과의 곱은 항상 0이다.

다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.



정수의 나눗셈

① 부호가 같은 두 정수의 나눗셈의 몫은 두 수의 절댓값의 나눗 셈의 몫에 양의 부호 ＋를 붙인 것과 같다.
② 부호가 다른 두 정수의 나눗셈의 몫은 두 수의 절댓값의 나눗 셈의 몫에 음의 부호 －를 붙인 것과 같다.
③ 0을 0이 아닌 정수로 나누면 그 몫은 항상 0이다.

유리수의 나눗셈은 어떻게 할까?

두 수 2와 4에 대하여

$$2 \div 4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

이므로 2를 4로 나누는 것은 2에 4의 역수를 곱하는 것과 같다.

일반적으로 유리수의 나눗셈은 나누는 수의 역수를 곱하여 계산한다.

◦ 정수와 유리수에 대하여 덧셈 및 곱셈의 교환법칙, 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙이 성립함을 이해하게 한다.

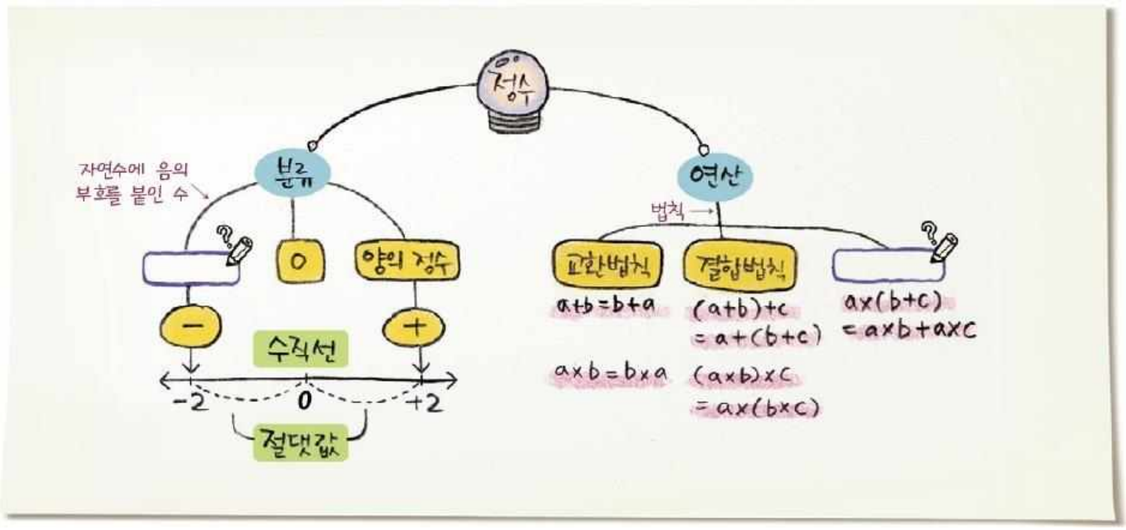
정수 a,b,c에 대하여 다음의 여러 법칙이 성립함을 이해하게 한다.

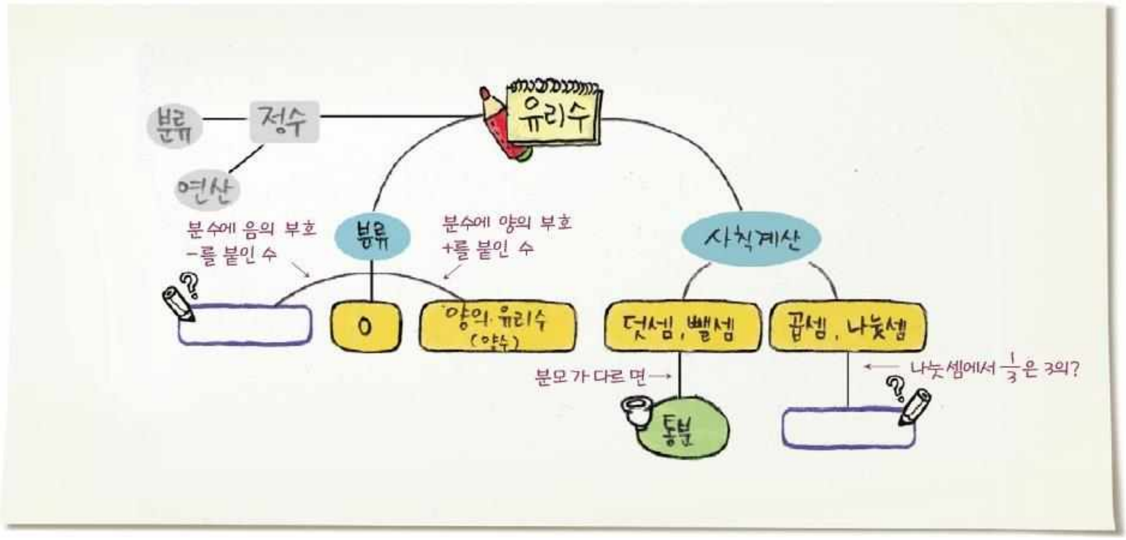
- $a+b=b+a$ (덧셈의 교환법칙)
- $(a+b)+c=a+(b+c)$ (덧셈의 결합법칙)
- $a\times b=b\times a$ (곱셈의 교환법칙)
- $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ (곱셈의 결합법칙)
- $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ (덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙)

여러 가지 계산 법칙의 지도는 수 계산에 도움이 되는 정도로만 간단히 다룬다.

◦ 셋 이상의 수의 사칙계산을 능숙하게 한다.

여러 개의 수를 곱하는 곱셈에서는 음수의 개수가 짝수 개이면 곱은 양수, 음수의 개수가 홀수 개이면 곱은 음수임을 알고, 나눗셈에도 이를 활용한다. 혼합계산에서는 괄호 안에 있는 계산을 먼저 하고, 곱셈과 나눗셈을 순서대로 한 후 덧셈과 뺄셈을 순서대로 하게 하여 계산의 순서도 익히게 한다.

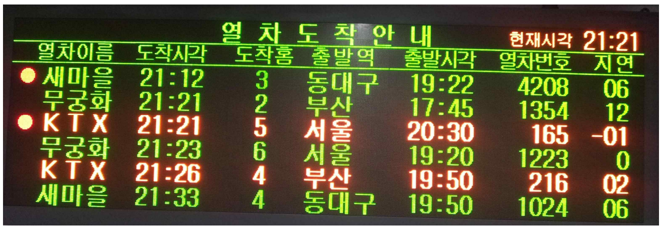




2.3. 교수학습 참고자료

생활 속의 음의 부호 – 열차 도착 예정 시각

열차 도착 안내 전광판의 맨 오른쪽에는 열차가 정시에 도착하지 못하고 지연되는 시간이 표시되어 있다.



탐구 ❶ 위 전광판의 맨 오른쪽에 있는 숫자 0이 무엇을 의미하는지 말해보자.

탐구 ❷ 위 전광판의 맨 오른쪽에 있는 숫자 -01과 02는 각각 무엇을 의미하는지 말해보자.

탐구 ❷ 위의 탐구 ❶ 과 탐구 ❷에서 살펴본 세 열차의 도착 예정 시각을 각각 말해보자.

유럽의 로비층은 1층이 아닌 0층

유럽에서 엘리베이터를 타면 건물의 층 수 때문에 혼란을 일으킬 때가 있다. 건물 로비에서 엘리베이터를 타고 한 층을 올라갔는데도 내려 보면 다시 1층이어서 어리둥절하게 된다. 우리나라에서는 건물 로비가 있는 층이 1층인데, 유럽에서는 0층이기 때문이다.

건물의 층수 표기는 크게 유럽식과 미국식으로 나눌 수 있는데, 유럽식은 지상층(Ground Floor)의 시작을 숫자 0으로 표시하는 반면, 미국식은 지상층(Ground Floor)을 숫자 1로 표시한다. 따라서 유럽에서는 지면에서 바로 정문을 통과하면 그 층이 0층이고 한층 위가 1층이 된다. 반대로 지하로 내려갈 경우 음수로 표시하므로 …, -2층, -1층, 0층, 1층, 2층, … 등과 같은 방식으로 표현된다. 반면 미국식은 0을 뺀 1층이 바로 ‘Ground Floor’를 의미한다. 즉, …, -2층, -1층, 1층, 2층, …과 같은 순서이다.

수학적으로는 유럽식이 더 합리적일 수 있다. 우리나라에서는 지하 3층에서 네 층을 올라가면 지상 2층이 되지만, 유럽에서는 지상 1층이 된다. 지하층을 -(마이너스)로, 지상층을 +(플러스)로 나타낼 때, 유럽의 방식이 수의 계산과 일치한다.

방정식을 이용한 음의 정수 도입

서로 반대되는 양을 나타내기 위해 음의 부호를 도입하고, 이를 통해 음의 정수를 도입하는 방법 이외에 방정식 풀이를 위해 음의 정수를 도입할 수도 있다.

이를 위해 학생들에게 다음과 같은 방정식을 제시하고, 해를 찾아보게 한다.

$$x+1=0 \qquad x+2=0 \qquad x+3=0$$

그러나 학생들이 초등학교에서 배운 자연수, 분수, 0 중에는 위의 방정식을 만족시키는 x의 값을 찾을 수 없다. 이로부터 위의 방정식을 만족시키는 x의 값 즉, 1과 더해서 0이 되는 수는 -1, 2와 더해서 0이 되는 수는 -2, 3과 더해서 0이 되는 수는 -3, $\cdots$, 임의의 자연수 n에 대하여 $n+x=0$이 되는 수 즉, n과 더해서 0이 되는 수는 $-n$으로 나타내기로 하고, 이렇게 정의한 수와 자연수, 그리고 0을 통틀어 정수라고 정의한다. 이때 새롭게 정의한 수를 음의 정수라 부르기로 하고, 기존의 자연수는 음의 정수와 구분하여 양의 부호를 붙여 나타내고 양의 정수라 부르기로 한다.

방정식을 이용한 음의 유리수 도입

음의 유리수도 음의 정수와 마찬가지로 방정식을 이용하여 도입할 수 있다. 이를 위해 학생들에게 다음과 같은 방정식을 제시하고, 해를 찾아보게 한다.

$$x+\frac{1}{2}=0 \qquad x+\frac{1}{3}=0$$

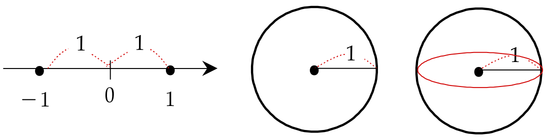
그러나 학생들이 초등학교를 포함하여 이전 시간까지 배운 정수와 분수 중에는 위의 방정식을 만족시키는 x의 값을 찾을 수 없다. 이로부터 위의 방정식을 만족시키는 x의 값 즉, $\frac{1}{2}$과 더해서 0이 되는 수는 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$과 더해서 0이 되는 수는 $-\frac{1}{3}$, $\cdots$, $x+\frac{b}{a}=0$을 만족시키는 수 즉, 분모와 분자가 모두 자연수인 임의의 분수 $\frac{b}{a}$와 더해서 0이 되는 수는 $-\frac{b}{a}$로 나타내기로 하고, 이렇게 정의한 수와 초등학교에서 배운 분모와 분자가 모두 자연수인 분수, 그리고 정수를 통틀어 유리수라고 정의한다. 이때 새롭게 정의한 수를 음의 유리수라 부르기로 하고, 기존의 분수는 음의 유리수와 구분하여 양의 부호를 붙여 나타내고 양의 유리수라 부르기로 한다.

유리수(有理數)와 유비수(有比數)

유리수(有理數)는 영어 rational number를 번역한 것으로 '비(比로) 나타낼 수 있는 수'라는 의미가 있다. 이런 점에서 유리수를 유비수(有比數)라 번역하기도 한다. 실제로 유리수는 통상적으로 분모와 분자가 모두 정수인 분수 즉, 두 정수 a와 b의 비 $\frac{a}{b}(b \neq 0)$로 나타낼 수 있는 수로 정의한다. 이에 따르면 $\frac{+1}{+2}, \frac{-1}{-2}$은 양의 유리수 $+\frac{1}{2}$과 같고, $\frac{-1}{+2}, \frac{+1}{-2}$은 음의 유리수 $-\frac{1}{2}$과 같다. 그러나 초등학교에서부터 분수 $\frac{a}{b}$는 분자 a를 분모 b로 나눈 몫과 같은 것으로 지도해 왔으므로, 이런 맥락에서 분수 $\frac{+1}{+2}, \frac{-1}{-2}, \frac{-1}{+2}, \frac{+1}{-2}$의 개념을 지도하려면 음수를 포함한 두 수의 나눗셈을 먼저 지도하여야 한다. 따라서 분모와 분자가 모두 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수로서의 유리수 개념 정의는 두 수의 나눗셈을 지도한 후에 다룬다.

한 점으로부터의 거리가 일정한 점들의 모임과 절댓값

수직선에서 원점으로부터의 거리가 1인 점은 +1과 -1에 대응하는 두 점이고, 이 점들은 절댓값이 1인 수를 나타낸다. 이와 같이 직선의 한 점으로부터 같은 거리에 있는 그 직선의 점은 2개뿐이다. 그러나 평면의 한 점에서 같은 거리에 있는 그 평면의 점은 무수히 많고, 이 점들을 모두 모으면 원이 된다. 그리고 공간의 한 점에서 같은 거리에 있는 그 공간의 점을 모두 모으면 공 모양의 도형인 구가 된다.



결국 수직선에서 절댓값이 같은 두 점은 평면에서의 원과 공간에서의 구에 해당하는 도형이다. 실제로 구를 그 중심을 지나는 평면으로 자르면 그 단면은 원이고, 이 원을 다시 중심을 지나는 직선으로 자르면 그 단면은 중심으로부터 거리가 같은 두 점이다. 이때 중심을 수직선의 원점이라 하면 주어진 구와 원의 반지름의 길이는 이들 두 점의 절댓값이다.

=와 <의 차이점

두 수의 크기를 비교할 때 등호인 =는 두 수가 같음을 나타내고, 부등호인 <는 왼쪽의 수가 오른쪽의 수보다 작음을 나타낸다. 일반적으로 집합 위의 어떤 관계 ~ 가 다음 세 조건을 만족할 때, 이 관계 ~ 를 동치 관계(equivalence relation)라 한다.

(1) 임의의 원소 a에 대하여 a ~ a 이다. (반사적, reflexive)

(2) a ~ b 이면 b ~ a 이다. (대칭적, symmetric)

(3) a ~ b 이고 b ~ c이면 a ~ c 이다. (추이적, transitive)

두 수의 같음을 나타내는 = 는 위의 세 조건을 모두 만족하므로 일종의 동치 관계이다. 그 밖에 집합의 상등(=), 도형의 합동(≡), 닮음(∽) 등도 모두 동치 관계이다.

그러나 왼쪽의 수가 오른쪽의 수보다 작음을 나타내는 관계 <는 추이적이지만, 반사적이지도 대칭적이지도 않으므로 동치 관계가 아니다. 집합에서 왼쪽의 집합이 오른쪽 집합의 진부분집합임을 나타내는 관계 $\subsetneq$ 도 <와 같은 이유로 동치 관계가 아니다.

부분 순서와 대소 관계

유리수 전체의 집합에서 대소 관계 $\leq$ 는 다음을 만족한다.

(1) 임의의 유리수 a에 대하여 $a \leq a$이다. (반사적, reflexive)

(2) $a \leq b$이고 $b \leq c$이면 $a \leq c$이다. (추이적, transitive)

(3) $a \leq b$이고 $b \leq a$이면 $a = b$이다.(반대칭적, antisymmetric)

집합 A위의 관계 $\leq$가 반사적, 추이적, 반대칭적일 때, 이 관계 $\leq$를 부분 순서(반순서, partial order)라 하고, 부분 순서 $\leq$가 정의된 집합 (A, $\leq$)를 부분 순서 집합이라 한다. 그러므로 유리수 전체의 집합 Q에서 대소 관계 $\leq$는 부분 순서이고, 대소 관계가 정의된 유리수 전체의 집합 (Q, $\leq$)는 부분 순서 집합이다.

한편, 부분 분서 집합 (A, $\leq$)의 임의의 원소 a, b에 대하여 $a \leq b$ 또는 $b \leq a$일 때 $\leq$를 완전 순서(total order)라 하고, 순서쌍 (A, $\leq$)를 완전 순서 집합이라 한다. 유리수 전체의 집합 (Q, $\leq$)는 완전 순서 집합이다. 즉, 모든 유리수는 대소 관계 $\leq$에 따라 한 줄로 세울 수 있다.

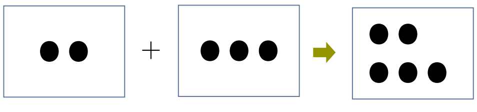
바둑돌을 이용한 두 정수의 덧셈

수직선을 이용한 방법 이외에 바둑돌을 이용하여 두 정수의 덧셈의 원리를 직관적으로 지도할 수 있다.

먼저 검은 돌 ●은 양의 정수를 나타내고, 흰 돌 ○은 음의 정수를 나타내기로 하자. 그리고 검은 돌 한 개와 흰 돌 한 개는 같이 없앨 수 있다고 하자. 이를 이용하여 두 정수의 덧셈을 다음과 같이 바둑돌을 이용하여 나타낼 수 있다.

(1) $(+2)+(+3)$

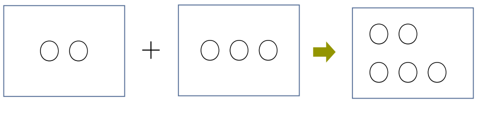
검은 돌 2개에 검은 돌 2개를 더하면 검은 돌 5개가 된다.



즉, $(+2)+(+3)=+5$이다.

(2) $(-2)+(-3)$

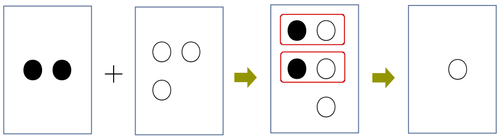
흰 돌 2개에 흰 돌 3개를 더하면 흰 돌 5개가 된다.



즉, $(-2)+(-3)=-5$이다.

(3) $(+2)+(-3)$

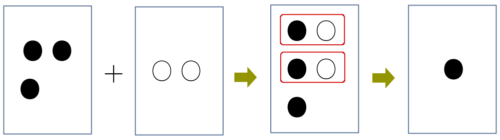
검은 돌 2개에 흰 돌 3개를 더하면 흰 돌 1개가 된다.



즉, $(+2)+(-3)=-1$이다.

(4) $(+3)+(-2)$

흰 돌 2개에 흰 돌 3개를 더하면 흰 돌 5개가 된다.



즉, $(+3)+(-2)=+1$이다.

귀납적인 방법에 의한 두 정수의 덧셈

수직선이나 바둑돌 이외에 다음과 같이 귀납적인 방법으로 두 정수의 덧셈의 원리를 직관적으로 지도할 수 있다.

먼저 (양의 정수)와 (정수)의 덧셈의 원리를 다음과 같이 귀납적으로 이해시킬 수 있다.

3+2 = 5	2+3 = 5
3+1 = 4	1+3 = 4
3+0 = 3	0+3 = 3
3+(-1)= □	(-1)+3= □
3+(-2)= □	(-2)+3= □

그러고 나서 (음의 정수)와 정수의 덧셈의 원리를 다음과 같이 귀납적으로 이해시킬 수 있다.

(-1)+2 = 1	2+(-1) = 1
(-1)+1 = 0	1+(-1) = 0
(-1)+0 = □	0+(-1) = □
(-1)+(-1)= □	(-1)+(-1)= □
(-1)+(-2)= □	(-2)+(-1)= □

덧셈의 교환법칙과 결합법칙

덧셈이 정의된 정수 전체의 집합과 유리수 전체의 집합은 가환군이다. 덧셈의 결합법칙과 교환법칙은 가환군의 공리 중 하나이다. 학생들에게는 구체적인 예를 통해 두 수의 덧셈에서 두 수의 순서를 바꾸어 더해도 그 결과가 같고, 세 수의 덧셈에서 더하는 순서를 바꾸어도 그 결과가 같음을 확인하게 한 뒤, 이를 각각 덧셈의 교환법칙과 결합법칙이라 함을 알게 한다.

이때 교환법칙과 결합법칙을 혼동하지 않도록 유의한다. 즉, 교환법칙은 두 수의 순서를 바꾸는 것이지 세 수의 덧셈에서 더하는 순서를 바꾸는 것이 아님을 알게 한다. 그러나 이들 법칙 자체를 지나치게 강조하지는 않는다.

한편, 덧셈은 이항 연산이므로 세 수 이상의 덧셈은 두 수의 덧셈을 여러 번 반복하는 것이고, 이때 괄호는 먼저 할 덧셈을 나타내기 위한 것이다. 그러나 덧셈의 결합법칙에 의해 어느 두 수의 덧셈을 먼저 해도 그 결과는 같으므로 세 수 이상의 덧셈을 괄호를 사용하지 않고 나타내기도 한다.

군(Group)과 가환군(Commutative Group)

연산 $*$이 정의된 집합 $G(\neq\varnothing)$에 대하여 다음의 (1)이 성립할 때 $(G, *)$를 반군(semi group)이라 하고, (1)과 (2)가 성립할 때 모노이드(monoid)라고 하며, (1)~(3)이 모두 성립할 때 군(group)이라고 한다.

> (1) G의 임의의 원소 a, b, c에 대하여 $(a*b)*c=a*(b*c)$이다.
> (2) G의 임의의 원소 a에 대하여 $a*e=e*a=a$인 G의 원소 e가 존재한다.
> (3) G의 각 원소 a에 대하여 $a*x=x*a=e$인 G의 원소 x가 존재한다.

특히 군 $(G, *)$에 대하여 다음의 (4)가 성립할 때, $(G, *)$를 가환군(commutative group)이라고 한다.

> (4) G의 임의의 원소 a와 b에 대하여 $a*b=b*a$이다.

자연수 전체의 집합, 정수 전체의 집합, 유리수 전체의 집합을 각각 N, Z, Q라고 할 때, $(Z, +)$와 $(Q, +)$는 모두 가환군이지만, $(N, +)$는 반군이다. 한편 $(N\cup 0, +)$는 모노이드이다.

귀납적인 방법으로 두 수의 뺄셈의 원리 추측하기

덧셈과 뺄셈의 역연산 관계를 이용하지 않고, 초등학교에서 배운 자연수의 뺄셈과 이전 시간에 배운 음수를 포함한 두 수의 덧셈을 이용하여 두 수의 뺄셈의 원리 학습을 위한 탐구활동을 다음과 같이 제시할 수도 있다.

두 수의 뺄셈에 대한 다음 물음에 답해보자.

탐구 ❶ 다음 □ 안에 알맞은 수를 써보자.

(+3) - (+1) = +2 = (+3) + (-1)
(+3) - (+2) = □ = (+3) + (□)
(+3) - (+3) = □ = (+3) + (□)

탐구 ❷ 위의 **탐구 ❶**의 결과를 참고하여 두 수의 뺄셈 (+3) - (+4)와 (+3) - (+5)를 어떻게 하면 될지 생각해보자.

바둑돌을 이용한 두 정수의 뺄셈

바둑돌을 이용하여 두 정수의 뺄셈의 원리를 직관적으로 지도할 수 있다.
앞에서와 같이 검은 돌은 양의 정수를 나타내고, 흰 돌은 음의 정수를 나타내기로 하자. 그리고 검은 돌 한 개와 흰 돌 한 개는 같이 없앨 수 있다고 하자. 이를 이용하여 두 정수의 뺄셈을 다음과 같이 바둑돌을 이용하여 나타낼 수 있다.

$3-2=1$	●●● - ●●	→	●
$2-3=-1$	●● - ●●●	→	?
$3-(-2)=5$	●●● - ○○	→	?
$(-2)-3=-5$	○○ - ●●●	→	?
$(-3)-(-2)=-1$	○○○ - ○○	→	○
$(-2)-(-3)=1$	○○ - ○○○	→	?

귀납적인 방법에 의한 부호가 다른 두 정수의 곱셈

양의 정수는 자연수와 같으므로 (양의 정수)×(양의 정수)의 계산은 초등학교에서 배운 (자연수)×(자연수)의 계산과 같다. 이를 이용하여 (양의 정수)×(음의 정수)의 계산을 다음과 같이 귀납적으로 지도할 수 있다.

$(+3)\times(+2) = +6 = +(3\times2)$

$(+3)\times(+1) = +3 = +(3\times1)$

$(+3)\times 0 \quad = 0$

$(+3)\times(-1) = \square = \square(3\times1)$

$(+3)\times(-2) = \square = \square(3\times2)$

마찬가지 방법으로 (음의 정수)×(양의 정수)의 계산도 다음과 같이 귀납적으로 지도할 수 있다.

$(+2)\times(+3) = +6 = +(2\times3)$

$(+1)\times(+3) = +3 = +(1\times3)$

$0 \times(+3) = 0$

$(-1)\times(+3) = \square = \square(1\times3)$

$(-2)\times(+3) = \square = \square(2\times3)$

귀납적인 방법에 의한 두 음의 정수의 곱셈

부호가 다른 두 정수의 곱셈 즉, (양의 정수)×(음의 정수)와 (음의 정수)×(양의 정수)의 계산을 지도한 뒤, 부호가 같은 두 정수의 곱셈 즉, (음의 정수)×(음의 정수)의 계산을 다음과 같이 귀납적으로 지도할 수 있다.

$(-3)\times(+2) = -6 = -(3\times2)$

$(-3)\times(+1) = -3 = -(3\times1)$

$(-3)\times 0 \quad = \square$

$(-3)\times(-1) = \square = \square(3\times1)$

$(-3)\times(-2) = \square = \square(3\times2)$

혹은

$(+2)\times(-3) = -6 = -(2\times3)$

$(+1)\times(-3) = -3 = -(1\times3)$

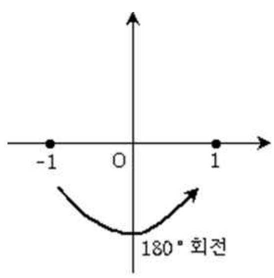
$0 \times(-3) = \square$

$(-1)\times(-3) = \square = \square(1\times3)$

$(-2)\times(-3) = \square = \square(2\times3)$

복소수의 곱셈을 이용한 (−1)×(−1)=1의 계산

−1은 정수이기도 하지만 복소수이기도 하다. 임의의 복소수 z에 대하여 $z\times(-1)$은 좌표평면에서 복소수 z에 대응하는 점을 원점을 중심으로 180° 회전시킨 점이 나타내는 복소수이다. 그러므로 $(-1)\times(-1)$은 복소수 -1에 대응하는 좌표평면의 점을 원점을 중심으로 180° 회전시킨 점이 나타내는 복소수이다. 복소수 -1에 대응하는 좌표평면의 점은 (−1, 0)이고 이 점을 원점을 중심으로 180° 회전시키면 (1,0)이 된다. 점 (1,0)이 나타내는 복소수는 1이다. 따라서 $(-1)\times(-1)=1$이다.



언어 속의 분배법칙

임직원 = 임원+직원

교직원 = 교원+직원

장차관 = 장관+차관

남북한 = 남한+북한

등하교 = 등교+하교

상하행 = 상행+하행

좌우측 = 좌측+우측

나눗셈에서 0으로 나누지 않는 이유

나눗셈에서 나누는 수는 0이 아닌 수에 한정한다. 그 이유를 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 이용하여 살펴보면 다음과 같다.

(1) 0이 아닌 수를 0으로 나누는 경우

예를 들어, 1÷0=□라 하고, 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 적용하면 □는 식 □×0=1을 만족시키는 수이다. 그러나 이 식을 만족시키는 □의 값은 존재하지 않는다.

(2) 0을 0으로 나누는 경우

0÷0=□라 하고, 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 적용하면 □는 식 □×0=0을 만족시키는 수이다. 그러나 이 식은 모든 수에 대하여 항상 성립한다. 즉, □의 값이 하나로 정해지지 않고 무수히 많다.

역수 개념 및 역수를 이용한 두 수의 나눗셈 지도를 위한 탐구 활동

곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 이용하지 않고, 초등학교에서 배운 분수의 나눗셈과 이전 시간에 배운 음수를 포함한 두 수의 곱셈을 이용하여 역수의 개념 및 역수를 이용한 두 수의 나눗셈 지도를 위한 탐구활동을 다음과 같이 제시할 수도 있다.

수의 곱셈과 나눗셈에 대한 다음 물음에 답해보자.

탐구 ❶ 다음 □ 안에 알맞은 수를 써보자.

$$(-3)\times\square=1=\square\times\left(-\frac{1}{3}\right), \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)\times\square=1=\square\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

탐구 ❷ 다음 □ 안에 알맞은 수를 써보자.

$$3\div2=3\times\square=\frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{3}\div\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\times\square=\frac{1}{2}$$

탐구 ③ 위의 **탐구 ❷**의 결과를 참고하여 두 수의 나눗셈 $(+3)\div(-2)$와 $\left(-\frac{2}{3}\right)\div\left(-\frac{4}{3}\right)$을 어떻게 하면 될지 생각해보자.