

7. 피타고라스 정리

7.1. 이론적 배경

(1) 피타고라스와 그 학파

피타고라스는 에게 해 제도의 한 섬 사모스에서 기원전 572년경에 태어났다. 사모스는 탈레스의 고향인 밀레투스에서 그리 멀지 않다. 피타고라스는 탈레스보다 50세 어리고 그와 매우 가까이 살았기 때문에 그 밑에서 배웠을 가능성이 있다.

피타고라스는 탈레스처럼 이집트를 한 번 방문하였으며, 그 다음에 좀 더 광범한 여행에 돌입하여 인도까지 여행했던 것으로 보인다.

2년 동안의 여행 뒤 고향으로 돌아왔을 때, 그는 사모스가 폴리크라테스(Polycrates)의 폭정에 있고 이오니아(Ionia)의 많은 지역은 페르시아의 통치하에 있음을 알게 되었다. 이에 그는 이탈리아 반도의 남부에 위치한 그리스의 항구 도시 크로토나(Crotona)로 이주했다. 그 곳에서 그는 피타고라스 학교를 설립하였다. 이 학교는 철학, 수학, 자연 과학 등의 연구를 위한 학원 뿐만 아니라, 비밀스럽고 신비적인 의식과 계율로 엄격하게 결합된 결사로 발전하였다.

시간이 지남에 따라 이 결사의 정치적인 힘과 귀족적인 경향이 매우 커졌기 때문에 남부 이칼리아의 민주적인 세력과 그 학교 건물을 파괴해 버리고 그 학파를 해산시켰다.

일설에 따르면 피타고라스는 메타폰탐(Metapontum)으로 피신했으며, 그 곳에서 그는 75세에서 80세 사이에 죽었다고 한다.

피타고라스 학파의 철학은 인도의 맛을 풍기는데, 자연수는 사람과 물질의 다양한 특성의 원인이라는 가정에 근거를 두고 있었다. 다시 말해 자연수는 양적으로 질적으로 만물을 지배한다는 것이다. 자연수에 대한 이와 같은 생각과 칭송은 그들의 심오한 연구를 낳게 했다.

왜냐하면 자연수의 복잡한 성질을 밝힘으로써 사람들은 어느 정도 자신의 운명을 관리하고 개선할 수 있을 것으로 믿었기 때문이다. 그래서 그들은 수를 열심히 연구했는데, 수는 기하학과 밀접한 관련을 맺고 있기 때문에 기하학을 열심히 연구했다.

피타고라스와 그의 학파가 연구한 내용 중 가장 유명한 것은 ‘피타고라스 정리’이다. 그 밖에 피타고라스 학파가 발견하였다고 전해지는 수와 기하학에 관련된 중요한 것들을 열거하면 다음과 같다.

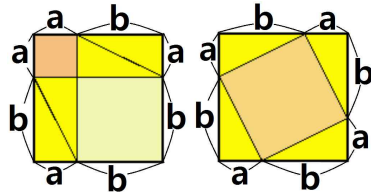
- (1) 자연수를 짝수와 홀수로 분리
- (2) 삼각수 1, 3, 6, 10, ... 과 사각수 1, 4, 9, 16, ... 의 발견
- (3) 무리수의 발견
- (4) 삼각형의 내각의 크기의 합은 $2\angle R$ 이다.
- (5) 황금비의 작도법
- (6) 정오각형의 작도법
- (7) 평면을 합동인 정다각형으로 덮는 문제
- (8) 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체뿐인 사실을 증명

(2) 피타고라스 정리의 증명

수학의 모든 분야를 통틀어 피타고라스 정리보다 더 다양하고 많은 증명이 발견된 정리는 없을 것이다.

다음은 피타고라스 정리의 몇 가지 증명이다.

① 정사각형의 분할에 의한 증명

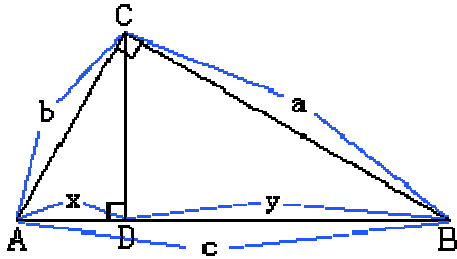


위의 그림은 한 변의 길이가 $a+b$ 인 두 개인 정사각형을 나타낸다.

첫째 정사각형은 여섯 개의 작은 도형(각 변에 대응하는 두 개의 정사각형과 주어진 직각삼각형과 합동인 네 개의 직각삼각형)으로 분할된다. 둘째 정사각형은 다섯 개의 작은 도형(빗변 c 에 대응하는 정사각형과 주어진 직각삼각형과 합동인 네 개의 직각삼각형)으로 분할한다. 같은 것에서 같은 것을 빼냄으로써, 빗변에 대응하는 정사각형은 두 변에 대응하는 정사각형의 합과 같게 된다.

② 바스카라에 의한 증명

바스카라는 빗변에 수선을 그려서 피타고라스 정리에 대한 둘째 증명을 했다. 이 증명은 17세기에 영국의 수학자 윌리스(John Wallis, 1616-1703)에 의해서 재발견되었다.

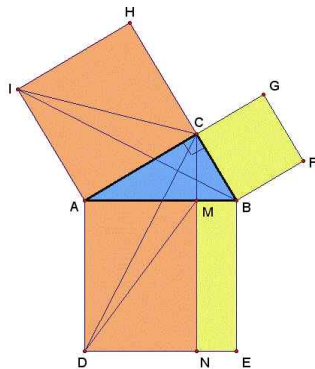


$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \text{ 이므로 } bx = cb \quad \therefore b^2 = cx$$

$$\text{마찬가지로 } \triangle CDB \sim \triangle ABC \text{ 이므로 } \therefore a^2 = cy$$

$$\therefore a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c^2$$

③ 유클리드 증명법



'유클리드 Euclid 원론'의 47번째 명제로 '목수의 정리'로 알려진 피타고라스 정리의 증명법이다.

옆의 그림과 같이 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 세 변의 길이를 각각 한 변의 길이로 하는 정사각

형 ADEB, ACHI, BFGC를 그린다. 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 M, 그 연장선과 변 BE와만나는 점을 N이라고 하자. 이 때

$$\square ACHI = 2 \triangle ACI \cdots \cdots (1)$$

또, 밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로,

$$\triangle ACI = \triangle ABI \cdots \cdots (2)$$

두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 각각 같으므로,

$$\triangle ABI \equiv \triangle ADC \cdots \cdots (3)$$

밑변의 길이와 높이가 각각 같으므로,

$$\triangle ADC = \triangle ADM \cdots \cdots (4)$$

또, $\square ADN = 2 \triangle ADM \cdots \cdots (5)$

(1), (2), (3), (4), (5)에서

$$\square ACHI = \square ADN \cdots \cdots (6)$$

같은 방법으로

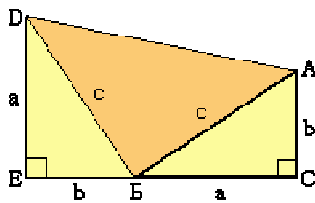
$$\square BFGC = \square MNEB \cdots \cdots (7)$$

(6), (7)에서

$$\square ADEB = \square ACHI + \square BFGC$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

④ 미국의 대통령, 가필드의 증명법



1876년 가필드가 발표한 증명법은 아래와 같다.

$$\square DECA = \triangle DEB + \triangle ABC + \triangle DBA$$

$$\frac{(a+b)}{2}(a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

(3) 피타고라스 정리의 다양한 활용

(가) 무리수의 발견

피타고라스 학파는 수직선 위에서 점 O로부터 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선만큼 떨어져 있는 점 P에 대응하는 유리수가 존재하지 않는다는 사실을 발견했다. 그 뒤, 수직선 위에서 어떠한 유리수와도 대응하지 않는 다른 점이 많이 발견되었다. 이런 점에 대응하는 새로운 수가 창조돼야만 했다. 그리고 그런 수

는 유리수(rational number), 즉 비율수(ratio number)가 될 수 없기 때문에 무리수(irrational number)로 불리게 되었다.

(나) 피타고라스의 세 수

등식 $a^2 + b^2 = c^2$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 를 피타고라스의 수라고 한다. 이 세 수 중 a, b 가 서로 소인 세 수 a, b, c 는 다음과 같이 주어진다.

$$a^2 = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

$$\text{또는 } a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

단, m, n 은 서로소이고 $m > n \geq 1$ 이며, m, n 중 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다. 이 사실은 유클리드의 원론 제10권에 나와 있다.

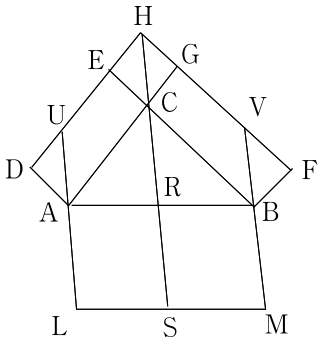
다음은 피타고라스의 세 수이다.

m	n	a	b	c
		$m^2 - n^2$	$2mn$	$m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61

(다) 직각이 아닌 삼각형에서의 피타고라스 정리의 성립

파푸스의 정리는 그의 저서 수학 집성(Mathematical collection) 제 IV권의 시작 부분에 제시하고 있는 정리로서 피타고라스의 정리에서 직각삼각형을 임의의 삼각형으로 직각삼각형의 변에 접한 정사각형들은 임의의 평행사변형으로 대체함으로써 일반화시켰다.

임의의 삼각형 $\triangle ABC$ 에 대해 $\square CADE$ 와 $\square CBF G$ 를 $\overline{CA}$ 와 $\overline{CB}$ 위에 외접하는 임의의 평행사변형이라고 하자. $\overline{DE}$ 와 $\overline{FG}$ 가 H 에서 만나고, 선분 $\overline{AL}$ 과 $\overline{BM}$ 은 $\overline{HC}$ 와 길이가 같고 평행하도록 그렸다고 하자. 그러면 평행사변형 $ABML$ 의 넓이는 평행사변형 $CADE$ 와 $CBFG$ 의 넓이의 합과 같다는 것을 다음을 통해 간단히 증명할 수 있다. $\square CADE = \square CAUH = \square SLAR$ 이며, 또한 $\square CBF G = \square CBVH = \square SMBR$ 이 성립하기 때문이다. 따라서 $\overline{CA}$ 와 $\overline{CB}$ 위에 외접하는 임의의 평행사변형의 넓이의 합이 $\overline{AB}$ 에 외접하는 평행사변형의 넓이와 같게 된다. 이것은 $\angle$



$C = 90^\circ$ 일 때, $\overline{HC}$ 의 길이가 $\overline{AB}$ 의 길이와 같게 되어 $\overline{CA}$ 와 $\overline{CB}$ 와 외접하는 정사각형의 넓이의 합이 $\overline{AB}$ 에 외접하는 정사각형의 넓이와 같게 된다. 여기서 피타고라스 정리가 두 가지 방향으로 일반화됐음을 알아야 한다. 즉, 피타고라스 정리에서 직각삼각형은 임의의 삼각형으로 대체되었고, 직각삼각형의 변에 접한 정사각형은 임의의 평행사변형으로 대체되었다.

7.2. 교육과정 및 교과서 내용

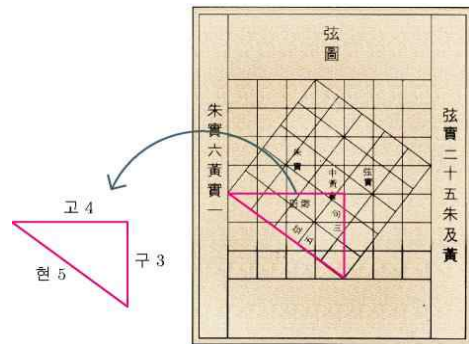
⑧ 피타고라스 정리

직각이 필요한 건축 공사

직각이 필요한 건축 공사 건물을 지을 때 기둥을 세우거나 다리를 놓는 토목 공사에서 수직을 만드는 일은 매우 중요하다.

고대 중국의 수학책 “주비산경(周髀算經)” 제1편에는 ‘구(句)를 3, 고(股)를 4라고 할 때, 현(弦)은 5가 된다’라는 ‘구고현의 정리’가 실려 있다. 직각삼각형에서 구와 고는 직각을 낀 두 변을, 현은 빗변을 뜻한다. 중국에서는 이를 이용하여 직각을 만들었다고 한다.

현대의 첨단 측량 기술도 이와 같은 원리를 바탕으로 하고 있다.



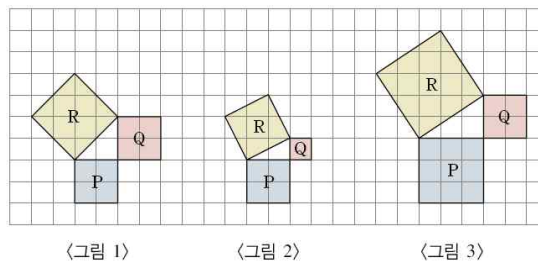
생각해 봅시다

- 1 위의 삼각형에서 구와 고의 합과 현은 어느 것이 클까?
- 2 위의 삼각형에서 구와 고 각각의 제곱의 합과 현의 제곱은 어느 것이 클까?

① 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.

직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 나타내는 피타고라스의 정리와 그 역을 이해하게 한다. 피타고라스의 정리는 가능한 간단한 방법으로 설명하고, 정리의 의미를 파악하고 이를 활용하는 데 중점을 둔다. 피타고라스의 정리의 역은 문제 상황을 통해 간단히 다루도록 한다.

다음 그림은 세 종류의 직각삼각형에 대하여 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 P, Q, R를 모은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 그린 것이다.

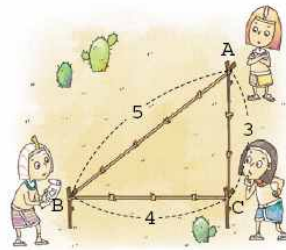


- 1 위의 <그림 1>, <그림 2>, <그림 3>에서 정사각형 P, Q, R의 넓이를 각각 구하여 다음 표를 완성해 보자.

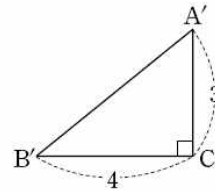
	그림 1	그림 2	그림 3
P			9
Q		1	
R	8		

- 2 위 ①의 결과를 이용하여 각 그림에서 두 정사각형 P와 Q의 넓이의 합과 정사각형 R의 넓이를 비교해 보자.

고대 이집트 사람들은 다음 <그림 1>과 같이 일정한 간격으로 매듭을 지은 밧줄을 이용하여 직각을 만들었다고 한다.



<그림 1>



<그림 2>

- ① 위 <그림 2>의 직각삼각형에서 변 $A'B'$ 의 길이를 구해 보자.
- ② 삼각형 ABC 와 삼각형 $A'B'C'$ 이 합동임을 설명하고 <그림 1>에서 $\angle C$ 가 직각임을 확인해 보자.

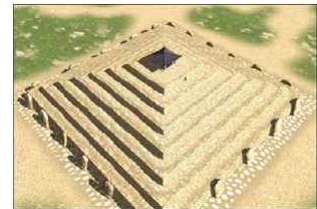
② 피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

피타고라스의 정리를 이용하여 평면도형에서의 변의 길이와 좌표평면 위에서의 두 점 사이의 거리, 입체도형에서의 선분의 길이 등을 구할 수 있게 한다.

7대 불가사의, 피라미드

피라미드는 일반적으로 정사각뿔 모양의 고대 유적을 가리킨다. 고대 중국, 이집트, 메소포타미아, 중앙아메리카 등 많은 지역에서 피라미드 형태의 유적을 볼 수 있다.

고구려의 태왕릉이나 장수왕릉도 피라미드의 일종이다.



↑ 고구려의 태왕릉 디지털 복원도

특히, 고대 이집트 쿠푸왕의 피라미드는 고대 7대 불가사의로 꼽히는 인류 최대 건축물 중의 하나이다. 쿠푸왕의 피라미드 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는 약 230m이고, 건축 당시의 높이는 약 146m였다고 한다.



- ① 쿠푸왕의 피라미드 옆면을 이루는 삼각형의 높이를 구할 수 있을까?
- ② 쿠푸왕의 피라미드 옆면의 한 모서리의 길이를 구할 수 있을까?

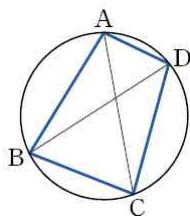
피타고라스의 정리를 확장한 프톨레마이오스

프톨레마이오스(Ptolemaios, C.:?~?)는 고대 그리스의 수학자이자 천문학자이다. 그의 삶에 대한 자세한 부분은 학문적인 업적에 비해 거의 알려져 있지 않지만 이집트의 알렉산드리아에서 활동한 것으로 알려져 있다. 또, 프톨레마이오스는 고대 이집트 왕조의 이름이지만 그가 이집트 프톨레마이오스 왕조와 인척이라는 기록은 전해져 오고 있지 않다.



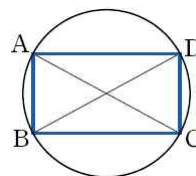
↑ 프톨레마이오스

프톨레마이오스는 기하학 분야에서 입체를 평면에 나타내는 방법 등에 대한 여러 권의 저서를 남겼다. 그는 또한 원에 내접하는 사각형의 성질을 연구하였는데, 원에 내접하는 사각형의 두 대각선의 길이의 곱과 대변의 길이의 곱의 합에 대한 ‘프톨레마이오스의 정리’는 피타고라스의 정리를 일반화한 정리의 하나로서 지금도 심오한 정리로 전해져 오고 있다.



$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

<프톨레마이오스의 정리>



$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

<피타고라스의 정리>

7.3. 교수 학습 참고자료

피타고라스 정리의 증명

피타고라스 정리의 증명법은 몇 개일까?

'직각삼각형의 빗변의 제곱은 다른 두 변의 제곱의 합과 같다'는 피타고라스 정리는 피타고라스 시대 이래로 수많은 증명이 나왔다. 루미스는 그의 책 '피타고라스 명제'에서 피타고라스 정리의 증명법을 367가지나 소개하였는데 그 중에는 레오나르도 다빈치의 증명법이나 미국의 가필드 대통령에 의한 증명법도 소개되어 있다. 또한 유클리드 증명법, 바스카라 증명법, 페리갈 증명법, 원을 이용한 증명법, 삼각형의 닮음을 이용한 증명법, 도형 분할을 이용한 증명법, 비례를 이용한 증명법 등이 실려 있다.

이처럼 사람들에게 친숙한 피타고라스 정리는 아래와 같이 다양한 우표로도 제작되었다.

우표1. 1955년 그리스에서 발행된 것으로 피타고라스가 새겨진 그리스 동전을 우표에 담았다.

우표2. 1983년 시에라리온에서 발행된 것으로 가운데에 서 있는 피타고라스가 아테네의 학당에서 제자들에게 강의하는 모습이다.

우표3. 1988년 마케도니아에서 발행된 것으로 우표의 왼쪽에 90도라고 쓰인 직각삼각형이 그려져 있고 피타고라스 정리가 쓰여 있다.

우표4. 1971년 니카라과에서 발행된 것으로 '가장 중요한 열 개의 수학 공식' 시리즈 중의 하나로 왼쪽 위에 피타고라스 정리가 쓰여 있다.



우표 1

우표 2

우표 3

우표 4

페르마의 정리

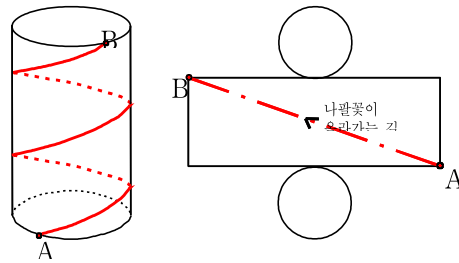
직각삼각형의 빗변의 길이가 c , 나머지 두 변의 길이가 각각 a , b 일 때, 피타고라스 정리에 의하여 $a^n + b^n = c^n$ 인 관계가 성립한다. 이러한 관계를 만족하는 세 자연수의 모듬 (a, b, c) 를 피타고라스 수라고 한다. 예를 들면, $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(6, 8, 10)$, $(7, 24, 25)$, $(8, 15, 17)$ 등은 모두 피타고라스 수이다.

여기서 ' $a^3 + b^3 = c^3$ 을 만족하는 세 자연수 a, b, c 가 존재하는가?'라는 의문이 생긴다. 이러한 의문에 대하여 프랑스 수학자 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665)는 『3 이상의 자연수 n 에 대하여, $x^n + y^n = z^n$ 를 만족하는 세 자연수 a, b, c 는 존재하지 않는다』고 그가 읽던 책의 여백에 써 놓고, 이어 '이 증명을 적기에는 책의 여백이 너무 좁다'라는 유명한 말을 남겨 놓았다.

페르마 자신이 이 정리를 증명하였는지 알 수 없으나, 그 뒤 많은 수학자들의 노력에도 불구하고 오랫동안 이 정리는 증명되지 못했다. 그러다 마침내 1995년 미국 프린스턴 대학 수학과 교수 앤드류 와일즈(Wiles, A.; 1953~)가 증명하였다.

나팔꽃의 줄기

나팔꽃의 줄기는 나무를 어떤 길로 타고 가야 가장 빨리 목표에 도달할 수 있을까에 대해 생각해 보자.



여름철이 되면 나무를 나선형으로 감고 올라가는 나팔꽃을 볼 수 있다. 나팔꽃은 되도록 빨리, 그리고 멀리, 그 가치를 힘껏 뽐어나가 예쁜 꽃을 피우려 한다. 나선형으로 감겨 있는 나무의 줄기를 펼쳐보면 직선이 된다는 것을 원기둥에 나선형의 선을 그린채로 감겨있는 아스테이지를 펼쳐 알아볼 수 있다. 나팔꽃의 줄기는 최단 거리로 나무를 감아 올라간 것이다. 나팔꽃은 수학적으로 가장 효율적인 방식을 택하고 있는 것이다.

피타고리안 기대승률 (Pythagorean Expectation)

빌 제임스가 득실점만으로 고안한 예상 승률을 말한다. 이 계산법에서 피타고라스라는 이름이 붙은 것은 피타고라스와 직접적 연관이 있는 것은 아니고 피타고라스 공식과 비슷해 보인다고 해서 지어진 이름이다.

피타고리안 승률의 공식은 다음과 같다.

$$\text{피타고리안 기대승률} = \frac{RS^2}{RS^2 + RA^2}$$

- RS(Runs Scored): 팀의 총 득점
- RA(Runs Allowed): 팀의 총 실점

이 식은 득점의 제곱을 득점의 제곱과 실점의 제곱의 합으로 나눈 값으로, 실제로 많은 팀들이 기대승률과 비슷하게 나온다고 한다.

피타고라스와 음계

B.C. 580년 고대 그리스의 수학자 피타고라스는 음악, 특히 음계에 관심이 많았다고 한다. 그는 세상을 숫자로 이해했으며 음악 음계 역시 완벽한 숫자의 체계로 만들려고 했다. 그래서 조성 (tonality) 의 존재를 처음 알아낸 인물이라고도 한다.

어느날 피타고라스는 대장간에서 우연히 들린 망치 소리들의 어울림 때문인지 아니면 현의 진동 실험을 통해서인지는 모르겠지만 하여간 대단히 잘 어울리는 음정에 대한 대발견을 하게 된다. 가장 잘 어울리는 음정은 두 음의 진동수가 가장 간단한 정수배 비율일 때라는 것
즉 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3 이라는 것!!

즉, 재질과 장력이 같은 10cm 짜리 현(높은 도)과 20cm 짜리 현(낮은 도)을 동시에 올리면 세상에서 가장 잘 어울리는 음정이 되는 것이고, 20cm 짜리 현(솔)과 30cm 짜리 현(도)을 동시에 올리면 두번째로 가장 잘 어울리는 음정이 되는 것이며, 30cm 짜리 현(파)과 40cm 짜리 현(도)을 동시에 올리면 세번째로 가장 잘 어울리는 음정이 된다는 것을 발견하였다.



음료수 캔의 높이는?

음료수 가게에서 밑면의 지름이 6cm인 원기둥 모양의 음료수 캔 10개를 아래와 같이 진열장에 4단으로 쌓아 진열하려고 한다. 진열장의 높이는 최소 몇 cm로 만들어야 할까?



8. 삼각비

8.1. 이론적 배경

(1) 삼각법의 역사

삼각법(trigonometry)은 그리스어의 삼각형(trigon)과 측정(metria)의 합성어로서, 삼각형의 6요소(세 변의 길이, 세 각의 크기) 사이의 관계를 이용하여 여러 가지 도형을 연구하는 수학의 한 분야이다. 삼각법에는 평면 삼각법(plane trigonometry)과 구면 삼각법(spherical trigonometry)이 있다. 평면 삼각법이란 평면 위에서 삼각형의 변과 각 사이의 관계를 삼각함수를 써서 나타내는 방법이고, 구면 삼각법이란 세 개의 대원의 호로 둘러싸인 구면 위에서 도형의 변과 각 사이의 관계를 삼각함수를 써서 나타내는 방법이다.

삼각법은 측량과 항해, 천체 관측 등 실용적인 필요에 의해서 생겨났기 때문에 역사상 평면 삼각법보다 구면 삼각법이 먼저 나타났다. 삼각법에 대한 기록은 이미 기원전 1700년 경 고대 이집트의 아메스(Ahmes ; ?B.C. 1680 ~ ?B.C.1620)의 파피루스에서 찾아볼 수 있다. 기원전 160년경 구면삼각법의 창안자인 그리스의 천문학자 히파르코스(Hipparchos ; ? ~ ?B.C.125)는 원을 260° 로 분할하여 각에 대한 현의 길이를 계산한 현표(table of chord)를 최초로 만들었다. 그 후 그리스의 수학자 메넬라오스(Menelaos ; ? ~ ?)는 그의 저서 “구면학(Sphaerica)”에서 구의 대원에서의 호에 대한 정리를 평면에서 증명하여 평면 삼각법을 탄생시켰다.

2세기경 프톨레마이오스(Ptolemaios, C. ; ?~?)는 천문학의 지식을 모은 “알마게스트(Almagest)”를 저술하였는데 그는 이 책에서 히파르코스의 현표를 확장하여 더욱 상세한 현표를 만들고, 천동설에 의한 천체의 운동을 수학적으로 기술하였다. 이 표는 0.5° 부터 180° 까지 0.5° 간격으로 원의 중심각에 대한 현의 길이를 구한 것으로 오늘날의 사인표에 해당한다.

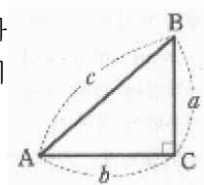
한편 고대 인도에서도 천문학 연구를 위하여 구면 삼각법이 발달되었는데 인도의 수학자 아리아바타(Aryabhata ; 476~550)는 원의 중심각에 대한 반현의 길이를 계산한 표를 만들었다고 한다. 사인(sine)이란 용어는 반현을 뜻하는 인도어가 아라비아어와 라틴어로 번역되는 과정에서 생긴 용어라고 한다.

인도의 삼각법은 아라비아와 페르시아를 거쳐 유럽으로 전해졌고, 15세기 중엽에 독일의 수학자 레기오몬타누스(Regiomontanus ; 1436~1476)는 그의 저서 “모든 삼각형에 대하여(De triangulis omnimodis)”에서 처음으로 삼각법을 천문학에서 분리된 독립적 분야로 다루었다. 그는 이 책에서 오늘날의 사인법칙과 코사인법칙, 그리고 평면 삼각법과 구면 삼각법에 관한 내용을 자세히 다루었는데 모든 문제 풀이에서 사인함수와 코사인함수만을 사용하였다. 그 후 탄젠트와 사인, 코사인, 탄젠트의 역함수 개념은 독일의 천문학자인 레티쿠스(Rheticus ; 1514~1576)에 의해서 정립되었다.

17세기에 이르러서 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)은 일반각의 삼각함수를, 드무아브르(de Moivre, A. ; 1667~1754)는 삼각함수와 미적분을 다룬 해석적 삼각법을 도입하였고, 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)는 복소변수를 삼각함수에 도입하였다.

(2) 삼각비와 삼각함수

오른쪽 그림과 같이 $\angle C$ 가 90° 인 삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 의 대변의 길이가 각각 a, b, c라 하면 $\angle A$ 에 대하여 두 변의 길이의 비는 모두 6가지가 생기게 되고, 이들을 다음과 같이 정의할 수 있다.



$$\begin{aligned}\frac{a}{c} &= \sin A, & \frac{c}{a} &= \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A, \\ \frac{b}{c} &= \cos A, & \frac{c}{b} &= \frac{1}{\cos A} = \sec A, \\ \frac{a}{b} &= \tan A, & \frac{b}{a} &= \frac{1}{\tan A} = \cot A\end{aligned}$$

이들 6가지 길이의 비를 삼각비라고 한다.

삼각비의 값은 $\angle A$ 의 크기가 결정되면 그 값이 유일하게 결정된다. 따라서, 삼각비는 $\angle A$ 에 대한 함수가 된다. 이때, 이 함수는 각도에 대하여 실수값이 대응되는 함수이다.

예를 들어, $y = \sin x$ 에서 정의역은 $\{x \mid 0^\circ \leq x \leq 90^\circ\}$, 치역은 $\{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$ 이 된다.

그런데 이와 같이 정의역과 치역이 서로 다른 영역에서 함수를 다룬다는 것은 매우 불편한 경우가 많다. 이러한 불편한 점을 보완하기 위하여 새로운 각의 크기의 단위로서 라디안(Radian)을 도입하였다. 각도를 다음과 같은 방법으로 라디안으로 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 단위원에서 호의 길이가 1인 부채꼴 AOB의 중심각의 크기를 a° 라 하면, 한 원의 중심각의 크기는 360° 이고, 그 둘레의 길이는 2π 이므로

$$2\pi : 1 = 360^\circ : a^\circ \text{ 이므로 } a^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

이 각의 크기 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 를 1라디안이라고 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

각을 호도법으로 나타내어 정의역을 실수의 영역으로 확장하면 삼각비를 x 의 함수로 볼 수 있고, 이러한 함수를 삼각함수라고 한다.

(3) 삼각함수의 발달

역사적으로 일반각이 정확하게 인식된 것은 뉴턴에 의하여 $\sin x$ 와 $\cos x$ 의 급수 전개

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots$$

이 발견된 이후 오일러(Euler, L. : 1707~1783)가 이들 공식을 복소수 변수까지 확장하면서 복소수의 편각에 관한 고찰을 한 후부터이다.

특히, 오일러는 복소수의 지수를 삼각함수를 사용하여

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

로 정의하였으며, 복소수 변수를 사용하면 삼각함수와 지수함수는 깊은 관계를 맺게 되어

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

가 성립한다. 이 관계식을 오일러의 공식이라고 부르며, 이것에 의하면 드 무아브르의 정리

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

는 지수법칙에 관한 공식 $(e^{ix})^n = e^{inx}$ 와 같이 나타내어진다.

삼각함수가 주기함수임을 이용하여 물리학, 공학 등에서 주기적인 성질을 가지는 자연 현상을 연구한다.

8.2. 교육과정 및 교과서 내용

9 삼각비

① 삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.

◦ 삼각비의 뜻을 이해하게 한다.

닦음인 두 직각삼각형의 대응하는 두 변의 길이의 비가 일정함을 이해하고, 이로부터 삼각비를 정의하게 한다. 각 A 에 대한 세 삼각비 즉, $\angle A$ 의 사인, 코사인, 탄젠트를 각각 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 의 기호로 나타낼 수 있게 한다. 삼각비 사이의 관계는 다루지 않는다.

어느 건물에는 길이가 26 m 인 에스컬레이터가 설치되어 있어 수평 방향으로 24 m 갈 때, 바닥에서 10 m 만큼 높아진다고 한다. 오른쪽 그림은 이를 모형화하여 그린 것이다.

① 삼각형 ABC와 삼각형 ADE에서 $\angle B$ 와 $\angle D$ 의 크기가 같음을 설명해 보자.

② 삼각형 ABC와 삼각형 ADE의 변의 길이에 대하여 다음 각각의 등식이 성립한다. 그 이유를 말해 보자.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}, \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}, \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$$

③ 위의 ②에서 각각의 식의 값을 말해 보자.

◦ 삼각비의 값을 구할 수 있게 한다.

직각이등변삼각형과 정삼각형을 이용하여 특수한 예각, 즉 30° , 45° , 60° 에 대한 삼각비의 값을 구하고, 좌표 평면 위에 그려진 반지름의 길이가 1인 사분원을 이용하여 임의의 예각의 삼각비를 구하는 방법을 이해하게 한다. 또, 0° 와 90° 에 가까워짐에 따라 삼각비의 값이 어떻게 변하는가를 살펴봄으로써 0° 와 90° 에 대해서도 사인과 코사인의 값을 정할 수 있다는 것을 알게 한다. 삼각비의 표를 활용하여 삼각비를 구할 수 있게 한다. 삼각비의 값은 0° 에서 90° 까지의 각도에 대한 것을 다루고, 삼각비의 그래프는 다루지 않는다.

다음 그림은 모눈종이에 반지름의 길이가 1인 사분원을 그리고 그 위에 각도기와 자를 이용하여 40° 인 각을 표시한 것이다.

① 선분 OA의 길이는 얼마인가?

② 다음 두 선분의 길이를 소수점 아래 둘째 자리까지 말해 보자.

$\overline{OB}, \overline{OC}$

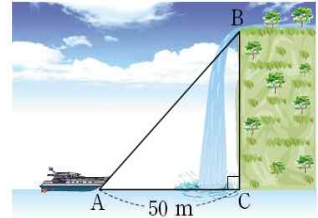
③ 다음 두 삼각비의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 말해 보자.

$\sin 40^\circ, \cos 40^\circ$

② 삼각비를 활용하여 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.

삼각비를 활용하여 직접 측정할 수 없는 거리나 높이, 삼각형의 변의 길이나 넓이 등을 구해 봄으로써 삼각비의 유용성을 이해하고, 이를 활용하는 능력을 기르게 한다. 특히 직각삼각형의 경우 한 변의 길이와 한 예각의 크기를 알면 삼각비를 이용하여 나머지 두 변의 길이를 구할 수 있음을 알게 한다. 삼각비의 활용은 단순한 소재를 택하여 간단히 다룬다.

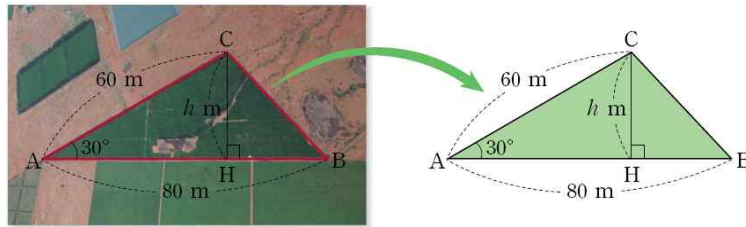
폭포로 유명한 어느 관광지에서는 폭포를 구경하기 위하여 오른쪽 그림과 같이 폭포에서 50 m 떨어진 지점까지 배를 타고 들어간다고 한다.



① 오른쪽 그림에서 어느 각의 크기를 알면 폭포의 높이를 알 수 있는가?

② 위의 ①에서 폭포의 높이를 어떻게 알 수 있는지 말해 보자.

삼각형 모양의 토지에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 측정하였더니 다음 그림과 같이 각각 80 m, 60 m, 30° 였다.



① 선분 CH의 길이를 구하는 방법에 대하여 말해 보자.

② 토지의 넓이를 구해 보자.

8.3. 교 수학습 참고자료

삼각비의 역사

삼각법(trigonometry)이란 희랍어의 삼각형(trigon)과 측정(metria)이라는 두 개의 용어의 합성으로서, 삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 계산하는 것이다. 삼각법은 고대로부터 천문학, 토지의 측량 등에 활용되었기 때문에 그 역사가 매우 길며, 이집트, 바빌로니아, 중국 등 인류 문명의 발상지에서 이에 대한 유물, 유적이 발견되고 있다.

많은 도형, 삼각비에 관한 최초의 역사적인 기록은 고대 이집트의 아메스 파피루스에 의한 것이다. 삼각법을 체계적으로 연구한 최초의 학자는 그리스의 히파르코스(Hipparchos, 190? ~ 125? B.C.)라고 한다. 그는 현에 대하여 쓴 12권의 책에서 각과 현 사이의 수량적 관계인 현표를 계산하였다고 한다.

삼각비의 한자 표현

Sine의 우리말 번역은 ‘정현’이다. 중심이 O 이고 반지름이 1인 원 위의 점 A에서 선분 AO와 각 t를 이루는 현 AB를 긋고, 점 A에서 선분OB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AH} = \sin t$ 가 된다. Cosine의 번역은 ‘여현’이다. 이것은 $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$ 에서 sin의 여각이 cosine이므로 여현이라고 이름한 것이다. tagent는 ‘정접’으로 번역이 된다. ‘접선’이라고 번역하는 경우도 있는데, 이것은 접선의 기울기를 나타내기 때문이다.

자동차의 등판능력

✱ ‘등판능력’은 자동차의 성능을 나타내는 값으로, 자동차가 미끄러지지 않고 달릴 수 있는 경사 각도를 탄젠트 값으로 환산하여 나타낸 것이다. 예를 들어 어떤 자동차가 22° 만큼 기울어진 오르막길을 오를 수 있다면, $\tan 22^\circ = 0.404$ 이므로 이 자동차의 등판능력은 0.404로 나타낸다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 등판능력 0.325인 자동차가 있다고 할 때, 이 자동차가 오를 수 있는 최대 오르막길의 경사 각도를 구하여라.

(2) 등판능력이 0.8인 자동차는 경사도 80%인 오르막길을 오를 수 있다. 이 자동차가 오를 수 있는 길의 최대경사각을 구하여라.

‘하늘을 향해 걷는 사람들’

아래 그림은 미국의 작가 조나단 보로프스키(Jonathan Borofsky)의 설치미술 작품이다. 조나단 보로프스키는 우리나라에서도 광화문 앞의 생명보험사 건물 앞에 설치된 작품 ‘망치질 하는 사람’로 널리 알려져 있다.

사진속의 작품은 ‘하늘을 향해 걷는 사람들’이라는 작품으로 미국 뉴욕시의 록펠러센터 건립을 기념하여 록펠러센터 앞에 설치되었으며, 이후에 다른 곳으로 옮겨졌다.

이 작품은 동쪽을 향해 75도만큼 기울어진 100피트 길이의 철제 기둥 위를 소녀, 직장인, 청년 등 여러 사람이 걸어가고 있고, 기둥이 세워진 곳 근처에서 세 사람이 이들을 올려다보는 형태로 만들어져 있다.



Walking to the sky

조나단 보로프스키의 홈페이지(<http://www.borofsky.com>)에 기울어진 정도와 작품의 길이 등 정보가 표시되어 있으나, 그 높이는 나와 있지 않다. 다음의 삼각비 표를 이용하여 이 작품의 높이를 구하여라.

각도	sin	cos	tan
75 °	0.9659	0.2588	3.7321

헤론의 공식

헤론(Heron: 130? ~ 75? B.C.)의 생애에 대해서는 거의 알려진 것이 없지만, 그의 업적에 대해서는 놀랄 만큼 많은 것이 알려져 있다.

그가 다룬 분야는 너무 다양해서 그를 백과 사전적 작가라고 일컫기도 했다. 이론적 완성보다는 실용적인 이용에 크게 목적을 둔 그의 저작들은 그리스 문명과 오리엔트 문명의 진기한 혼합체라고 할 수 있다.

헤론의 저작은 크게 두 가지로 분류할 수 있는데 하나는 기하학에 관한 것으로 주로 측정에 관한 것을 다루고 있고, 다른 하나는 역학에 관한 것으로 기계적 고안품에 관한 설명으로 되어 있다.

기하학에 관한 저술 중에 가장 중요한 것은 모두 세 권으로 되어 있는 「측정론(測定論):Metrica」

인데, 이 책의 1권에 삼각형의 넓이를 구하는 공식이 소개되어 있다. 바로 이 공식이 ‘헤론의 공식’으로 삼각형의 넓이를 구할 때 유용하게 사용된다.

헤론의 공식은 다음과 같다.

삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라고 할 때, 넓이 S 는

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(단, $2s=a+b+c$)

이다. 헤론의 공식은 실용성에 있어서 매우 탁월하였다. 모든 삼각형은 세 변의 길이만 측정해 보면 그 넓이를 계산할 수 있었고, 비록 삼각형이 아니라 할지라도 직선으로 둘러싸인 모든 도형은 몇 개의 삼각형의 합으로 분해할 수 있으므로 모든 다각형의 넓이를 계산할 수 있다는 결론을 얻게 되었다.

9. 원의 성질

10 원의 성질

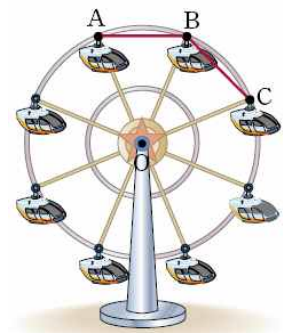
① 원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질을 이해한다.

◦ 원에서 현에 관한 성질을 이해하게 한다.

현의 수직이등분선의 성질로 한 원에서 원의 한 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지나고, 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분함을 이해하게 한다. 또한, 원의 중심과 현의 길이 사이의 관계로서 한 원에서 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 현의 길이는 모두 같고, 그 역 또한 성립함을 이해하게 한다.

중심각과 현 사이에는 어떤 관계가 있을까?

어떤 놀이공원에서는 원 모양의 궤도를 따라 일정한 간격으로 8개의 관람석이 설치된 관람차를 운영하고 있다. 오른쪽 그림은 이 관람차를 모형화한 그림이다.



- ① 두 호 AB와 BC에 대한 중심각의 크기는 같다. 그 이유를 말해 보자.
- ② 삼각형 AOB와 삼각형 BOC는 서로 합동이다. 그 이유를 말해 보자.
- ③ 두 현 AB와 BC의 길이를 비교해 보자.

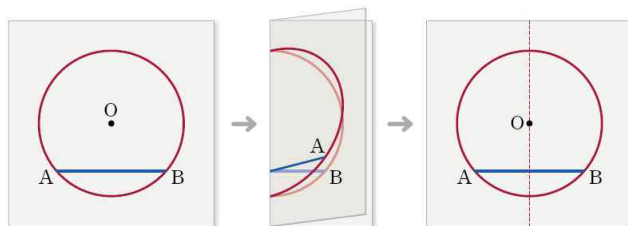
현의 수직이등분선은 어떤 성질을 가지고 있을까?

투명종이에 원 O를 그린 후 다음 활동을 해 보자.

활동

가. 원 O 위의 두 점 A, B를 지나는 현 AB를 긋는다.

나. 두 점 A와 B가 겹치도록 종이를 접고 펼친다.



- ① 접은 선은 현 AB의 수직이등분선이다. 그 이유를 말해 보자.
- ② 접은 선이 중심 O를 지남을 확인해 보자.

◦ 원의 접선에 대한 성질을 이해하게 한다.

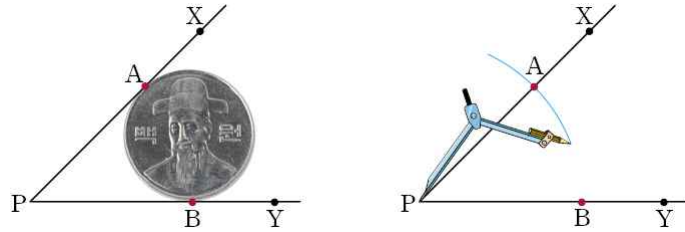
반지름과 접선은 서로 수직이고 원 밖의 한 점에서 그 원에 그을 수 있는 접선은 2개 있다는 것을 알고, 접선의 길이에 대한 성질을 이해하게 한다. 이를 활용하여 외접다각형의 성질을 이해하게 한다.

종이 위에 $\angle XPY$ 를 그린 후 다음 활동을 해 보자.

활동

가. $\angle XPY$ 의 각 변에 동전이 접하도록 놓은 다음 각 접점을 A와 B로 표시한다.

나. 중심이 점 P이고 반지름의 길이가 선분 PA인 원을 그린다.



① 활동 나에서 그린 원이 점 B를 지남을 확인해 보자.

② 위 ①의 결과가 여러 가지 각에 대해서도 성립하는지 다른 친구들과 비교해 보자.

② 원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

◦ 원주각의 뜻과 그 성질을 이해하게 한다.

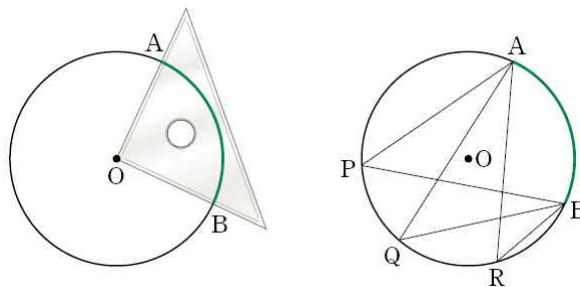
원주각의 뜻을 이해하고, 원주각의 크기와 중심각의 크기의 관계를 이해함으로써 한 호에 대한 원주각의 크기는 일정함을 이해하게 한다. 또, 원의 접선과 현이 이루는 각은 그 사이에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같음을 이해하게 한다.

종이 위에 컴퍼스를 이용하여 원 O를 그린 후 다음 활동을 해 보자.

활동

가. 직각이등변삼각자를 이용하여 중심각의 크기가 90° 인 한 호 AB를 정한다.

나. 원 O에서 호 AB에 속하지 않는 세 점 P, Q, R를 택하여 $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ 를 그린다.



① 직각이등변삼각자를 이용하여 $\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ 의 크기가 모두 45° 임을 확인해 보자. 또, 다른 친구들의 결과와 비교해 보자.

② 위 ①의 결과로부터 추측할 수 있는 성질에 대하여 토론해 보자.

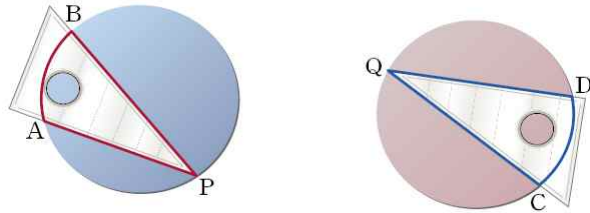
호와 원주각 사이에는 어떤 관계가 있을까?

크기가 같은 원형색종이 두 장을 준비하여 다음 활동을 해 보자.

활동

가. 삼각자를 이용하여 크기가 같은 두 원주각 $\angle APB$ 와 $\angle CQD$ 를 각각의 원형색 종이 위에 그린다.

나. $\angle APB$, $\angle CQD$ 의 두 변과 호로 둘러싸인 부분을 각각 오려 낸다.



① 활동 나에서 오려 낸 두 부분의 호를 포개어 길이가 같음을 확인해 보자.

② 위 ①의 결과로부터 추측할 수 있는 성질에 대하여 토론해 보자.

원의 접선과 현이 이루는 각

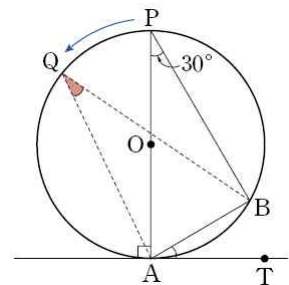
오른쪽 그림에서 직선 AT는 원 O에 대한 접선이다.

① $\angle ABP$ 와 $\angle BAP$ 의 크기를 각각 말해 보자.

② 위 ①의 결과를 이용하여 $\angle BAT$ 의 크기를 말해 보자.

③ $\angle AQB$ 의 크기를 말해 보자.

④ $\angle BAT$ 와 $\angle AQB$ 의 크기가 같음을 확인해 보자.



◦ 원주각의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 해결하게 한다.

원주각의 성질을 이용하여 원에 내접하는 사각형의 성질(즉, 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 내각의 크기의 합은 180° 이고, 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다 등), 사각형이 원에 내접하기 위한 조건 즉, 네 점이 한 원 위에 있을 조건, 원의 두 할선 혹은 원의 두 할선의 연장선이 서로 만나서 생기는 선분의 길이 사이의 관계, 원의 할선과 접선의 길이 사이의 관계 등에 대한 문제를 해결하게 한다.

원에 내접하는 사각형은 어떤 성질이 있을까?

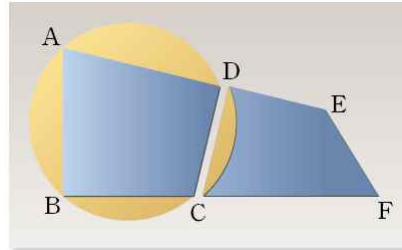
종이 위에 원을 그리고 그 원 위에 네 점 A, B, C, D를 정하고 나서 다음 활동을 해 보자.

활동

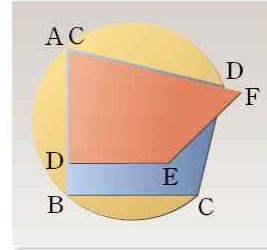
가. <그림 1>과 같이 선분 AD와 BC의 연장선 위에 두 점 E, F를 적당히 정한다.

나. 사각형 DCFE를 그리고 오려 낸다.

다. <그림 2>와 같이 $\angle BAD$ 와 $\angle DCF$ 를 포개어 본다.



<그림 1>

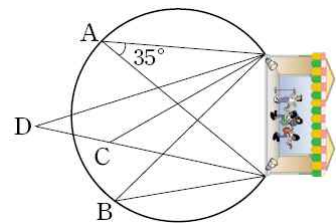


<그림 2>

- ① 활동 다에서 $\angle BAD$ 와 $\angle DCF$ 의 크기가 같음을 확인해 보자.
- ② 사각형 ABCD에서 $\angle A$ 와 $\angle C$ 의 관계에 대하여 토론해 보자.

어떤 경우에 네 점이 한 원 위에 있을까?

오른쪽 그림은 원 모양의 야외 공연장을 모형화 한 그림이다. 공연장의 경계에 있는 지점 A에서 무대를 바라본 각의 크기를 측정해 보니 35° 이다.



- ① 세 지점 B, C, D에서 각각 무대를 바라본 각의 크기를 35° 와 비교하여 말해 보자.
- ② 어떤 지점에서 무대를 바라본 각의 크기가 다음과 같을 때, 이 지점은 공연장 밖에 있는지 안에 있는지 추측하고 토론해 보자.

(1) 45°

(2) 30°

10. 선생님, 질문 있어요. - 기하

1. 구면 위에서 '직선', '삼각형', 그리고 '삼각형의 넓이'에 대해 알아보아라.
2. “다각형의 내각의 크기의 합”, “다각형의 대각선의 개수” 공식에 대한 학생들의 이해가 도구적 이해 수준에 머무는 까닭은 무엇일까?
3. 외각의 크기의 합과 오일러 수
 - (1) 3각형, 4각형, 5각형의 공통점은?
 - (2) 삼각뿔, 사각뿔, 직육면체의 공통점은?
4. 오일러 정리를 이용하여 정다면체가 다섯 종류(정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체)뿐임을 증명하여라.
5. 유클리드 원론에 제시된 5개의 공준(postulate), 5개의 상식(혹은 공리, common notion), 23개의 정의, 그리고 1권의 48개 명제가 어떤 것인지 조사하여라. 그리고 5번째 공준(평행선 공준)이 처음 증명에 사용되는 명제가 어떤 명제인지 조사하여라.

6. 길이가 각각 a , b , c 인 선분이 주어져 있을 때, 길이가 각각 $a+b$, $a-b$, ab , ab/c , $\sqrt{ab}$ 인 선분이 작도가능함을 보이시오. 이로부터 모든 유리수 및 유리계수 이차방정식의 근의 절댓값을 길이로 갖는 선분이 작도가능함을 설명하시오.

7. 정육면체의 전개도는 모두 몇 가지인가? 또, 정사면체의 전개도는 모두 몇 가지인가? 직접 조사해 보시오.

8. 삼각형 넓이 공식과 달리 뿔의 부피 공식을 비수학적인 방법(모래 붓기, 물 채우기 등)으로 유도하는 이 유가 무엇일까?

9. 중학교 1학년 교과서에서 구의 겉넓이 공식을 어떻게 설명(유도)하는지 조사하고, 중적분을 이용하여 구의 겉넓이 공식을 유도해 보시오.

10. 구의 부피

(1) 구의 부피 공식을 중학교 1학년 교과서에서는 어떻게 설명하는지 조사하고,

(2) 구의 겉넓이 공식을 활용하여 설명할 수 있는 방법을 생각해 보시오.

(3) 반지름 r 인 구의 부피는 (그 구에 외접하는) 원기둥 부피의 $2/3$ 즉, $4/3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r$ 임을 “카발리에리의 원리”를 이용하여 설명해 보시오.

(4) 중적분을 이용하여 구의 부피 공식을 유도해 보시오.

11. 주어진 도형의 정의로 옳지 않은 것은? 왜?

- ① 정삼각형 : 세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형
- ② 평행사변형 : 두 대각선이 서로를 이등분하는 사각형
- ③ 사다리꼴 : 한 쌍의 대변만 평행인 사각형

12. 삼각형의 외심(내심)은 ‘외접원(내접원)의 중심’이고, ‘세 변의 수직이등분선(세 내각의 이등분선)의 교점’이다. 중학교 2학년 교과서에서 삼각형의 외심(내심)을 어떻게 정의하고 있는지 조사해 보시오. 그리고 자신의 의견을 말해 보시오.

13. “삼각형의 무게중심은 그 도형의 넓이를 이등분하는 직선들의 교점이다.”에 대한 자신의 생각을 말해보시오.

13-1. 사각형(다각형)을 하나 그리고, 그 사각형의 무게중심을 작도해 보시오.

14. 삼각형의 오심(외심, 내심, 무게중심, 수심, 방심)이 (꼭 하나) 존재함을 증명하시오.

15. 등변사다리꼴(등각사다리꼴?)의 정의를 말해보시오. 평행사변형은 등변사다리꼴인가? 아닌가? 직사각형은 등변사다리꼴인가? 아닌가?

16. 톨레미 정리가 무엇인지 조사하고, 증명하시오.

17. 체바의 정리와 메네라우스의 정리가 무엇인지 조사하고, 증명하시오.

18. 사각형이 외접원을 갖기 위한 필요충분조건을 최대한 많이 조사하시오. 그리고 외접원을 갖는 사각형의 경우, 네 변의 길이만 가지고 넓이를 구할 수 있다고 하는데, 이 방법이 무엇인지 조사해 보시오.

19. 빈 종이에 삼각형과 사각형을 하나씩 그리시오. 자신이 그린 삼각형과 사각형을 각각 밑면으로 하고, 옆면이 모두 이등변삼각형인 사각뿔과 삼각뿔의 전개도를 그린 후, 전개도를 접어 삼각뿔과 사각뿔을 하나씩 만들어 보시오. 그리고, 그 결과를 말해 보시오.