11장. 확률

출처

본 강좌 자료는 이산수학 (2학년 / 3학점/ 3시간 / 이론) 수업에서 사용한 교재 [이산수학 (수학으로 이해하는 디지털 논리), 한빛아카데미 출판사] 의 내용 등을 출처로 작성하였음을 알리는 바입니다.

학습 목표

- 사건에 대한 경우의 수를 이용한 사건이 일어날 확률
- 주어진 조건에 따른 확률
- 사건에서 발생하는 값에 따른 확률과 평균

학습 내용

- 합의 법칙과 곱의 법칙
- 순열, 조합
- 확률, 확률분포

합의 법칙과 곱의 법칙

- 합의 법칙
  - 두 사건 A, B 의 경우의 수가 각각 $|\mathrm{A}| = m,\ |B| = n$이고, $A \cap B = \emptyset$ 이면, 사건 A 또는 사건 B 가 일어날 경우 $(A \cup B)$의 수
  - $|A \cup B| = |\mathrm{A}| + |B| = m + n$
- 곱의 법칙
  - 두 사건 A, B 의 경우의 수가 $|\mathrm{A}| = m,\ |B| = n$ 일 때, 두 사건이 동시에 일어날 경우 $(\mathrm{A} \times B)$의 수
  - $|A \times B| = |\mathrm{A}| \times |B| = m \times n$

예제

■ 영문 대문자로 구성된 5자리 문자열을 만들려고 한다. 첫 문자 또는 마지막 문자가 A인 경우는 몇 가지인가?

(풀이)

첫 문자 또는 마지막 문자가 A인 경우는 다음 3가지다.

① A * * * * ⇒ 곱의 법칙에 의해 $26\times26\times26\times26=456976$

② * * * * A ⇒ 곱의 법칙에 의해 $26\times26\times26\times26=456976$

③ A * * * A ⇒ 곱의 법칙에 의해 $26\times26\times26=17576$

∴ 합의 법칙에 의해 ①+②+③= 931528

순열(Permutation)

- 서로 다른 n 개의 원소 중 r 개를 중복을 허용하지 않고 선택하여 순서대로 나열
- 곱의 법칙을 사용해 순열의 모든 경우의 수 ⇒

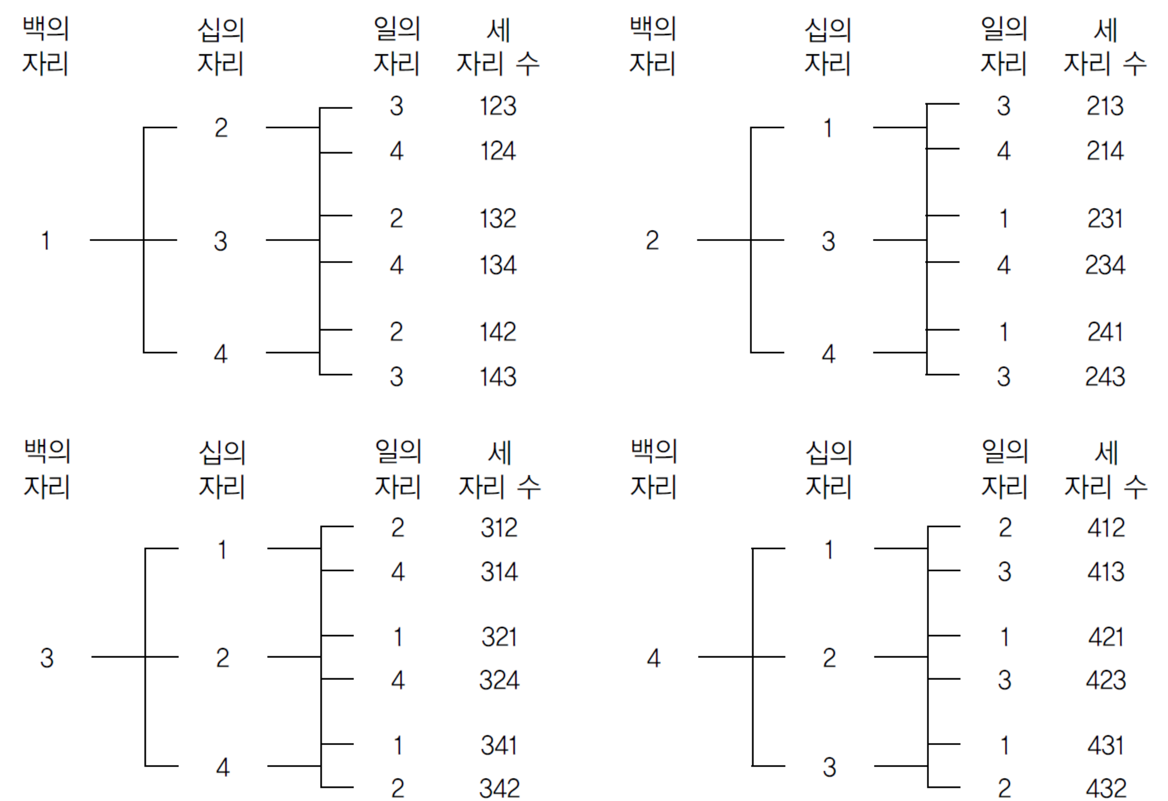
$$ {}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1), \quad 0 \le r \le n $$

- 순열의 기본 공식
  - $ {}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$
  - $ {}_nP_n = n!$
  - $ {}_nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$

예제

- 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 세 개의 숫자를 나열해 만들 수 있는 세 자리 숫자의 수 ? $_4P_3$ =4 $\times 3 \times 2 = 24$

(풀이)



예제

■ 서로 다른 네 개의 문자 a, b, c, d로 만들어지는 순열에서 사전적 순서로 bdac는 몇 번째 순열인가?

(풀이)

1. 영문자 알파벳 순서에 의해 곱의 법칙 사용

① a * * * ⇒ ${}_3P_3 = 3!=6$

② b a * * ⇒ ${}_2P_2 = 2! =2$

③ b c * * ⇒ ${}_2P_2 = 2! =2$

④ b d a c ⇒ 1

2. 합의 법칙 사용

$\therefore {}_3P_3 + {}_2P_2 + {}_2P_2 + 1 = 3! + 2! + 2! + 1 = 11$번째

예제

■ 서로 다른 네 개의 문자 a, b, c, d로 만들어지는 순열에서 사전적 순서로 20번째 오는 순열은 무엇인가?

(풀이)

1. 영문자 알파벳 순서에 의해 곱의 법칙과 합의 법칙을 사용

① a * * * ⇒ ${}_3P_3$ = 3!=6

② b * * * ⇒ ${}_3P_3$ = 3!=6

∴ a 또는 b로 시작하는 문자열은 12가지다.

③ c * * * ⇒ ${}_3P_3$ = 3!=6

∴ a, b, c 중 하나로 시작하는 문자열은 18가지다.

④ d a b c는 19번째 문자열 ∴ 20번째 문자열은 ‘dacb’다.

예제

- 문자열 ‘exaction’ 에서 a와 o 사이에 세 개의 문자가 오는 경우의 수는 몇 가지인가?

(풀이) a와 o를 제외한 나머지 문자들 중 a와 o 사이의 세 개의 문자로 들어가는 순열과, a와 o 사이에 세 개의 문자를 넣어 한 문자로 생각하고 순열을 고려하면 된다.

① 나머지 문자 e, x, c, t, i, n 중 세 개를 선택 나열 : ${}_6P_3$.

② a와 o의 자리를 바꾸는 방법은 2가지.

③ a와 o 사이에 세 개의 문자를 넣은 후 그 다섯 개의 문자를 한 문자로 생각한다. 이 한 문자와 남은 세 개의 문자로 발생할 수 있는 순열 : ${}_4P_4$

$$\therefore\ {}_6P_3 \times 2 \times {}_4P_4 = \frac{6!}{(6-3)!} \times 2 \times \frac{4!}{(4-4)!} = 5760$$

예제

- 문자열 ‘exaction’ 에서 적어도 한쪽 끝에 모음이 오는 경우의 수는?

(풀이)

적어도 한쪽만 모음이 오는 경우는 전체 순열에서 양쪽 끝에 모두 자음이 오는 경우를 제외.

① 우선 8개의 문자열로 만들 수 있는 순열 : ${}_8P_8$

② 자음 x, c, t, n 중 두 개가 선택되어 나열 : ${}_4P_2$

③ 양 끝에 자음을 나열하고 남은 6개 문자를 그 사이에 나열 : ${}_6P_6$

$$\therefore {}_8P_8 - {}_4P_2 \times {}_6P_6 = \frac{8!}{(8-8)!} - \left(\frac{4!}{(4-2)!} \times \frac{6!}{(6-6)!}\right) = 31680$$

중복순열

- 중복순열 ${}_{n}\prod_{r}$
  - 서로 다른 n 개의 원소 중 중복을 허용하며 r개를 선택하여 순서대로 나열한 것
  - ${}_{n}\prod_{r} = n^{r}$
- 중복된 원소를 포함하는 집합에 대한 순열
  - n 개 중에서 같은 것이 각각 p개, q 개, r 개, …, s 개 있을 때, n 개를 나열하는 경우의 수

$$\frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \cdots \times s!}, \qquad p + q + r + \cdots + s = n$$

예제

■ 0, 1, 2, 3, 4를 갖고 중복을 허락하여 세 자리 이하의 숫자는 몇 가지를 만들 수 있는가?

(풀이) 곱의 법칙과 합의 법칙 이용!

① 세 자리 숫자에서 첫 자리는 0을 제외한 나머지 숫자에 의해 구성 : 4가지.

나머지 두 자리는 다섯 개의 숫자 중 두 개를 선택하는 것 : ${}_5\Pi_2$

$$\therefore 4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 4 \times 5 \times 5 = 100$$

② 두 자리 숫자에서 첫 자리는 0을 제외한 나머지 숫자에 의해 구성: 4가지.

나머지 자리는 다섯 개의 숫자 중 한 개를 선택하는 것 : ${}_5\Pi_1$

$$\therefore 4 \times {}_5\Pi_1 = 4 \times 5^1 = 4 \times 5 = 20$$

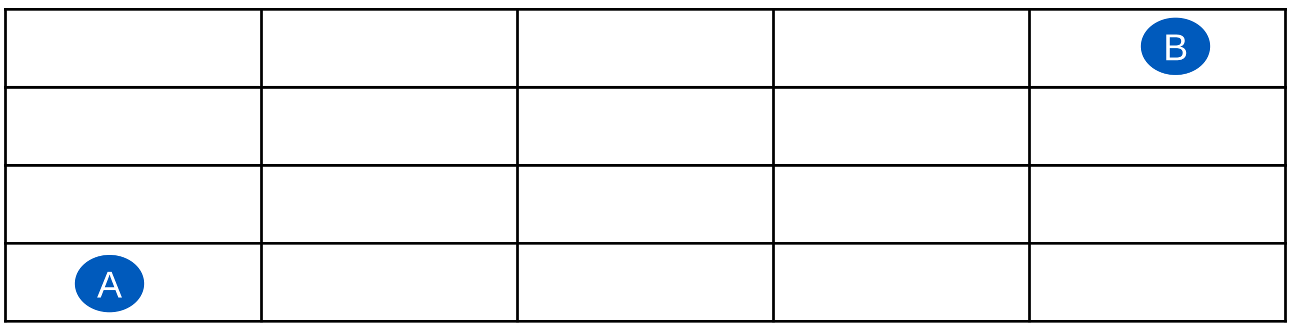
③ 한 자리 숫자는 다섯 개의 숫자 중 하나를 선택하는 것 : ${}_5\Pi_1$

$$\therefore {}_5\Pi_1 = 5^1 = 5$$

$$\therefore (4 \times {}_5\Pi_2) + (4 \times {}_5\Pi_1) + {}_5\Pi_1 = 25$$

예제

- 다음 그림에서 A에서 B까지 이동하는 최단 경로를 모두 구하시오.



(풀이)

A에서 B로 이동하는 최단 경로 : 가로로 5칸, 세로로 4칸 이동

$$\therefore \ \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1} = 126$$

조합(Combination)

- 서로 다른 n 개의 원소 중 r개를 중복과 순서에 상관없이 선택하는 경우의 수
  - $_{n}C_{r} = \frac{_{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- 이항 정리 (Binomial Theorem)
  - $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k}=0}^{\boldsymbol{n}} {_{\boldsymbol{n}}C_{\boldsymbol{k}}}\, \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}}$
  - $_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}}$: 이항계수(Binomial Coefficient)
- 파스칼의 삼각형 정리
  - 모든 전개식의 첫 번째 항과 마지막 항은 1이다.
  - $_{n-1}C_{r-1} + {_{n-1}C_{r}} = {_{n}C_{r}}$

확률(Probability)

- 표본공간 S에서 특정 사건 A가 일어날 가능성
- $P(A)$
- $P(A) = \frac{|A|}{|S|}$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(S) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$

확률의 덧셈정리

- 사건 A 또는 사건 B 가 일어날 확률
- 두 사건 A, B 가 동시에 일어나는 경우
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않는 경우 (배반사건)
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

조건부 확률

- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 두 사건 A , B 에 대해 A 가 일어났다고 가정했을 때, 사건 B 가 일어날 확률
- $P(B|A)$
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

예제

- 컴퓨터공학 학생의 40%가 여학생이고, 컴퓨터공학 학생의 38%가 2학년 학생이다. 그리고 2학년 여학생은 14%다.

(1) 임의로 여학생을 뽑았을 때, 그 학생이 2학년일 확률은 얼마인가?

(2) 2학년 학생 중 한 명을 뽑았을 때, 그 학생이 여학생일 확률은?

(풀이)

A = 여학생 사건, B = 2학년 학생 사건, $A \cap B$ =2학년 여학생 사건

$$\therefore \quad P(A) = \frac{40}{100}, P(B) = \frac{38}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{14}{100}.$$

(1) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{13}{40}$

(2) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{14}{38}$

확률분포

- 확률변수 (Random variable)
  - 변수 X가 취할 수 있는 모든 값이 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 일 때, 이 들 값을 취할 확률을 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 이라 할 때, 변수 X 을 확률변수.
- 확률분포 (Probability distribution)
  - 확률변수 X가 취하는 값 x_i와 X가 x_i를 취할 확률 p_i 간의 관계
- 확률밀도함수
  - 사건 X의 확률분포
  - $\boldsymbol{P}(X = x)$
  - $0 \leq \boldsymbol{P}(X = x_i) \leq 1, \quad i = 1,\ 2, \ldots, n$
  - $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$
  - $\boldsymbol{P}(X = x_i \text{ or } X = x_j) = \boldsymbol{P}(X = x_i) + \boldsymbol{P}(X = x_j)$

예제

■ 하트 카드 5장, 다이아몬드 카드 3장이 있다. 무작위로 두 번 뽑았을 때, 다이아몬드 카드가 뽑힐 경우의 수를 X라고 할 때 확률분포와 확률밀도함수를 구하시오.

(풀이)

가정: 뽑은 카드는 다시 넣지 않는다.

(1) 확률분포

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}, \quad P(X=1)=\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_1}{{}_8C_2}, \quad P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}$$

(2) 확률밀도함수

$$P(X=x)=\frac{{}_5C_{2-x} \times {}_3C_x}{{}_8C_2}$$

예제

- blue공 6개, red공 4개가 들어 있는 주머니에서 무작위로 3개의 공을 꺼내는 사건을 X 라 하자. Red공이 2개 이상 뽑힐 확률분포를 구하시오.

(풀이) 가정: 뽑은 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.

(1) red공 2개를 꺼낼 경우

$$P(X=2)=\frac{{}_6C_1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{10}$$

(2) red공 3개를 꺼낼 경우

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{30}$$

$$\therefore P(X\geq 2)=P(X=2\ orX=3)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{3}$$

확률변수의 기대값

- 확률변수 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- X 의 확률분포 = $\{p_1, p_2, \ldots, p_n \mid P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$
- 확률변수 X 의 평균값 $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$
- 기대값 (Expectation)
  - 변수 X가 취한 값들과 그 확률분포를 이용해 평균값을 구해 예측할 수 있다.
  - $E(X)$

예제

- 주사위 두 개를 던져서 얻을 수 있는 눈의 합의 기대값은 ?

(풀이)

$$E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

$$= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{9} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{5}{36}$$

$$+9 \times \frac{1}{9} + 10 \times \frac{1}{12} + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \frac{10}{9} + 1 + \frac{5}{6} + \frac{11}{18} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{126}{18} = 7$$

확률변수의 표준편차

- 편차(deviation)
  - 확률변수 X 가 가진 각 값들과 기대값과의 차이
  - $x_i - E(X)$
- 확률변수 X의 모든 편차들을 더하면 합이 0이 된다.

예제

- 주사위 두 개를 던져서 얻을 수 있는 눈의 합 X 의 기대값은 E(X) = 7 이다. X의 각 값에 대한 편차를 구하시오.

(풀이)

$x_1 = 2 \Rightarrow x_1 - E(X) = 2 - 7 = -5$, $x_2 = 3 \Rightarrow x_2 - E(X) = -4$

$x_3 = 4 \Rightarrow x_3 - E(X) = -3$, $x_4 = 5 \Rightarrow x_4 - E(X) = -2$

$x_5 = 6 \Rightarrow x_5 - E(X) = -1$, $x_6 = 7 \Rightarrow x_6 - E(X) = 0$

$x_7 = 8 \Rightarrow x_7 - E(X) = 1$, $x_8 = 9 \Rightarrow x_8 - E(X) = 2$

$x_9 = 10 \Rightarrow x_9 - E(X) = 3$, $x_{10} = 11 \Rightarrow x_{10} - E(X) = 4$

$x_{11} = 12 \Rightarrow x_{11} - E(X) = 5$

확률변수의 분산

- 분산(Variation)
  - 확률변수 X 의 기대값이 $E(X)$ 일 때, 확률변수가 취하는 값들이 기대값으로 부터 얼마나 떨어져 있는지를 보여주는 값
  - 기대값으로 부터 각 값들의 평균 차이
  - $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum(x_i - E(X))^2 p_i$
- 표준 편차(Standard deviation)
  - 확률변수 X의 분산에 대한 양의 제곱근
  - $D(X) = \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

예제

- 주사위 두 개를 던져서 얻을 수 있는 눈의 합 X 의 기대값은 E(X) = 7 이다. 확률변수 X의 분산과 표준편차를 구하시오.

(풀이)

$$V(X) = (2-7)^2\frac{1}{36} + (3-7)^2\frac{1}{18} + (4-7)^2\frac{1}{12} + (5-7)^2\frac{1}{9} + (6-7)^2\frac{5}{36} + (7-7)^2\frac{1}{6} + (8-7)^2\frac{5}{36} + (9-7)^2\frac{1}{9} + (10-7)^2\frac{1}{12} + (11-7)^2\frac{1}{18} + (12-7)^2\frac{1}{36} = \frac{35}{6}$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

예제

- 주머니에 100원 짜리 10개, 500원 짜리 5개가 들어 있다. 세 개의 동전을 꺼냈을 때 금액의 합을 X라고 하자. 확률변수 X의 분산과 표준편차를 구하시오. (단, 기대값은 $E(X) = 700$)

(풀이)

(1)분산

$$V(X) = (300-700)^2 \frac{24}{91} + (700-700)^2 \frac{45}{91} + (1100-700)^2 \frac{20}{91} + (1500-700)^2 \frac{2}{91}$$
$$= 91428.57$$

(2) 표준편차

$$D(X) = \sqrt{91428.57} = 302.371576$$

예제

- 정규분포 (Normal distribution)
  - 수집된 자료의 분포를 근사 하는데 자주 사용
  - $N(\mu, \sigma^2)$, μ :평균, σ :표준편차
  - 확률 밀도함수