13장. 부울대수

출처

본 강좌 자료는 이산수학 (2학년 / 3학점/ 3시간 / 이론) 수업에서 사용한 교재 [이산수학 (수학으로 이해하는 디지털 논리), 한빛 아카데미 출판사] 의 내용 등을 출처로 작성하였음을 알리는 바입니다.

학습 목표

- 디지털 회로 설계를 위한 부울대수의 기본 개념 이해
- 부울대수의 기본 연산 및 진리표 이해
- 부울함수의 표현 방식 이해 및 활용

학습 내용

- 부울대수
- 부울함수의 표현
- 정규식의 간략화

부울대수(Boolean Algebra)

- 입력변수가 두 개의 상태(0, 1)만을 갖는 논리연산과 대수규칙의 논리대수(Logic Algebra)
- 부울연산
  - 부울보수(´, ―,NOT), 부울합(+, OR), 부울곱(·, AND)
  - 논리연산자(¬ , ∧,∨)에 대응
- 부울값은 진리값에 대응(0은 F, 1은 T)
- 부울표현은 합성명제으로 변환할 수 있다. 그 역도 가능.
- 응용분야
  - 컴퓨터에 관련된 디지털 회로를 분석 및 설계

부울 연산자

- 부울보수(Boolean Complement, $\boldsymbol{A}'$ 또는 $\bar{\boldsymbol{A}}$)
  - 부울값에 대한 논리부정 연산자
  - $0' = \bar{0} = 1,\ \ 1' = \bar{1} = 0$
- 부울합(Boolean Addition, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$)
  - 부울값에 대한 논리합 연산자
  - $0 + 0 = 0\,,\quad 0 + 1 = 1,\quad 1 + 0 = 1,\quad 1 + 1 = 1$
- 부울곱(Boolean Multiplication, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 또는 $\boldsymbol{AB}$)
  - 부울값에 대한 논리곱 연산자
  - $0 \cdot 0 = 0,\quad 0 \cdot 1 = 0,\quad 1 \cdot 0 = 0,\quad 1 \cdot 1 = 1$

부울식과 부울함수

- 디지털 회로는 기본적으로 입력값에 일정 연산을 수행하여 결과 신호를 발생시키는 과정을 식으로 표현하기 위해 부울변수와 부울함수를 이용
- 부울변수 (Boolean Variable)
  - 부울값 0 또는 1을 갖는 변수
- n 차 부울함수(Boolean Function of Degree n)
  - n 개의 입력과 한 개의 출력의 관계를 수식적으로 정의한 함수
  - $f\left(x_{1,} x_{2,} \cdots , x_n\right)$: $B^n \rightarrow B$, B^n ={$(x_{1,} x_{2,} \cdots , x_n) | x_i \in B$, 1≤ $i \leq n$}, $B = \{0, 1\}$
  - n 개의 부울변수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$와 부울연산자로 구성되는 식

예제

■ 다음 식이 몇 차 부울함수인지 확인하고, 부울함수으로 작성하라.

(1) x'　　(2) $x+y$　　(3) $xy'+yz\ +w'z$

(풀이)

(1) 1차 부울함수.　$\therefore\ f(x)=x'$

(2) 2차 부울함수.　$\therefore\ f(x,y)=\ x+y$

(3) 4차 부울함수.　$\therefore f(w,x,y,z)=xy'+yz\ +w'$

예제

■ 부울함수의 값을 진리표를 이용하여 구하라.

$$f(x,y,z) = x'yz' + xyz' + xy'$$

(풀이)

x	y	z	x'	y'	z'	$x'yz'$	xyz'	xy'	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

부울식의 동치

- 두 부울함수의 진리값이 서로 같을 때 두 부울식을 동치라고 한다.
  - $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- 부울식의 동치관계는 회로를 최소화하는데 유용하게 사용.
- 부울식의 동치 관계는 진리표 또는 부울대수법칙를 이용하여 증명

부울대수 법칙

부울대수법칙	법칙의 이름
$x+x=x, \quad x \cdot x = x$	멱등법규칙(Idempotent Rule)
$x+0=x, \quad x \cdot 1 = x$	항등법칙(Identity Rule)
$x+1=1, \quad x \cdot 0 = 0$	유계법칙(Boundedness Rule)
$x+y=y+x, \quad xy=yx$	교환법칙(Commutative Rule)
$(x')'=x$	이중 보수의 법칙(Double Negation Rule)
$x+x'=1, \quad x \cdot x' = 0$	보수법칙(Contradiction Rule)
$(x+y)+z=x+(y+z)$, $(xy)z=x(yz)$	결합법칙(Associative Rule)
$x \cdot (y+z) = xy+xz$, $\boldsymbol{x+(yz)=(x+y)(x+z)}$	분배법칙(Distributive Rule)
$(x+y)'=x'y'$, $(xy)'=x'+y'$	드모르간의 법칙(DeMorgan's Rule)
$x+xy=x, \quad x(x+y)=x$	흡수법칙

예제

- 다음을 부울대수 법칙을 이용해 증명하라.

$$x \cdot x = x$$

(풀이)

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &= x\,x + 0 && \because \text{항등법칙} \\
&= (x\,x) + (xx') && \because \text{보수법칙} \\
&= x(x + x') && \because \text{분배법칙} \\
&= x \cdot 1 && \because \text{보수법칙} \\
&= x && \because \text{항등법칙}
\end{aligned}
$$

예제

■ 다음을 부울대수 법칙을 이용해 증명하라.

(1) $xy + (x' + y') = 1$ (2) $(xy)(x' + y') = 0$

(풀이)

(1) $xy + (x' + y') = xy + (xy)' = 1$ (∵드 모르간 법칙, 보수법칙)

(2) $(xy)(x' + y') = xy\,(xy)' = 0$ (∵드 모르간 법칙, 보수법칙)

예제

■ 부울대수규칙을 이용해 다음 부울식을 최대한 간략히 하라

$$xy + yz + x'z$$

(풀이)

$xy + yz + x'z = xy + 1 \cdot yz + x'z$ ∵항등법칙

$= xy + (x + x')yz + x'z$ ∵보수법칙

$= xy + xyz + x'yz + x'z$ ∵분배법칙

$= xy(1 + z) + x'z(y + 1)$ ∵분배법칙

$= xy \cdot 1 + x'z \cdot 1$ ∵유계법칙

$= xy + x'z$ ∵항등법칙

입출력값에 대한 부울함수의 표현

- 회로설계에 있어서 중요한 문제
  - 입력값이 주어졌을 때 결과값을 내놓는 부울함수를 부울식으로 어떻게 나타내는가?
  - 부울함수를 부울식으로 표현하는데 있어서 가장 작은 연산자 집합이 존재하는가(최소화)?

예제

■ 다음 입출력값 표를 보고 부울함수로 표현하시오.

(풀이)

(1)

$x = z = 1 \,\&\, y = 0 \;\Rightarrow f(x,y,z) = 1$

$\therefore f(x,y,z) = \; xy'z$

(2) $x = y = 1, \& \, z = 0$, $x = z = 0 \,\&\, y = 1 \;\Rightarrow g(x,y,z) = 1$

$\therefore g(x,y,z) = xyz' + x'yz'$

x	y	z	f	g
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$\boldsymbol{n}$ 차 부울함수의 최소항 표현

- 디지털 논리회로를 설계하기 위한 부울함수의 최소항 사용
- 리터럴(literal)
  - $\boldsymbol{n}$ 차 부울함수를 구성하는 부울변수나 그 변수의 보수
- 부울변수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$의 최소항
  - $\boldsymbol{n}$ 차 부울함수 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$을 구성하는 항들 중 $\boldsymbol{n}$ 개 리터럴 부울곱으로 구성된 항.
  - $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum y_1 y_2 \ldots y_n$, *where* $y_i = x_i$ or $y_i = x_i'$

예제

- 다음 3차 부울함수의 최소항을 구별하라.

  $$f(x,y,z) = xy' + yz' + xyz + x'z' + x'y'z$$

(풀이)

3차 부울함수의 최소항은 세 개 입력변수의 리터럴 부울곱으로 표시.

∴ 최소항은 xyz 와 $x'y'z$

n 차 부울함수의 최소항 개수 (2^n), n : 입력변수의 개수

x	y	2변수 최소항
0	0	$x'y'$
0	1	$x'y'$
1	0	xy'
1	1	xy

x	y	z	3변수 최소항
0	0	0	$x'y'z'$
0	0	1	$x'y'z$
0	1	0	$x'yz'$
0	1	1	$x'yz$
1	0	0	$xy'z'$
1	0	1	$xy'z$
1	1	0	xyz'
1	1	1	xyz

부울대수규칙을 이용한 부울함수의 정규식 표현

- 정규식(DNF : Disjunctive Normal Form)
  - 최소항들의 부울합으로 표현된 부울함수

  (예) $f(x, y) = xy + xy' + x'y'$

- 부울함수를 정규식으로 표현하는 방법
  - 각 항에 포함되지 않은 부울변수를 파악.
  - 항등법칙 $x \cdot 1 = x$ 과 보수법칙 $x + x' = 1$을 사용하여 각 항에 없는 부울변수를 추가.
  - 분배법칙 등을 이용해 식을 전개하고, 중복되는 항은 멱등법칙에 의해 제거.

예제

■ 다음 부울함수을 정규식으로 만들어라.

$$f(x,y,z) = x + y'$$

(풀이) 3차 부울함수

$$f(x,y) = x + y' = x \cdot 1 + y' \cdot 1 \quad \because \text{항등법칙}$$

$$= x(y + y') + y'(x + x') \quad \because \text{보수법칙}$$

$$= xy + xy' + y'x + y'x' \quad \because \text{분배법칙}$$

$$= xy + xy' + x'y' \quad \because \text{교환법칙, 멱등법칙}$$

$$\therefore f(x,y) = xy + xy' + x'y'$$

진리표를 이용한 부울함수의 정규식 표현

- n변수용 진리표를 사용하여 정규식으로 만드는 방법
  - n개 부울변수에 대한 모든 부울값의 조합에 대하여 n 변수 최소항을 표기
  - 주어진 부울함수에 포함된 각 항의 값을 1이 되게 하는 진리표의 입력변수 값을 모두 찾아서 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 란에 모두 1로 표기.
  - $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$가 1로 표기된 n 변수 최소항을 모두 찾아서 논리합으로 묶는다.

예제

■ 진리표를 이용하여 다음 부울함수을 정규식으로 만들어라.

$$f(x,y) = x + y'$$

(풀이)

x	y	2변수 최소항	$f(x,y)$
1	1	xy	1
1	0	xy'	1
0	1	$x'y$	0
0	0	$x'y'$	1

$$\therefore f(x,y) = xy + xy' + x'y'$$

예제

- 진리표를 이용하여 다음 부울함수을 정규식으로 만들어라.

$$f(x,y,z) = x' + xy' + z$$

(풀이)

x	y	z	3변수 최소항	$f(x,y,z)$
0	0	0	$x'y'z'$	1
0	0	1	$x'y'z$	1
0	1	0	$x'yz'$	1
0	1	1	$x'yz$	1
1	0	0	$xy'z'$	1
1	0	1	$xy'z$	1
1	1	0	xyz'	0
1	1	1	xyz	1

$$\therefore f(x,y,z) = x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xy'z + xy'z' + xyz$$

정규식의 간략화

- 디지털 논리회로의 기능을 나타내는 부울함수의 최소화 필요
- 부울대수법칙을 이용하여 정규식을 간단한 부울함수 식으로 변경
- 카르노맵(Karnaugh map , k-map)을 이용하여 정규식의 항들을 서로 묶어서 간단하게 만들 수 있는 항들을 쉽게 찾을 수 있는 도해적인 방법을 제공.
- 카르노맵은 보통 5개 이하의 변수를 갖는 부울식의 최소화에만 유용

카르노맵을 이용한 정규식의 간략화

- n 차 부울함수의 최소항의 개수가 2^n 이므로, 이를 표기하기 위해 셀의 개수가 2^n 인 2차원 평면 (n 변수용 카르노맵) 을 작성.
- 주어진 부울함수의 정규식에 있는 최소항들 각각에 대응하는 카르노맵 셀에 1을 표시한다.
- 인접하는 셀(공통변수들을 갖고 있는 최소항들)들을 찾아서 2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, …순으로 묶는다.
- 묶음에 있는 공통변수들을 찾아 논리합으로 묶는다.

예제

- 2변수 카르노맵과 3변수 카르노맵을 작성하시오.

$x \backslash y$	y	y'
x	xy	xy'
x'	$x'y$	$x'y'$

2변수 카르노맵

$x \backslash yz$	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	xyz	$xy'z$	$xy'z'$	xyz'
x'	$x'yz$	$x'y'z$	$x'y'z'$	$x'yz'$

3변수 카르노맵

카르노맵의 인접 셀(최소항)

- 카르노맵을 구성하는 변수들의 나열
  - 좌우(상단 열 제목) 혹은 상하(왼쪽 행 제목)로 공통변수가 반드시 있어야 한다
- 하나의 변수만이 차이가 나는 최소항들
- 상하좌우로 위치한 최소항들
- 첫 번째 행과 마지막 행에 위치한 최소항들
- 첫 번째 열과 마지막 열에 위치한 최소항들
- 공통변수들을 갖고 있는 최소항들

예제

■ $f(x, y) = x'y + xy + x'y'$을 카르노맵을 이용해 간략화하라

(풀이)

1. 2변수 카르노맵에 부울함수에 포함된 항들을 1로 표기
2. 최소화할 수 있는 인접한 최소항들을 최대한 많이 묶는다.
   □ 2변수이므로 $\mathbf{2^2(=4)}$ 개를 묶을 수 있는가? ⇒No
   □ $\mathbf{2^1(=2)}$ 개를 묶을 수 있는가? ⇒Yes
3. 각 묶음에 공통으로 있는 변수를 찾아 논리합으로 표기.
   (red 묶음)의 공통변수 : y, (blue 묶음)의 공통변수 : x'

x \ y	y	y'
x	1	
x'	1	1

$\therefore\ f(x, y) = x'y + xy + x'y' = y + x'$

예제

■ $f(x,y,z) = xyz + x'yz + xy'z + x'yz'$ 을 카르노맵을 이용해 간략화하라

(풀이)

1. 3변수 카르노맵에 부울함수에 포함된 항들을 1로 표기
2. 인접한 최소항들을 최대한 묶는다.
3. 각 묶음에 공통으로 있는 변수를 찾아 논리합으로 표기.

(red 묶음)의 공통변수 : xz

(blue 묶음)의 공통변수 : $x'y$

x \ yz	yz	$y'z$	$y'z'$	yz'
x	1	1		
x'	1			1

$$\therefore f(x,y,z) = xz + x'y$$