1. 가우스-조던 소거법의 원리

예제 4.11

다음 연립방정식의 해를 가우스-조던 소거법을 이용하여 구하여라.

(a)
$$\begin{aligned} 2x \quad\quad + z &= 20 \\ 2y - z &= 0 \\ -6x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

풀이

(a) 우선 문제의 연립방정식의 계수행렬과 우변을 행렬로 나타낸 뒤 가우스-조던 소거법을 적용하면 그 과정은 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 60 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 60 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 120 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{array}\right]$$

2. 미지변수의 개수가 방정식 개수보다 많은 경우

- 미지변수의 개수가 일차방정식의 개수보다 많은 경우에는 일반적으로 수없이 많은 해가 존재

- 일차방정식의 수가 미지변수의 수보다 적기 때문에 가우스-조던 소거법을 더 이상 적용하기는 어려움. 기저변수(basic variable)와 비기저변수(non-basic variable) 개념 이용.

예제 4. 13

다음 연립일차방정식의 기저해를 모두 구하여라.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

풀이

(a) x_1을 비기저변수로 설정하면($x_1 = 0$) x_2와 x_3의 값은 아래 행렬에 가우스-조던 소거법을 적용하면 된다.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

그러나 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않음을 손쉽게 알 수 있으므로 이 경우에는 기저해가 존재할 수 없다.

(b) x_2를 비기저변수로 설정하면($x_2 = 0$)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

에서 $\{x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1\}$이 기저해가 됨을 알 수 있다.

(c) 마지막으로 x_3를 비기저변수로 설정하면($x_3 = 0$)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

에서 $\{x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0\}$이 기저해가 된다.

3. 역행렬의 도출

- **AX=B**의 해가 존재하는 경우 가우스-조던 소거법을 적용하면 $\mathbf{I}_n\mathbf{X}=\mathbf{B}'$의 형태가 된다. **AX**가 $\mathbf{I}_n\mathbf{X}$로 변했다는 것은 곧 $\mathbf{A}^{-1}$에 **AX**를 곱해 준 결과로 해석할 수 있는데, 이는 다시 $\mathbf{B}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 임을 의미

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}_n)\,\mathbf{B}$$

- 행렬 **A** 열에 $\mathbf{I}_n$을 추가한 뒤 $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n]$ 전체에 가우스-조던 소거법을 적용하여 **A** 를 $\mathbf{I}_n$ 으로 변환시키면 $\mathbf{I}_n$ 은 $\mathbf{A}^{-1}$이 됨

3. 역행렬의 도출

예제 4. 15

가우스-조던 소거법을 응용하여 다음 행렬의 역행렬을 구하여라.

(a)
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

풀이

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

따라서 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$이 도출된다.

4. 추축연산법

- 일반적으로 n x n행렬 A의 0이 아닌 원소 a_{ij} 에 대하여 추축연산을 하고자 할 때, a_{ij} 를 추축원소, i 행을 추축행이라 하고, j 열을 추축열이라고 부르며 다음의 규칙에 따라 변환된다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{\text{ln}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & 0 & \cdots & b_{\text{ln}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & 1 & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & 0 & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

4. 추축연산법

i) 추축행의 모든 원소들은 추축원소 a_{ij}로 나눈다. 즉,

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{a_{i1}}{a_{ij}} & \dfrac{a_{i2}}{a_{ij}} & \cdots & \dfrac{a_{in}}{a_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & 1 & \cdots & b_{in} \end{bmatrix}$$

ii) 추축열은 $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{i-1,\ j} \\ a_{ij} \\ a_{i+1,\ j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 으로 변환한다.

iii) 나머지 원소들은 규칙 ◸에 의하여 변환된다. 즉,

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{ij} & \cdots & a_{is} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{tj} & \cdots & a_{ts} & \cdots & a_{tn} \end{bmatrix}$$

$b_{ts} = a_{ts} - \dfrac{a_{tj} \times a_{is}}{a_{ij}}$에 의하여 구하면 된다.