✓ 11장
부울대수

1. 부울식

부울식

- 부울식(Boolean expression)
  - 이진수의 집합 A={0, 1}, +(OR)와 •(AND)로 대표되는 이항 연산자(binary operator), 단항 연산자(unary operator) ´(complement) 등으로 표현되는 식을 말함
  - f_1과 f_2가 모두 부울식이면 f_1', f_1+f_2, $f_1 \bullet f_2$, (f_1)도 모두 부울식이 됨
  - 부울 연산자는 논리 연산자와 대응됨
    - \+ → OR : 2개의 피연산자 중 1개만 1이면 1(2개 모두 1이어도 1)
    - • → AND : 2개의 피연산자 중 2개 모두 1이면 1(1개만 1이면 0)
    - ´ → NOT : 현재의 값이 1이면 0, 0이면 1
  - 부울식의 계산 예
    - $0 \bullet 1+1 \bullet 1+0' \bullet 1'=0+1+0=1$
    - $(1 \bullet 0+0 \bullet 1)'+0' \bullet 0'=(0+0)'+1 \bullet 1=1+1=1$
  - 두 부울식이 같은 진리값을 가지면 동치(equivalence)라고 말함

1. 부울식

- 부울 대수(Boolean algebra)와 부울 변수(Boolean variable)
  - 부울 대수는 0 또는 1만을 입력으로 받는 논리적 계산을 수학적으로 표현한 것이고, 부울 변수는 0 또는 1만 값으로 받을 수 있는 변수를 말함
- 부울식의 법칙
  - 멱등 법칙(idempotent law) : p•p=p, p+p=p
  - 항등 법칙(identity law) : p•1=p, p+0=p
  - 교환 법칙(commutative law) : p•q=q•p, p+q=q+p
  - 결합 법칙(associative law) : p•(q•r)=(p•q)•r, p+(q+r)=(p+q)+r
  - 분배 법칙(distributive law) : p•(q+r)=(p•q)+(p•r), p+(q•r)=(p+q)•(p+r)
  - 흡수 법칙(absorption law) : p•(p+q)=p, p+(p•q)=p
  - 역 법칙(inverse law) : p•p´=0, p+p´=1
  - 보 법칙(complementary law) : (p´)´=p
  - 우등 법칙(dominance law) : p•0=0, p+1=1
  - 드 모르간의 법칙(De Morgan's law) : (p•q)´=p´+q´, (p+q)´=p´•q´

1. 부울식

- 부울 함수(Boolean function)
  - n개의 부울 변수와 부울 연산자로 구성된 함수
- 부울 함수의 값을 구하는 예제
  - 다음과 같은 부울 함수의 값을 진리표를 이용하여 구해보자.
  - $f(x,y,z)=x+x'yz+y'z'$

x	y	z	x´	y´	z´	x	x´yz	y´z´	f(x,y,z)
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1

2. 부울식의 표현

부울 함수

- 최소항(minterm)
  - n개의 부울 변수로 만들어진 진리표에서 변수의 각 항을 말함
  - 변수가 n개인 경우, 최소항은 2^n개이고, 각 최소항은 n개의 부울 변수들의 곱으로 표현됨
  - 최소항 예제
    - x=1, y=0, z=1일 때 부울 함수 f(x,y,z)의 값은 1이 되고, 나머지 경우에는 0이라고 하자. 이 부울 함수에 대한 진리표를 구하고, f(x,y,z)=1인 최소항을 부울 변수의 곱으로 나타내라.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$f(x,y,z)=xy'z$

2. 부울식의 표현

- 최소항 예제 2
  - 다음과 같은 진리표가 있을 때 부울 함수 f(x,y,z)을 구하라.
- 곱의 합(sum of product)
  - 부울 함수를 최소항들의 합으로 표현한 것으로 논리합 표준형(DNF : Disjunctive Normal Form)이라고도 함
- 최소항 예제 3
  - 부울 함수 f(x,y,z)=(x+y)z´를 곱의 합으로 표현하라.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x	y	z	(x+y)	z´	f(x,y,z)
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

예제 2 f(x,y,z)=x´y´z+xy´z´+xyz´

예제 3 f(x,y,z)=x´yz´+xy´z´+xyz´

3. 부울 함수의 간소화

부울 함수의 간소화

- 부울 함수의 간소화
  - 부울식의 법칙을 이용하여 복잡한 부울 함수를 동치의 간단한 함수로 변환하는 것
- 부울 함수의 간소화 예제
  - $f(x,y,z)=x'y'z'+x'yz'+xy'z'+xyz'=x'z'(y'+y)+xz'(y'+y)=x'z'\bullet 1+xz'\bullet 1=x'z'+xz'=(x'+x)z'=1\bullet z'=z'$
- 카노우 맵(Karnaugh map)
  - 부울 함수를 구성하는 최소항들을 도표로 그린 후 인접한 최소항들을 서로 묶어서 부울 함수를 간소화하는 방법
- 카노우 맵을 이용한 간소화 알고리즘
  - 부울 변수들로 나타내지는 모든 경우의 최소항들을 사각형으로 연결
  - 최소항들 중 1의 값을 가지는 사각형 안에 1을 채움
  - 1로 표시된 사각형 중에서 공통점을 찾아서 간소화함. 단, 사각형을 인접시킬 때 인접한 사각형 간에는 하나의 부울 변수만 변화를 줌

3. 부울 함수의 간소화

두 변수에 대한 카노우 맵

- 두 변수에 대한 카노우 맵
  - 두 변수를 x, y라 할 때 가질 수 있는 부울 변수는 x, x´, y, y´이고, 이들의 조합은 x´y´, x´y, xy´, xy 등 총 4개이므로 4개의 상자를 만듦
  - f(x,y)=x´y´+x´y+xy´에 대한 카노우 맵을 이용한 간소화
    - 카노우 맵이 아닌 일반적인 간소화 법을 사용하면
      x´y´+x´y+xy´=x´(y´+y)+xy´=x´•1+xy´=x´+xy´=**x´+y´**

x \ y	0	1
0	x´y´	x´y
1	xy´	xy

x \ y	0	1
0	1	1
1	1	

y값에 상관없이 x=0이므로 x´

x값에 상관없이 y=0이므로 y´

∴ x´y´+x´y+xy´는 **x´+y´**로 간소화됨

3. 부울 함수의 간소화

팁!!!

x \ y	0	1
0	1	
1		1

x=0, y=0 상자에 1이기 때문에 x´y´는 1

x=1, y=1 상자에 1이기 때문에 xy는 1

x´y´+xy

x \ y	0	1
0	1	1
1		

x=0, y=0 상자에 1, x=0, y=1 상자에 1이기 때문에 y값에 관계없이 x=0일 때 는 항상 1

x´

x \ y	0	1
0	1	1
1	1	1

x=0, y=0 상자에 1, x=0, y=1 상자에 1, x=1, y=0 상자에 1, x=1, y=1 상자에 1이기 때문에 x와 y값에 관계없이 항상 1

1

3. 부울 함수의 간소화

- 카노우 맵을 이용한 두 변수 부울 함수의 간소화 예제
  - $f(x,y)=xy'+xy+x'y$
    - 카노우 맵이 아닌 일반적인 간소화 법을 사용하면
      $xy'+xy+x'y=x(y'+y)+x'y=x\bullet 1+x'y=x+x'y=x+y$

x \ y	0	1
0	x´y´	x´y
1	xy´	xy

x \ y	0	1
0		1
1	1	1

X값에 관계없이 y=1이므로 y

y값에 상관없이 x=1이므로 x

∴ xy´+xy+x´y는 x+y로 간소화됨

3. 부울 함수의 간소화

세 변수에 대한 카노우 맵

- 세 변수에 대한 카노우 맵
  - 세 변수를 x, y z라 할 때 가질 수 있는 부울 변수는 x, x´, y, y´, z, z´ 이고, 이들의 조합은 x´y´z´, x´y´z, x´yz´, x´yz, xy´z´, xy´z, xyz´, xyz 등 총 8개이므로 8개(2 x 4 행렬)의 상자를 만듦
  - f(x,y,z)=x´y´z´+xy´z´+x´yz´+xyz´에 대한 카노우 맵을 이용한 간소화
    - 카노우 맵이 아닌 일반적인 간소화 법을 사용하면 x´y´z´+xy´z´+x´yz´+xyz´=y´z´(x´+x)+yz´(x´+x)=y´z´•1+yz´•1= y´z´+yz´=z´(y´+y)=z´

한번에 1개의 수만 바꾸기 때문에 10이 아니라 11임

x \ yz	00	01	11	10
0	x´y´z´	x´y´z	x´yz	x´yz´
1	xy´z´	xy´z	xyz	xyz´

x \ yz	00	01	11	10
0	1			1
1	1			1

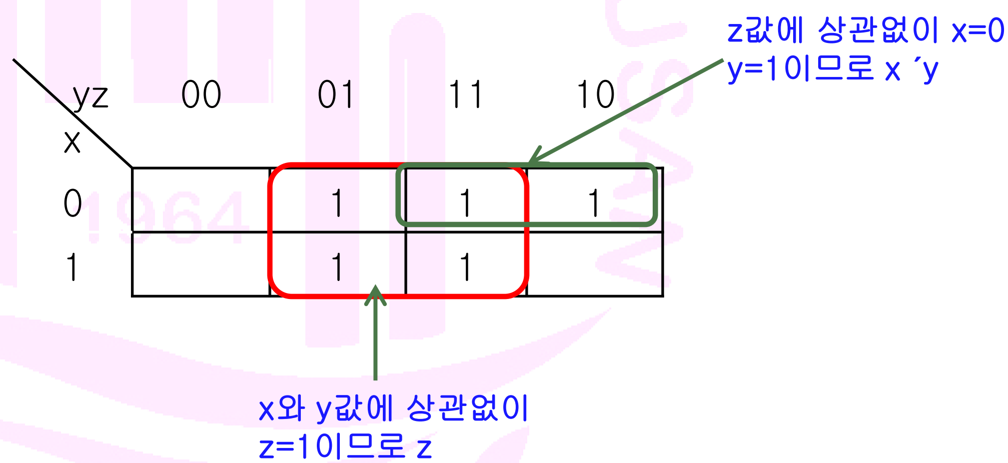
x와 y값에 상관없이 z=0이므로 z´

∴ x´y´z´+xy´z´+x´yz´+xyz´는 z´로 간소화됨

3. 부울 함수의 간소화

- 카노우 맵을 이용한 세 변수 부울 함수의 간소화 예제
  - 다음 진리표를 보고 카노우 맵을 이용하여 부울 함수를 간소화하라.
  - $f(x,y,z)=x'y'z+x'yz'+x'yz+xy'z+xyz=x'z(y'+y)+xz(y'+y)+x'yz'=$ $x'z\cdot 1+xz\cdot 1+x'yz'=x'z+xz+x'yz'=z(x'+x)+x'yz'=z+x'yz'=z+x'y$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



∴ 위 진리표에 따른 부울 함수는 $z+x'y$로 간소화됨

3. 부울 함수의 간소화

네 변수에 대한 카노우 맵

- 네 변수에 대한 카노우 맵
  - 네 변수를 x, y z, w라 할 때 가질 수 있는 부울 변수는 x, x´, y, y´, z, z´, w, w´이고, 이들의 조합은 총 16개이므로 16개(4 x 4 행렬)의 상자를 만듦
  - f(x,y,z,w)=x´y´z´w´+x´y´zw´+x´yz´w+x´yzw+xyz´w+xyzw+xy´z´w´+xy´zw´에 대한 카노우 맵을 이용한 간소화

xy \ zw	00	01	11	10
00	x´y´z´w´	x´y´z´w	x´y´zw	x´y´zw´
01	x´yz´w´	x´yz´w	x´yzw	x´yzw´
11	xyz´w´	xyz´w	xyzw	xyzw´
10	xy´z´w´	xy´z´w	xy´zw	xy´zw´

x와 z값에 상관없이 y=0, w=0이므로 y´ w´

x와 z값에 상관없이 y=1, w=1이므로 yw

xy \ zw	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

∴ 간소화된 부울 함수는 yw+y´w´임

3. 부울 함수의 간소화

- 카노우 맵을 이용한 네 변수 부울 함수의 간소화 예제
  - 다음 진리표를 보고 카노우 맵을 이용하여 부울 함수를 간소화하라.

x	y	z	w	f(x,y,z,w)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

w값에 상관없이 x=1, y=1, z=0이므로 xyz´

y와 z값에 상관없이 x=1, w=1이므로 xw

xy \ zw	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	
10		1	1	

∴ 간소화된 부울 함수는 xw+xyz´임

4. 논리 회로 설계

논리 회로

- 논리 회로(logic circuit)
  - 부울 대수의 기본 연산인 논리합, 논리곱, 부정 등의 연산을 실행하기 위한 회로로 논리 게이트(logic gate)라고도 함
  - 논리 회로는 2진 정보를 처리할 수 있는 회로이며, 통상 2개의 입력과 1개의 출력으로 구성되는데 논리값이 1인 경우에는 회로가 연결됨(on)을 의미하고, 0인 경우에는 연결되지 않음(off)을 의미하기도 함
- 논리 연산자
  - 논리곱 회로(AND gate)는 2개의 입력 A와 B가 모두 1인 경우(on) 출력이 1(on)이 되는 경우로 통상 '•'로 표기함

AND 게이트

표준 논리 기호

© doopedia.co.kr

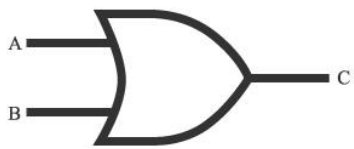
A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

진리표

4. 논리 회로 설계

- 논리합 회로(OR gate)는 2개의 입력 A와 B 중 1개라도 1인 경우(on) 출력이 1(on)이 되는 경우로 통상 ‘+’로 표기함
- 논리부정 회로(NOT gate)는 1개의 입력이 존재하고, 결과는 그 입력의 반대(1이면 0, 0이면 1)로 생성되는 경우로 통상 ‘'’ 또는 ‘¯’로 표기함
- NAND gate는 AND gate와 NOT gate를 혼합한 것으로 AND gate의 결과에 대한 부정을 의미함

OR 게이트



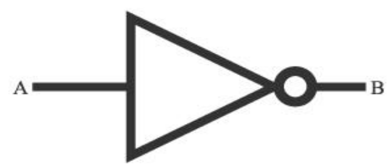
표준 논리 기호

ⓒdoopedia.co.kr

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

진리표

NOT 게이트



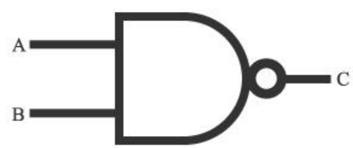
표준 논리 기호

ⓒdoopedia.co.kr

A	B
0	1
1	0

진리표

NAND 게이트



표준 논리 기호

ⓒdoopedia.co.kr

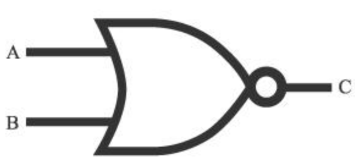
A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

진리표

4. 논리 회로 설계

- NOR gate는 OR gate와 NOT gate를 혼합한 것으로 OR gate의 결과에 대한 부정을 의미함
- X-OR 회로(Exclusive-OR gate)는 2개의 입력 A와 B가 서로 다른 값을 가질 때(A=1이고 B=0이거나 A=0이고 B=1인 경우) 출력이 1(on)이 되는 경우로 통상 '⊕'로 표기함
- Exclusive-NOR gate는 X-OR gate의 부정으로 2개의 입력 A와 B가 서로 같은 값을 가질 때(A=0이고 B=0이거나 A=0이고 B=0인 경우) 출력이 1(on)이 되는 경우임

NOR 게이트



표준 논리 기호

©doopedia.co.kr

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

진리표

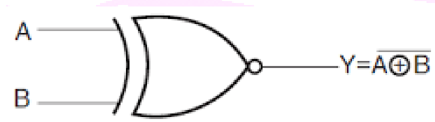
XOR 게이트

표준 논리 기호

©doopedia.co.kr

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

진리표

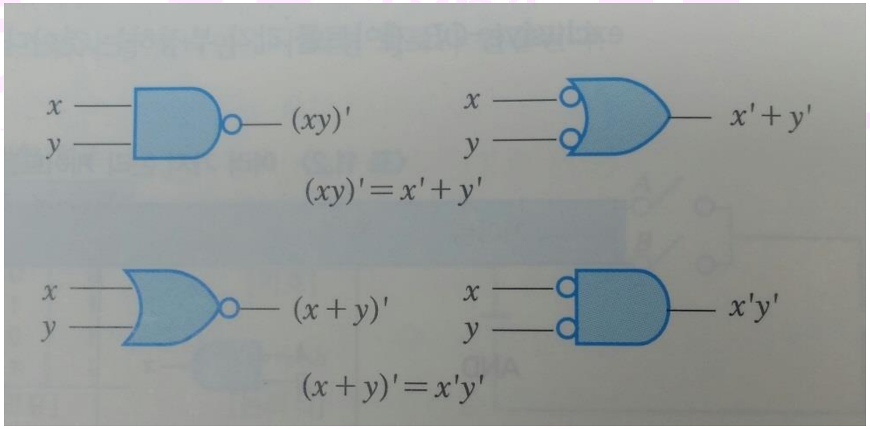


$$Y = (\overline{A \oplus B}) = (A.B + \overline{A}.\overline{B})$$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

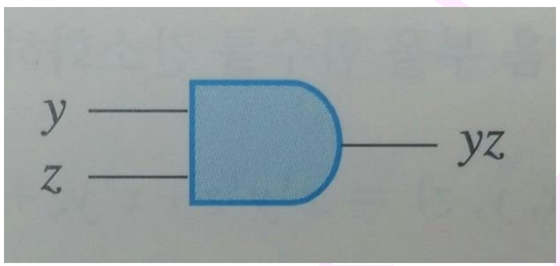
4. 논리 회로 설계

- NAND gate와 NOR gate의 다른 표현
  - (xy)´는 NAND 회로이지만 드 모르강의 법칙을 적용하여 x´+y´로 표현할 수 있고, (x+y)´는 NOR 회로이지만 역시 드 모르강의 법칙을 적용하여 x´y´로 표현하여 아래 그림과 같이 OR gate와 AND gate로 설계할 수 있음
- 완전성(completeness)
  - 모든 부울 함수는 최소항의 부울 합으로 나타낼 수 있으며, 각 최소항은 부울 곱으로 만들 수 있기 때문에 결과적으로 AND, OR, NOT 회로만으로 모든 논리 함수를 설계할 수 있음

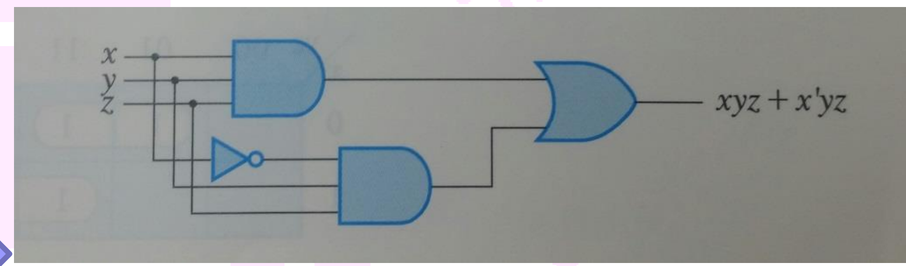


4. 논리 회로 설계

- 부울식을 이용한 논리 회로의 표현 예제
  - 예제 1 : yz
  - 예제 2 : xyz+x´yz



yz



xyz+x´yz

x값에 상관없이 y=1, z=1이므로 yz

x \ yz	00	01	11	10
0			1	
1			1	

카노우 맵으로 확인해보니 yz와 xyz+x´yz는 사실상 같은 기능을 하는 회로!!!

4. 논리 회로 설계

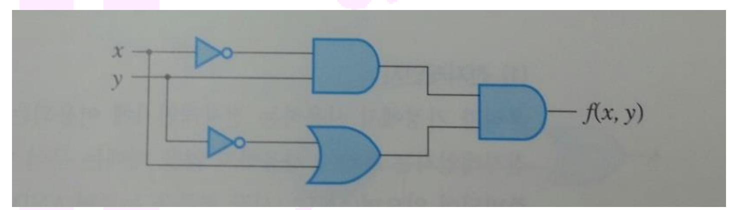
- 예제 3 : f(x,y,z)=x´y´z+x´yz+xyz+xyz´을 간소화하고, 간소화된 함수의 논리회로를 그려라.
- 예제 4 : 다음 그림과 같은 논리 회로를 이용하여 부울 함수를 구하라.
  - f(x,y)=(x´y)(x+y´)=x´yx+x´yy´=x´xy+x´yy´=0•y+x´•0=0

y값에 상관없이 x=0, z=1이므로 x´z

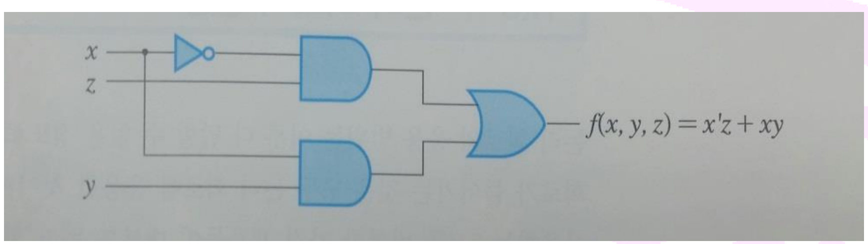
x \ yz	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

z값에 상관없이 x=1, y=1이므로 xy

∴ 간소화된 부울 함수는 **x´z+xy**임



예제 4



예제 3