

이산수학 <제10장> 그래프

10.2 그래프 용어와 특별한 그래프들

이상준 교수
(덕성여대 수학과)

교재 : 이산수학 (7판)
Kenneth H. Rosen 지음, 공은배 등 옮김

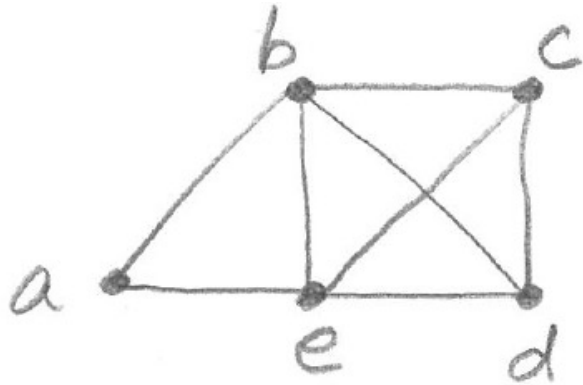
강의 슬라이드 : 이상준, 오연주(15)

그래프의 기본 용어

▶ 정의:

- ▶ ① 두 정점 u 와 v 가 모서리로 연결되어 있으면 u 와 v 는 “**인접(또는 이웃)한다(adjacent)**”라고 한다.
 - ▶ **기호: $u \sim v$**
 - ▶ v 는 u 의 **이웃(neighbor)**이라고 한다.
- ▶ ② **$N(v)$** = 정점 v 의 모든 이웃의 집합
- ▶ ③ **v 의 차수(degree)**는 v 에 붙어 있는 선들의 수이다.
 - ▶ 루프는 정점 차수에 2번 가산한다.
 - ▶ **기호: $\deg(v)$**

▶ 예제:



▶ ① $a \sim b$, $a \sim e$, $a \not\sim c$

▶ ② $N(b) = \{a, e, d, c\}$

$N(a) =$

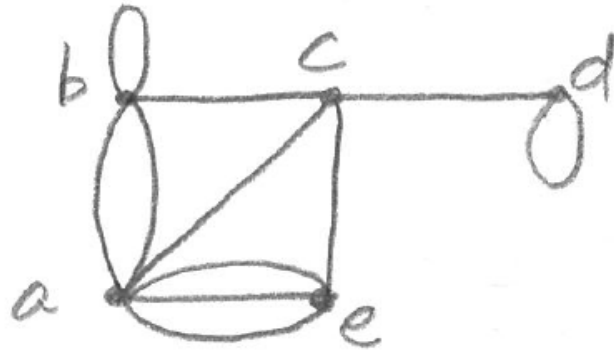
$N(d) =$

▶ ③ $\deg(a) = 2$

$\deg(c) =$

$\deg(e) =$

▶ 예제:



▶ $\deg(a) =$


▶ $\deg(d) =$

▶ $N(d) =$

▶ $N(b) =$

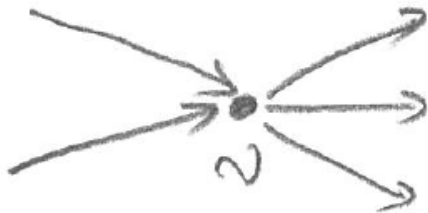
악수정리

- ▶ **정리1(악수정리):** G 를 m 개의 모서리를 갖는 그래프라 하자.
 - ▶ 그러면, $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$ 이다.
 - ▶ 특히(in particular), 모든 차수(degree)의 합은 짝수이다.
- ▶ **예제3:** 각각의 차수가 6인 10개의 정점을 갖는 그래프에서 몇 개의 모서리가 존재하는가?
 - ▶ **풀이:** $2m = \sum \deg(v) = 10 \cdot 6 = 60$
 - ▶ $m = 30$
- ▶ **질문:** 각각의 차수가 5인 20개의 정점을 가지면 모서리의 갯수는?

- 
- ▶ **정리2:** 홀수 차수를 가지는 정점들은 짝수개 있다.
 - ▶ **증명:**

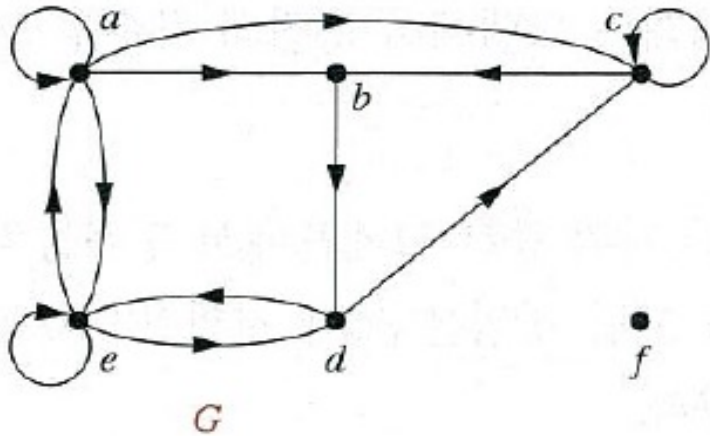
방향성 그래프의 기본 용어

- ▶ **정의:** 방향성 그래프에서 (u,v) 가 u 로부터 v 로의 방향성 모서리(arc 또는 directed edge)라 하자.
 - ▶ 그러면, u 는 v 에 **인접한다** 또는 v 는 u 로부터 **인접된다** 라고 한다.
 - ▶ u 는 (u,v) 의 **시작점(initial vertex)**라고 한다.
 - ▶ v 는 (u,v) 의 **끝점(terminal vertex)**이라고 한다.
- ▶ **정의:**
 - ▶ v 의 **출력차수(out-degree) $deg^+(v)$** : v 로 부터 시작하는 모서리의 수
 - ▶ v 의 **입력차수(in-degree) $deg^-(v)$** : v 로 끝나는 모서리의 수
- ▶ **예제:**



$$\begin{aligned}deg^+(v) &= 3 \\deg^-(v) &= 2\end{aligned}$$

- ▶ **예제4:** 다음 그래프에서 각 정점의 입력차수와 출력차수를 구하라.

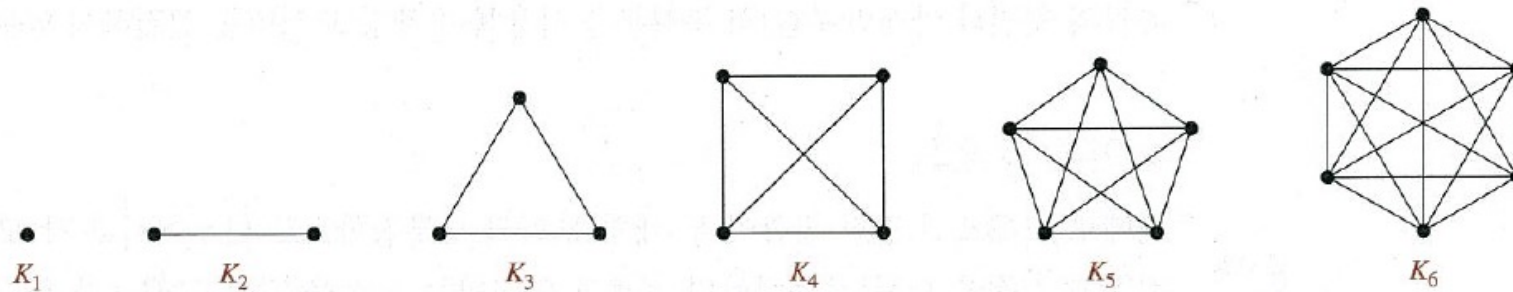


- ▶ **정리3:** $D=(V,A)$ 를 방향성 그래프 라 하자.

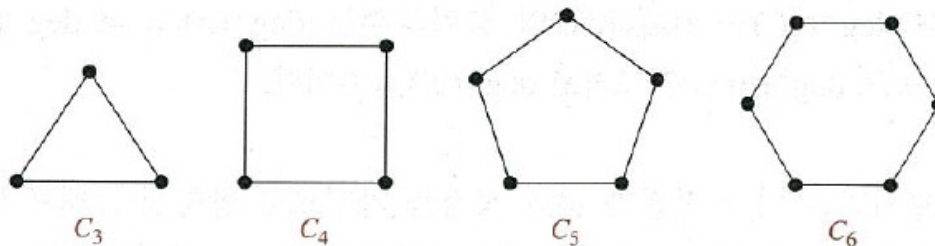
$$\sum_{v \in V} \mathit{deg}^-(v) = \sum_{v \in V} \mathit{deg}^+(v) = |A|$$

중요한 단순 그래프들

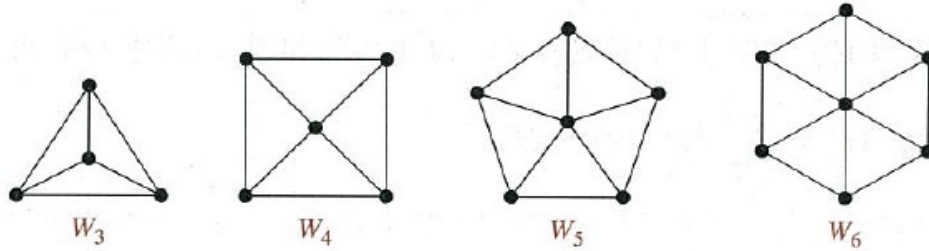
- ▶ **정의:** 정점 n 의 **완전 그래프(complete graph) K_n** 은 모든 n 개의 정점 사이에 모서리를 갖는 단순 그래프이다.



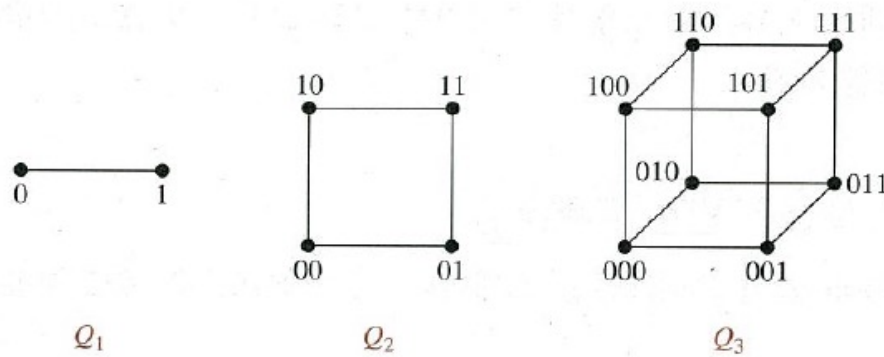
- ▶ **정의:** 정점 n 의 **사이클(cycle) C_n** 은 다음과 같은 그래프이다.



- ▶ 정의: **휠(wheel)** W_n 은 다음과 같다.



- ▶ 정의: **n-큐브(cube)** Q_n 은 다음과 같다.



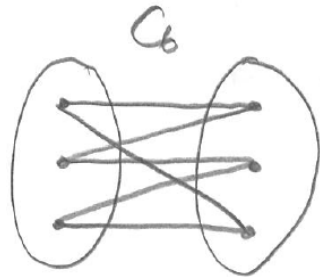


질문: Q_4 를 어떻게 그릴 수 있을까?

이분 그래프 (bipartite graph)

- ▶ **정의:** 그래프 G 에서 정점집합 V 를 V_1 과 V_2 로 분리했을 때 모든 모서리가 V_1 과 V_2 사이를 연결하면 (다른말로 V_1, V_2 내부에 모서리가 없으면) 그래프 G 는 **이분되었다**고 한다.
 - ▶ 이 때 (V_1, V_2) 을 V 의 **이분**이라고 한다.

- ▶ **예제:**

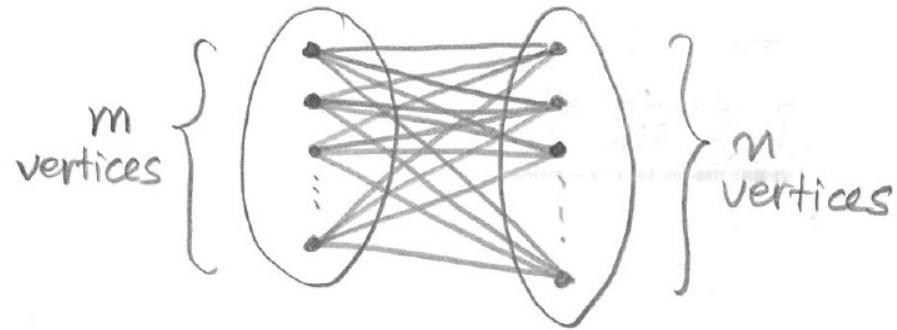


Bipartite graph

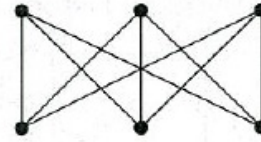


not bipartite

▶ 예제 13: $K_{m,n}$: 완전 이분 그래프



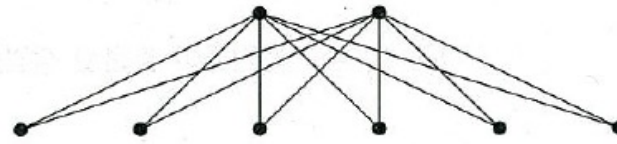
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



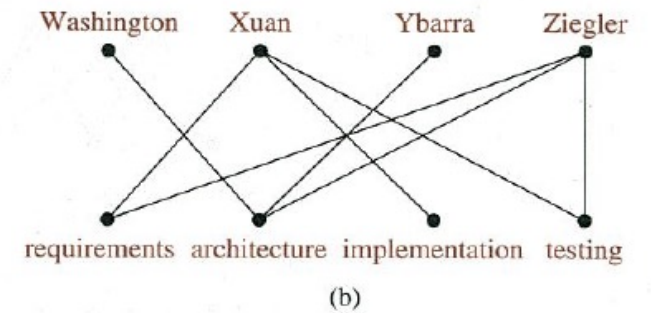
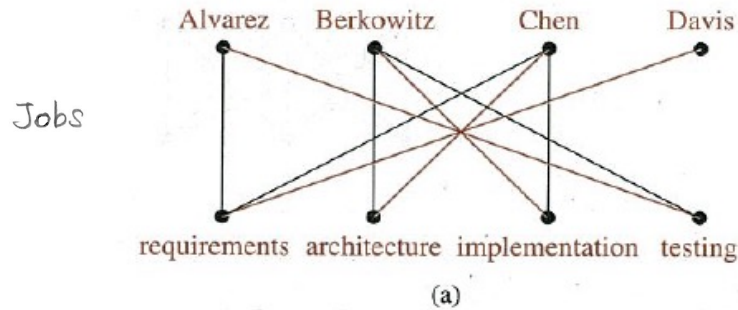
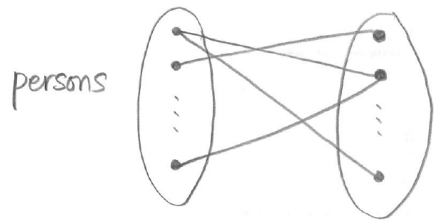
$K_{3,5}$



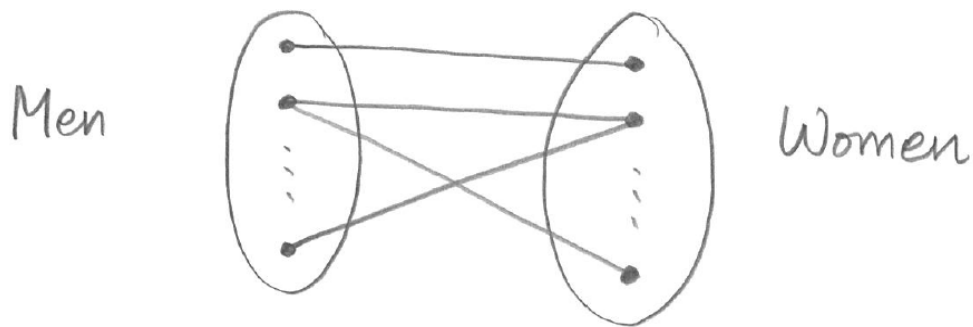
$K_{2,6}$

왜 이분 그래프를 생각할까?

① 작업 할당

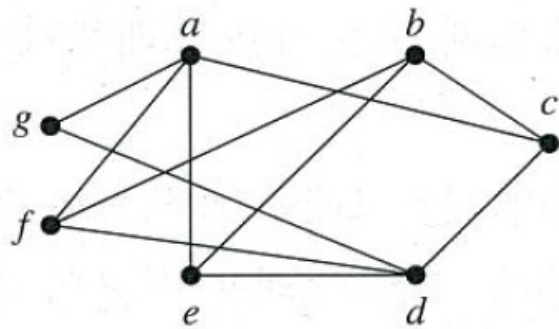


② 결혼

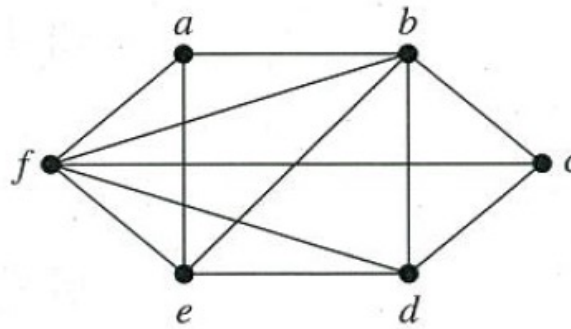


- ▶ **예제:** C_n : 정점 n 의 사이클(cycle).
 - ▶ 만일 n 이 짝수라면, C_n 은 이분된다.
 - ▶ 만일 n 이 홀수라면, C_n 은 이분되지 않는다.

- ▶ **예제11:** 다음 그래프가 이분그래프인지 아닌지를 어떻게 알 수 있을까?



G



H

- ▶ **정리:** 주어진 그래프가 이분 그래프일 필요충분조건은
두 인접한 정점들이 같은 색깔을 갖지 않도록
두 개의 색으로 그래프의 모든 정점들을 색칠할 수 있는 것이다.
- ▶ **증명:**

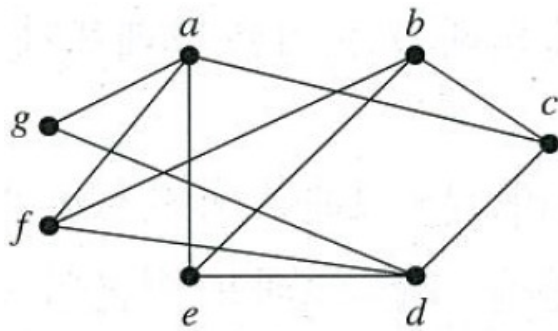
▶ 예제:

▶ 짝수 사이클(cycle):

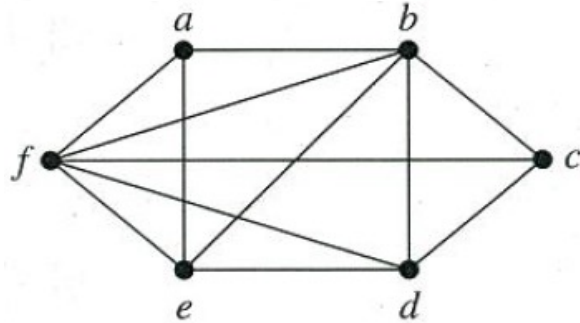
▶ 홀수 사이클(cycle):

▶ 예제 11:

▶ G



▶ H

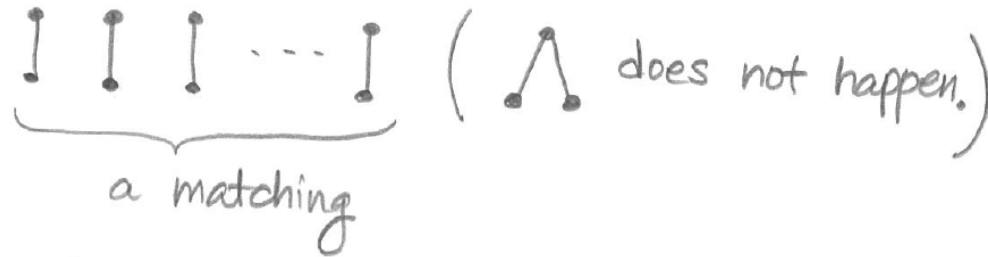


- ▶ **정리:** G 가 이분되는 필요충분조건은
 G 의 모든 사이클(cycle)의 크기가 짝수라는 것이다.
- ▶ **증명:**
 - ▶ (\Rightarrow) G 의 모든 사이클(cycle)이 짝수가 아니라고 가정하자.
 - ▶ G 에 홀수 사이클 C_n 이 있다.
 - ▶ C_n 이 이분되지 않았으므로, G 도 이분되지 않는다.
 - ▶ (\Leftarrow)

매칭(Matching)

▶ 정의:

- ▶ ① 그래프 $G=(V,E)$ 에서 매칭 M 은 두 모서리가 같은 정점에 인접하지 않은 모서리들의 집합이다.



- ▶ ② G 의 **최대 매칭(maximum matching)**은 모서리의 수가 최대인 매칭이다.
- ▶ ③ G 의 **완전 매칭(perfect matching)**은 모든 정점을 포함하는 G 의 매칭이다.

▶ 예제:

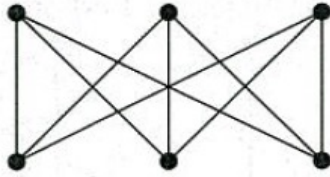
▶ ①



$K_{2,3}$

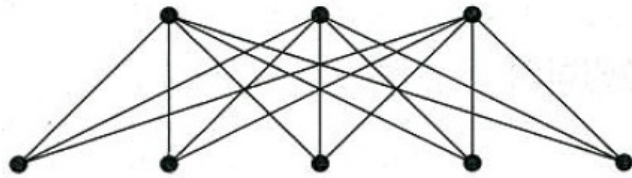
▶ 예제:

▶ ②



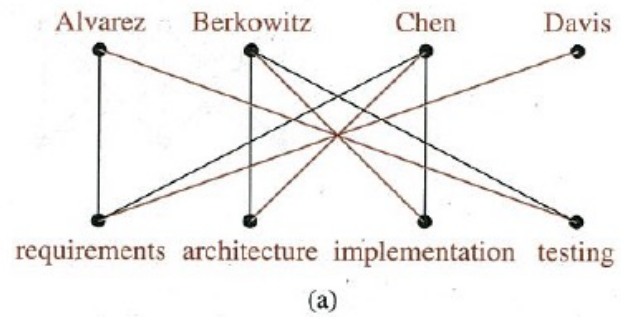
$K_{3,3}$

▶ ③

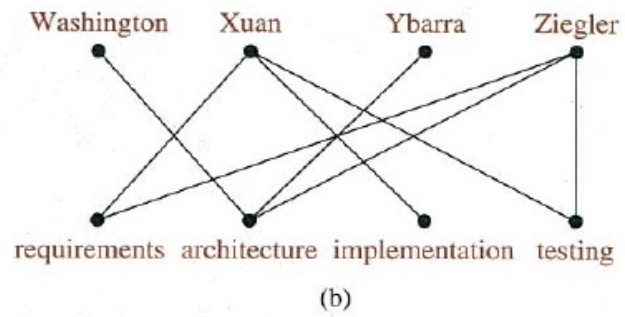


$K_{3,5}$

▶ ④



▶ ⑤



Hall의 정리

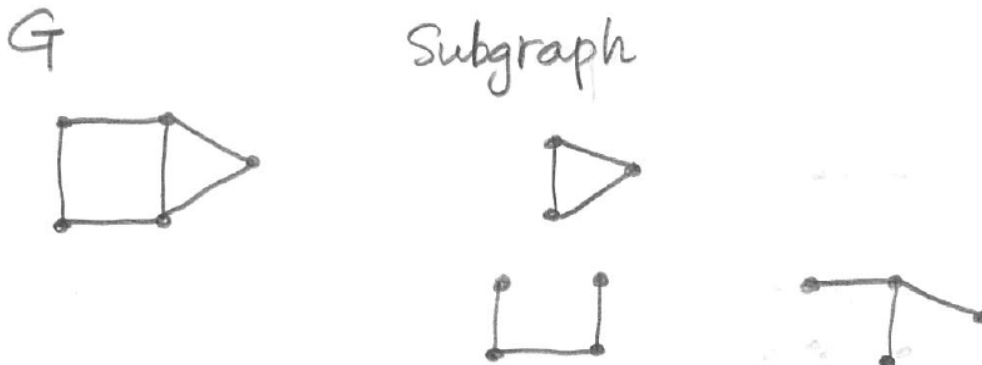
- ▶ **정리(Hall의 정리):** 이분인 정점(V_1, V_2)를 갖는 이분 그래프 $G=(V,E)$ 가 V_1 에서 V_2 로 완전 매칭일 필요충분조건은 V_1 의 모든 부분집합 A 에 대해 $|N(A)| \geq |A|$ 이다.
- ▶ **증명:** (생략)
- ▶ **그림:**

부분그래프

▶ 정의:

- ▶ ① 그래프 G 의 **부분그래프(subgraph)**는 G 의 정점과 모서리의 일부를 제거하여 얻어지는 그래프이다.
- ▶ ② $H \neq G$ 이면 부분그래프 H 는 G 의 **진부분그래프(proper subgraph)**이다.

▶ 예제:

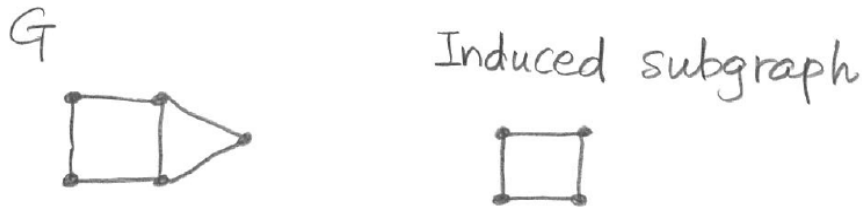


유도된 부분그래프

▶ 정의:

- ▶ ① 그래프 G 의 **유도된 부분그래프(induced subgraph)**는 G 의 정점과 그것들에 연결된 모서리를 제거하여 얻어진 그래프이다.

▶ 예제:



- ▶ **질문:** G 의 모든 유도된 부분그래프를 찾아라.

많이 사용되는 그래프 변형

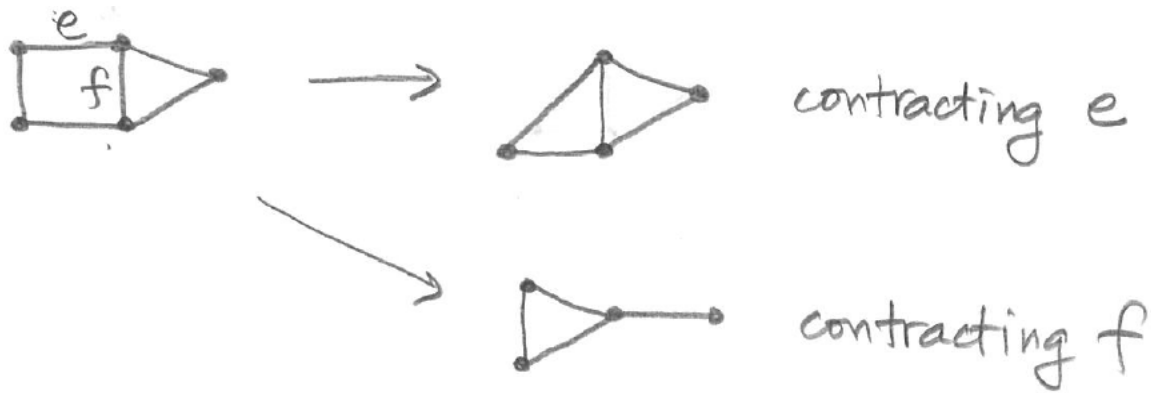
▶ ① 모서리 제거하기



▶ ② 모서리 추가하기



▶ ③ 모서리 축소(감소)



▶ ④ 정점 제거하기



▶ ⑤ 그래프 합집합

