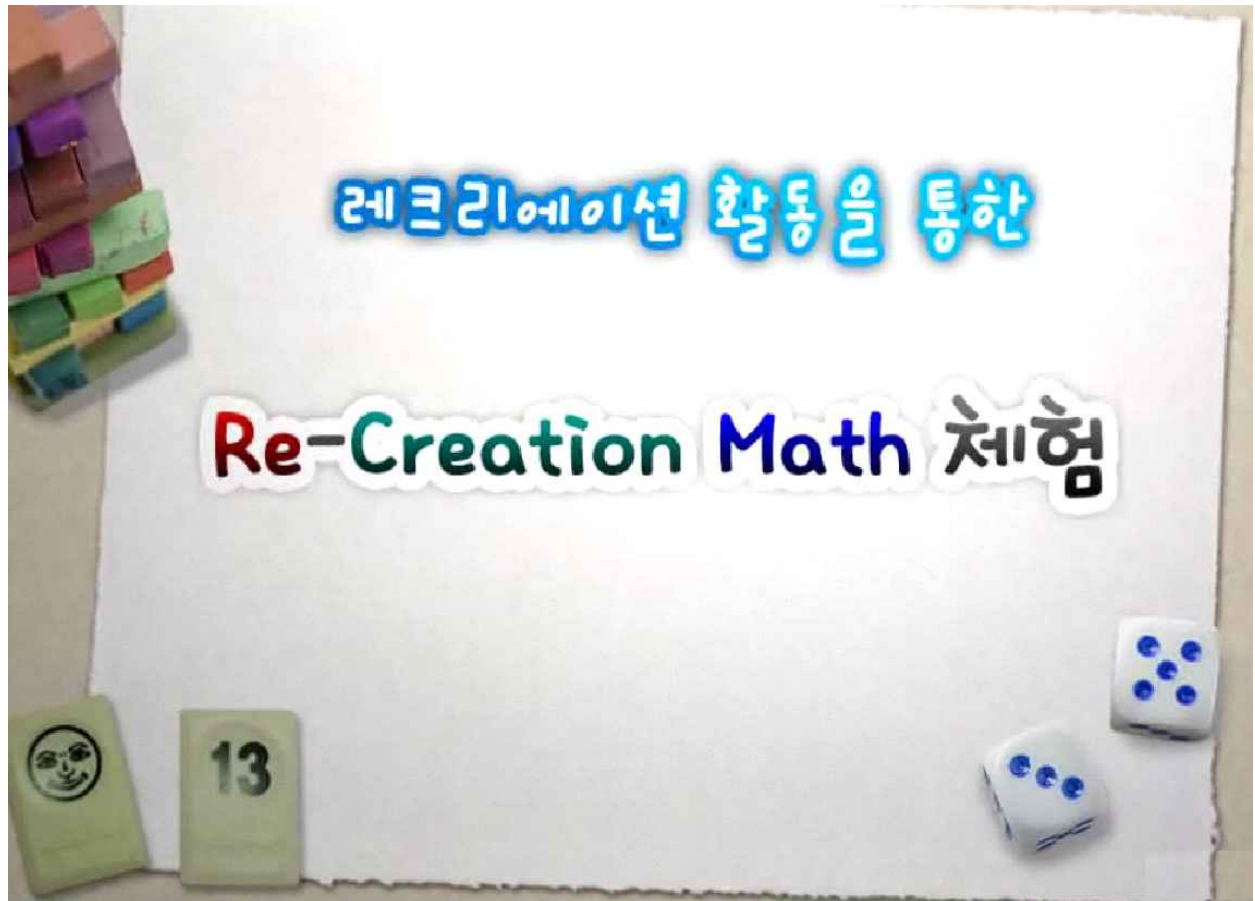


레크리에이션 수학



송 상 현

경인교육대학교 교수

목 차

차시	학습 내용	쪽
		3
01	Recreation 수학으로 초대	8
02	주사위 윷놀이	18
03	주사위 윷놀이를 통한 혼합 계산과 확률 지도	26
04	숫자볼링 게임	38
05	숫자볼링게임을 통한 수식 만들기 지도	44
06	매지믹서	54
07	매지믹서를 통한 수감각과 연산의 활용 지도	58
08	루미큐브	64
09	루미큐브를 통한 조합과 경우의 수 지도	74
10	머킨스 게임	84
11	머킨스게임을 통한 수학보드게임 개발 지도	90
12	탱그램(칠교판)	94
13	탱그램을 통한 다각형 탐구 지도	100
14	스핑크스퍼즐	108
15	스핑크스퍼즐을 통한 도형 놀이 지도	116
16	유사탱그램	130
17	유사탱그램을 통한 확장적 사고 지도	138
18	펜토미노와 블로커스	144
19	폴리오미노를 통한 변형 블로커스 만들기 지도	152
20	펜타큐브와 3D블로커스	158
21	폴리큐브를 통한 조건변경의 확장 지도	166
22	하노이탑	176
23	하노이탑을 통한 규칙성 지도	182
24	페그퍼즐	194
25	페그퍼즐을 통한 수학적 사고 지도	200
26	NIM게임	208
27	NIM게임을 통한 문제만들기 지도	218
28	러시아워 게임	224
29	러시아워게임을 통한 변형 게임 만들기 지도	230
30	Wake up your brain, <i>fun fun</i> Re-Creation Mathematics	236
	참고자료1. 차시별 평가문항 해설 모음	243
부록	참고자료2. (미션임파서블1) 1000점에 최근접하라!	255
	참고자료3. (미션임파서블2) 가장 튼튼한 종이 구조물 만들기	256

강 의 계 획 서

개설시기 : 매 학기(1학년 교양 선택 과목)

과 목	레크리에이션 수학	학 점 (시간)	3	담당교수	수학교육과 송 상 현	수강대상	교양 선택
--------	--------------	-------------	---	------	----------------	------	-------

[] 본 수업은 교양 강좌이지만 앞으로 학교 현장에서의 교실 수업에서도 매우 유용하게 활용할 수 있습니다. 이 강좌는 매우 재미있고 역동적이므로 평소에 게으르거나 잘 조는 사람에게도 적합하지만, 과제는 결코 만만하지 않으니 수강 신청시 주의하시기 바랍니다. 특히 수학과에서 개설한 과목이므로 단순한 '레크리에이션'을 넘어 'Re-Creation 수학'까지 한 걸음 더 나아 가고자 합니다. 선배들의 극단적인 평가를 들어보시되 학점을 나쁘게 받은 선배의 말대로 당신도 그러하다면 빨리 수강을 취소하십시오. 적극적으로 권하는 선배들의 평가를 듣고 그래도 할만하다는 각오와 기대감을 가지고 참여한다면 이보다 더 좋을 수는 없을 겁니다.

1. 강좌의 개요

: Re-Creation Math through Recreational Activities(놀이 활동을 통한 수학 다시 만들기)

표어 : Wake up your brain, Fun fun Mathematics(잠자는 당신의 두뇌를 깨워 수학을 즐겨라)

기법 : What if ~(not), Why ~(not)?

교수법: guided re-invention method

미션 : 흥미(R), 재미(G), 의미(B)를 머무려 자신들만의 별미(Chemi)를 만들어라!

“수학도 아동의 놀이가 될 수 있구나.”, “농면서 배우고, 배우면서 즐긴다.”, ‘내 속에 있는 무한한 잠재적 가능성을 깨운다.’, “이전 것도 수학이구나!”, “농다보니 시간 다 갔다.”, “재미있다.”, “참 맛하다.”, “거연, 여기에도 수학이?”, “고등학교 때까지 접해보지 못했던 새로운 것이라 조금 어려웠다.”, “역시 수학은 약간의 머릿속 노력이 필요하다!”, “창조적 활동” - 강의를 통해 수강생들이 확인할 말들이다.

수학 학습은 교과서를 통해 학교의 정규 수업 시간에만 이루어지는 것은 아니다. 아동은 자연과 문화 속에 들어있는 수학적 원리와 법칙을 관찰하면서 체험을 통해 개념을 배우고 이해하기도 한다. 그리고 일상생활 속에서의 구체적인 활동과 놀이를 통해 수학적 개념 형성을 위한 心象(mental image)을 먼저 형성해 가기도 한다. 그러나 한편, 자연스런 놀이 환경에 속해 있다고 해서 저절로 공부가 되는 것은 아니다. 분명한 목표와 가치를 바탕으로 계획적으로 잘 구성된 놀이 환경을 제공하고 학습자들의 의지를 일깨우는 것은 매우 중요하다. 그것이 바로 **우리 교사들의 몫**이다.

이 강좌는 내용적인 측면에서는 교양 수준(때로는 초등학생의 입장에서, 때로는 중-고등 수준)에서의 놀이 활동을 즐기지만 단지 수동적인 놀이에 머물지 않고 보다 적극적인 재창조까지 경험하는 가능성을 탐색하도록 한다. 이를 위해 갖가지의 사례들을 체험하면서 레크리에이션의 원리와 내용을 수학교실에서 적용할 수 있는 안목을 키우는데 목적이 있다. 여러 가지 수학적인 원리를 이용한 게임, 놀이, 퍼즐을 해결하는 동안 개인적, 집단적으로 참여하여 수학적 탐구의 필요성, 수학의 아름다움과 유용성 등을 인식하며 예비교사로서 수학에 대한 불안을 해소하고 현장에서 수학과 교수-학습 지도에 자신감을 갖도록 하기에 충분한 강좌이다.

* 본 강좌가 지향하는 것들은 다음 7개의 영문 첫 글자에 따른 것이지만 강조하는 바는 내용에 따라 달라질 수 있다. 이 7가지는 기말과제 평가의 기준이기도 하다.

Difference(차별성, 참신함, 독특함)
 Interest(재미, 유익함)
 Googlization(다양한 자료, 그러나 출처는 명확히)
 Integration(통합, 종합)
 Trend(시대의 흐름, 경향)
 Analysis(철저한 분석, 객관적) - 지식을 기반으로 한
 Liberal(유연함과 융통성, 자유로운 사고)

2. 이 강좌를 수강한 후에 여러분은 :

- 1) **지적인 면(지식, 기능)** : 생활, 자연, 게임 속의 레크리에이션(Recreation) 활동들을 이해하고 이를 수학적인 안목으로 재창조(Re-creation)할 수 있게 된다.
- 2) **정의적인 면(감정, 창의)** : 각종 놀이 속의 수학적 원리를 탐구하고 수학 교구를 직접 다루거나 만들어 보는 활동을 하면서 수학도 재미있는 교과임을 느끼게 된다. 그리고 앞으로 현장에서 만나게 될 학생들의 심리적, 교육적 특성에 부합하도록 구체적 조작활동에 필요한 놀이의 수학적 원리 이해와 교구 제작에 자신감을 가지고 자신만의 독특한 방법으로 해결할 수 있게 된다.
- 3) **의지적인 면(태도, 의지)** : 개인별 재창조의 안목과 이미 알고 있는 내용이나 학습한 내용을 바탕으로 생활 주변의 사물이나 상황을 분석/Upgrade 해보려는 생각과 태도의 변화가 생긴다.

RGB가 빛의 3원색이듯이 **知情意(智德體)**의 전인적인 학습 목표는 **‘레크리에이션 활동을 통한 리크리에이션 수학’**의 기본 컨셉이다.

3. 주요교재 및 참고문헌 :

- 1) 강좌용 카페(<http://cafe.daum.net/ginuemathclass>)와 필요시는 온라인용 뉴런뉴런(<http://scampus.or.kr>) 도 활용/ 레크수학 강의자료실 활용
 (첫 주에 회원가입 후 둘째 주까지 소감 및 각오를 적은 간단한 글을 올린다. 가입시 닉네임은 ‘이름_학과학번’
 (예) 조수미_수학16 와 같은 형식으로 가입해야 등급에 맞는 승인을 받을 수 있다.)
- 2) 매 시간별로 필요한 경우에 별도의 인쇄물 제공
- 3) 수학 교구/게임 사이트 <http://www.cut-the-knot.org/games.shtml>

4. 운영 및 평가 방법 :

가. 강의 운영 방법

강의는 교수가 미리 준비한 주별 주제에 따라 교수의 안내에 의한 조별 워크숍(활동)이 주를 이루면서 안내된-재발명(guided reinvention)의 방법으로 진행된다.

워크숍은 수강자 중심의 활동으로서, 교수의 강의내용을 바탕으로 관련되는 구체적인 자료를 직접 탐구, 개발하는 실제적인 놀이 활동이다. 놀면서 배우는 과목이지만 여기에 토론, 원리이해, 재구성, 발전적인 연구 등이 포함될 수도 있다. 개인 또는 조별로 몇 개의 교구나 새로운 놀이 학습 자료들을 만들기도 하는데 그 교구나 학습 자료의 제작과정, 협동심, 창의성, 원리탐구 및 제작된 교구의 활용방법과 가치, 개선점 등을 주제별로 정리해 두면 개인의 아이디어 노트 또는 작품집이 된다.

나. 평가방법

항목	수업 중 워크숍 (중간고사 대체)		모둠과제 (기말고사 대체)		출결 및 과제 등의 시간 준수	기타 (태도)	계
	모듬별 상,중,하위 (단체 1~2점)	개별 RGB식 (건당 1~3점)	보고서 및 10분 발표	산출물 (RGB반영)			
배점	20	20	20	20	20	±a	100점 ±a

원칙적으로 지필시험은 없음(필요시 조정은 가능). 일부 활동 과제는 개인별 재창조를 위한 준비일 뿐이다. 수업 중 각종 놀이 활동과 개별 또는 공동으로 실시한 연구 과제(산출물)를 위주로 평가한다.

1) 수업 중 워크숍(40점) : 수업이나 활동에 나오는 각종 놀이 활동과 교구 탐구 과정에서 개인별, 조별 활동을 관찰하고 평가한다. 때때로 조별 대항 게임을 펼치기도 하는데 그 산출물과 함께 그 활동에 참여하는 개인의 태도와 참신한 아이디어를 고려하기도 한다. 조별로 한 사람씩 번갈아가면서 매주 있는 강의 내용, 조별 워크숍 활동과 아이디어 등을 요약, 재처리한 내용을 강좌 카페에 등록(등록자에게 특별 보너스 1점)하여 자료의 내용과 활동을 모든 사람이 함께 반성/개선해 나갈 수 있도록 한다. 이때 다른 조와 구분되는 그 조만의 독특한 내용들을 기록해 두면 좋다.

개인별 보너스는 회당 재미와 열의(R:+1점), 창의와 기발함(G:+3점), 수학적 내용(B:+2점)

2-1) 포트폴리오(40점-택일) : 주별로 등록한 내용을 정리한 자료이다. 포함될 사항은 강의계획서를 참고하여 <Ⅰ부> (1) 주별 강의 개요 (2) 전체 활동 및 토론 내용 요약 (3) 조별 활동의 핵심과 논의 (4) 내용 관련 보충 자료, 참고문헌, 사이트를 기록하며, <Ⅱ부>로는 (1) 후속 수업의 개선을 위한 발전 방안, 후속 연구거리 등의 조별 제안 (2) 조원들의 자기평가서(수업 후 소감문)이 포함되도록 한다. 이렇게 정리해 둔 요약 노트는 마지막 주의 개인별 프로젝트 구상과 작품 발표에 매우 유용하게 사용될 수도 있다. 한 학기의 내용을 종합하는 포트폴리오의 경우 성실한 정리, 독특한 구성과 아이디어, 자료의 재활용 가능성, 추가 보충 자료 등을 살핀다. - (기존 학생과제물 참조 가능)

2-2) 개별/조별 보고서(40점-택일) : 강의와 워크숍을 통해 습득한 지식과 연구 역량을 바탕으로 수업시간에 개인에게 가장 의미있게 다가왔던 내용 중 하나만 재구성(해법 탐구 또는 변형)하거나, 강의 내용과 유사하지만 다루지 않았던 또는 이미 오래 전부터 알고 있던 주제(수학 내용을 담고 있는 별도의 관련 놀이 활동, 게임, 퀴즈, 퍼즐, 인터넷사이트분석, 문제해결, 패러독스, 서적 소개 등)를 하나씩 창작/개작/수행한다. 자료, 정보를 단순히 소개하는 것보다는 가능한 한 재창조(recreation)가 이루어진 것이면 더 좋다. (참고문헌이나 웹주소의 출처는 필히 상세페이지까지 기록해야 함.)

재미와 열정(R:40%), 창의와 기발함(G:30%), 수학적 내용의 알참과 의미(B:30%)

3) 출결 및 시간 준수(20점- 기본점수) : 매 시간당 부재시-1점씩(하루 최대 2점, 단 결석 확인서를 제출하면 50%만 감점함, 4회 결석은 학칙에 따라 자동 F학점), 기타-0.5점씩 감점함. 과제물의 제출 시한도 참고한다. 수업 시작할 때 출석하였더라도 수업 중간에 강의실 밖으로 나간 사람이 불시에 점검할 때 不在時 결석으로 처리됨.(출석 점검을 위한 지정 좌석제 실시)

4) 기타(±a점) : 수업에의 적극적인 참여 태도(수업시간에 얌전히 자거나 엉뚱한 장난을 하는 사람, 휴대 전화를 사용하는 사람 등)을 살피며, 타인에게 도움이 되는 수업 관련 자료를 직접 제공하거나 On-Off라인으로 정보를 공유한 사람, 창의적인 교구제작, 기타 수업의 질적인 개선을 위한 아이디어를 제공한 사람에 대하여 추가 점수(보너스)를 부여한다. 결석하지 않았다고 무조건 F를 면하는 것은 아님. 다양한 가감(加減)점을 부여한다.(편차는 5점)

6. 주별 강의내용(레크리에이션수학, 송상헌)

* 주별 강의 내용은 학사 일정과 기후에 따른 야외학습의 변경, 학생의 참여, 반별 진도 등에 따라 변경될 수 있습니다.

회차	의 주 제	준비물	이미지	비고	평가항목
1	▶강좌안내 •교육과정의 목표 점검 •학습자 두뇌와 그 역할----- •레크수학의 사례(369내친구, 매지믹서)	모둠용:4인1조, 조별1세트 개인용: 1인당 1개 =====		다음 카페에 닉네임을 실명_소속 등록	수식만들기 수 감각 (유,용,독,정)
2	▶옷놀이 타임머신 •우리들만의 독특한 규칙, 방법으로	(모듬별) -정다면체,연산 주사위세트 -연결색큐브		재미있는 계산놀이/ 수식 만들기 전략게임	수 감각 전략적 사고 (수리/확률적 사고) 독창적인 아이디어 적극적인태도 협동 의사소통능력
3	▶머킨스 트랜스포머 •특명, 연속된 자리를 차지하라	-유성칼라펜(3색이상) -게임판			
4	▶탱그램이 탕탱 •탱그램을 활용한 놀이와 다각형 탐구 •탱그램 속의 수학적 원리	(개인별)탱그램 (교수용)자석탱그램		유사탱그램 만들기	도형의 길이와 넓이, 등적변 형, 변환
5	▶스핑크스퍼즐이 핑~핑! •스핑크스퍼즐을 활용한 놀이와 다각형 탐구	(개인별)스핑크스퍼즐 (모듬별)자석 시트지		스핑크스 골프게임	용어의 정의, 도형의 변환, 공간감각
6	▶야! 소풍이다.:자연 속의 수학 탐험 •자연/생활 속에 나타나는 수학적 비밀과 그 신 비 •프랙탈-생활 주변에서 찾아보는 황금비와 황금사 각형, 인체의 조화(Miss/Mr 선발대회) •종이 한 장으로 상상조일(거듭제곱의 비 밀), 큰 수와 작은 수의 비밀	(개인별) A_4, B_1 복사용지 (모듬별)전자계산기, 줄자 (교수용)여분의 줄자		생활 속의 수학 큰 수 문제해결	규칙성탐구 보다 간편하고 쉬운 방법 찾 기 문제해결과 문 제만들기, 문 제만들기, 정의, 기호화
7	▶야외활동 탐구 보고 및 토론 •연못(분수대)물의 무게, 팔각정과 운동장(야외음 식당)의 넓이, 강의동 두 지점의 최단거리, 벽돌의 개수 세기	(모듬별)활동보고서			
8	▶변형 루미큐브 •조각 추가, 그룹과 연속의 방법, 배판으 로 놀리기	(모듬별) -루미큐브 클래식 -루미큐브 디렉스, 듀오		새로운 게임 규칙 만들기	수 감각 전략적 판단(연속, 그룹 만들기) 모험심,도전감
9	▶ 하노이의 탑과 그 응용 • 64개의 원판을 옮겨라! • 바라문교의 현자되기 ▶ 변형 하노이탑(개별연구과제로 대체) •인접통행/일방통행/기둥이 여러 개일 때	(개인별)삼각 하노이탑 (원판이 7개 이상인 것)		MF소셜, 규칙과 표현의 아름다움	수감각,점화식, 구조 파악, 수량 화,일반화
10 (선택)	▶ NIM 게임과 그 변형:뇌색남을 이겨라 •What if? What if ~ not? 이라는 발 문기법에 따라 게임의 조건과 규칙, 결과를 변경 ▶페그퍼즐: •최소이동횟수 구하기 •삼각형을 역삼각형으로	(모듬별)연결 색큐브 (답은 바꾸니 있어야 함) (교수용)흑백 자석바둑돌 (모듬별)흑백 바둑돌(고 급)1통씩 색큐브로 대체 가능 4절지(16장) 유성칼라펜(4세트)		What if ~(not)? 최소이동횟수, 올기는 방법 수학적 사고	대수적사고, 조건변경, 문제만들기 대수적 사고, 구조 파악, 기호 화, 수량화, 일 반화,
11	▶폴리큐브(테트리스에서소마큐브를 넘어) •각종 조각 퍼즐의 발생 과정 이해 •펜토미노로 즐기는 게임(블로커스) •펜타큐브로 입체 구조물 만들기	(전체)블로커스 2세트 3D 블로커스 2세트 블로커스 트리곤 2세트		기존분류 게임전략과 최적화	분류,
12	▶축구공 위의 수학 •피버노바,팀가이스트,자블라니의 다른 점 •평면그래프 그리기	(모듬별) 폴리드론 입체도형 조립세트(주의: 가운데가 뚫린 것임, 바꾸 니에 든 것)		준정다면체 입체도형의 표현	오일러정리, 연 결상태
13	▶ 미션임파서블2. 가장 튼튼한 종이 구조물 만들기	(모듬별) 8절지 3장, 하드 보드지1장, 풀		Fun Fun Math 바쁘다 바빠!	수학적 구조, 재 료의 효율성, 견 고함과 세밀함
14 (개 별 연구)	▶레크리에이션을 넘어 리크리에이션으로 •주제탐구 : 학습용 교구 탐구(계속) •각종 교구 탐구/ 체험/ 업그레이드	기존의 교구 BOX들	기말과제 연구/ 발표	업그레이드 새로운 지식의 생산자	수행과정,관찰, RGB(지정의) 총체적 평가 의사소통,
15	* 과제 종합 소개 * 각종 자료/정보 공유, 개별/조별 작품 소개/발표	나도 창조가....			



Re-Creation Math RGB

(3가지 기본요소와 가치)

근거1. 이 시대에 요구되는 가치의 변화

20C말(부모/교사들의 학창시절) 21C초(오늘날의 학창시절)

노동/자본

열심(노력)

기술/정보

경제 성장의 기여도 변화

내용적 지식

↓

방법적 지식

↑

그러나?

안목 태도/의지

→ 내용적 지식 못지 않게

→ 과제를 해결하는 방법으로서의 **수학적 사고력**

→ 사물을 수학적으로 바라보려는 **안목과 태도/의지의 변화** (미래적 가치의 중대)

```

graph TD
    A[인식] --> B[내용면  
(개념, 원리)]
    A --> C[과정면  
(사고, 의사소통)]
    B --> D[수학의 기초/기본/발전적인  
기능과 개념, 원리, 법칙과  
이들 사이의 관계를 이해하  
는 능력을 기른다.]
    C --> E[수학적으로 사고하고  
의사소통하는 능력을  
기른다.]
    D --> F[태도면  
(인성, 태도)]
    E --> F
    G["(Attitude to Mathematics, 내용, 과정)"] --> F
    F --> H["→ (Mathematical, 탐험적, 주체적 Attitude)"]
    H --> I[수학의 가치를 이해하며,  
수학 학습자로서 바람직  
한 인성과 태도를 기른다.]
  
```

문제해결 성공요인

자원

발견습

통제 (자기조절) 신념체계

Metacognitive

ELECTION OF THE 2018 WINTER OLYMPIC GAMES HOST CITY

• 전통적 스포츠 강국
• 동부만 경협, 인물(카트리카 버트, 베켄바우어)
"Back to the roots of winter sports"
→ **전몽성**
But 실력(기득권)에 안주?

Annecy 2018
HAUTE-SAVOIE Mt Blanc

• 천혜의 자연조건
(몽블랑)
"Snow, Ice and You"
→ **조소성, 창익성**
But 개최 의지 약함

Pyongyang 2018
CANDIDATE CITY

• 포기하지 않는 집념/열정(조수)
• **최근 대외 성적**
• 개혁, 'New Horizons'
→ **열성, 품성**
개척의지, 기획활용, 최선

노동/자본 기술/정보 경제 성장의 기여도 변화 내용적 지식 방법적 지식

열심(노력) 그러나? 안목 태도/의지

- 내용적 지식 못지 않게
- 과제를 해결하는 방법으로서의 수학적 사고력
- 사물을 수학적으로 바라보려는 안목과 태도/의지의 변화 (미래적 가치의 종대)

창의적으로 생각하여 문제를 풀어나갈 때 더 많은 확신을 갖게 된다.

수학적 창의성 /수학적 사고

일반화 확장/응용

지식의 재생산과 창조

아하!

문제 이해

계획 수립

검증하기

변경

준비하기

경험하기

수학적 태도/의지

확장 및 추측을 요하는 과정

자기주도적 학습태도 형성

지식을 기반으로 한 창의성

많은 양의 지식 / 노력 못지 않게 <<새로운 과제/태도가 더 중요>>

The diagram consists of three overlapping circles. The top-left circle is blue and labeled '평균이상의 지적인 능력' (Average intellectual ability). The top-right circle is green and labeled '창의성' (Creativity). The bottom circle is red and labeled '과제집착력' (Task persistence). The intersections are labeled as follows: the intersection of the blue and green circles is labeled '수학적' (Mathematical); the intersection of the blue and red circles is labeled '창의성' (Creativity); the intersection of the green and red circles is labeled '(精, 德, 창조)' (Spirit, Virtue, Creation); the intersection of all three circles is labeled '방법적 사고' (Methodical thinking) and '발견술' (Discovery method). Below the diagram, there are three main labels: 'Cast of Mind' (under the blue circle), '수학적 태도/의지/안목' (Mathematical attitude/will/vision) (under the green circle), and '통제 (자기조절) (意, 體)' (Control (self-regulation) (Intention, Body)) (under the red circle). To the right of the diagram, there are three more labels: '창의성' (Creativity), '(精, 德, 창조)' (Spirit, Virtue, Creation), and '신념체계' (Belief system).

고도의 수학

수학적 재도/의지/원목

지식 (知, 智)
내용적 사고
자원
MATH

창의성 (精, 德, 창조)
방법적 사고
발견술
CREATION

신념체계 (意 體)

통제 (자기조절)

Re-

비례가치 (B)
최소가치 (G)
비례가치 (B)

Cast of Mind

01차시: 레크리에이션 수학으로의 초대

학습 안내

레크리에이션 활동을 통한 리크리에이션 수학 체험

Chapter 1. Recreation 수학으로 초대

안녕하십니까? 반갑습니다.
저는 경인교육대학교 수학교육과 송상현교수입니다. 제가 오프라인에서 10여 년간 '레크리에이션 활동을 통한 리크리에이션 수학'이라는 주제로 '레크리에이션 수학'이라는 강좌를 진행하면서 수강생으로부터 호평을 받았습니다. 그 속에서 세상과 수학을 바라보는 제 자신의 관점이 바뀌고 성격도 적극적으로 변하면서 사고는 더욱 창조적으로 변화되어가고 있습니다.
이러한 경험과 증거를 보다 많은 분들과 함께 나누면서 삶의 현장, 교육의 현장을 함께 변화시켜 보려는 소망에서 이 온라인 강좌를 개설하게 되었습니다.
이제 우리를 통해 세상과 교실이 변화될 것을 함께 꿈꾸면서, 자~ 떠나 볼까요?

NEXT 버튼을 클릭해주세요.

00:53 / 00:53

on script

01/16

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. 레크리에이션의 용어와 의미를 바르게 이해하고 사용할 수 있게 된다.
2. 레크리에이션 수학의 의미와 가치를 알고, 더 나아가 리-크리에이션 수학에 대한 궁금증과 기대감을 갖게 된다.



학습 내용

1. 레크리에이션의 의미

레크리에이션
(recreation)

→

'개인의 몸과 마음을 상쾌하게 하는 방식으로 시간을 사용하는 것'으로 단순한 휴식이나 **여가 (레저, leisure)** 보다 적극적으로 기분을 푸는 활동을 말함.

레크리에이션
(recreation)

↘

- **Recreation** (레크리에이션, 액센트가 뒤에 있음)
(뜻) 오락, 위안, 취미, 유희, 휴식, 기분전환, 원기회복
- **Ré-creation** (라-크리에이션, 액센트가 앞에 있음)
(뜻) 재창조, 개조, 재생, 능력의 부활, 새롭게 함

주 의

'레크레이션'은 잘못된 표현이고 잘못된 발음임.

해 설

- 레크리에이션은 회복 (recovery), 복구 (restoration), 새롭게 함 (making anew)이란 뜻을 지닌 라틴어 레크레아~싸오 (Recreatio)에서 유래
- 문예부흥기에 인간 개조의 필요성을 부르짖던 인문주의자들에 의해 처음 사용
- 1911년 미국의 레크리에이션 운동을 장려하던 한 단체의 명칭으로 사용되다가 1932년 LA에서 열린 제1회 레크리에이션대회 이후 국제적으로 사용되면서부터 오늘날에는 고유한 용어로 정착

핵심

Recreation을 통해 Re-creation이 되어야만 참다운 레크리에이션이라고 말함.

2. Re-Creation Math란?

- (좁은 의미) Recreational Mathematics(레크리에이션 수학): 아동이 흥미를 가지고 수학 학습에 적극적으로 참여토록 하기 위해 레크리에이션의 방법적 요소를 수학에 접목한 역사적 산출물(내용 수학) (예) 마방진, 수도쿠, 하노이탑 등의 수리퍼즐이나 탱그램, 소마큐브, NIM 게임 등

- (중간적 의미) Mathematical Recreation: 레크리에이션(활동)을 활용하되 수학적인 방법을 가미한 구성적 사고 활동(수학적 방법) (예) 성냥개비퍼즐, 매듭풀기(실뜨기), 빙고게임, 윷놀이, 3-6-9게임, 배스킨라빈스31, 칠교로 모양 만들기, 소마큐브로 구조물 만들기 등
- (구성/종합적 의미) Re-Creation Mathematics(리-크리에이션 수학): 전통적인 레크리에이션 수학에다 교육적인 의미와 가치를 고려하면서 보다 창조적이고 능동적으로 재구성, 재창조해 나가는 모든 수학적 사고 활동과 그 산물(방법과 내용의 통합 수학) (예) 주사위윷놀이, 변형 하노이탑, 유사탱그램, 변형 소마큐브

3. Re-Creation Math를 위한 이론적 배경

가. 구성주의와 사고 활동의 내면화, 그리고 수학화

①**구성주의(constructivism)**에 따르면, ‘앎이란 주체(학습자)가 객체(수학)을 능동적으로 구성하는 것’이므로 아동의 구체적인 활동 경험을 바탕으로 사고 조작이 가능하도록 해야 함. 그러나 활동 후에는 필히 ‘사고의 내면화’까지 강조해야 함.

②**피아제(J. Piaget)**에 따르면, 사고 기능의 발달은 환경과의 상호작용(동화와 조절)을 통해 일어나므로 지나친 형식화 이전에 아동의 발달 단계에 맞는 적절한 경험을 제공하여 호기심과 학습동기를 유발시켜야 함.

③**프로이덴탈(H. Freudenthal)**은 ‘실행수학’, 곧 완성된 수학체계 이전에 인간 활동으로서의 수학을 강조하면서, ‘현상을 수학적 수단에 의해서 조직하는 과정’을 ‘수학화(mathematizing)’라는 말로 요약하고 있음.

=> 이렇게 함으로써 학습 활동의 긍정적인 태도가 길러지고 한 단계 더 높은 수준의 사고를 유발하면서 수학적 사고의 수준이 상승됨.

나. 디엔에스(Z.P. Dienes)의 수학놀이 학습을 위한 6단계와 4가지 원리

<4가지 원리>

- ① 역동성의 원리(개념발생을 유발하는 놀이나 게임의 경험)
- ② 구성성의 원리(분석이전에 구성이 먼저)
- ③ 수학적 다양성의 원리(변화시킬 수 있는 것은 다양하게 변화시켜 추상화, 일반화 유도)
- ④ 지각적 다양성의 원리(개념의 본질을 파손시키지 않는 범위에서 다양한 지각적 재료 제공)

<놀이 학습의 6단계> (웹사이트 <http://www.zoltandienes.com> 참조)

- ① 자유놀이단계 ② 게임단계 ③ 공통성 탐구단계
- ④ 표현/표상단계 ⑤ 기호화단계 ⑥ 형식화 단계



다. 재구성 및 재창조의 전략: What if ~ (not)? 기법

단계	수준	문제제기활동
0단계	출발점선택하기	문제의 조건을 바꾸기 위한 요소 파악
1단계	속성열거하기	새로운 문제의 제기를 촉진하는 하나의 수학 이론이나 규칙이 주어지면 그것의 속성을 적어볼 것
2단계	속성부정하기	전 단계에서 열거한 요소나 속성의 일부에 대해 '만약 그렇지 않다면 어떨까?' 하고 의문을 가져보기
3단계	발문 또는 문제제기하기	전 단계에서의 의문을 기초로 새로운 문제를 만들기
4단계	문제 분석하기	기존의 문제상황을 보충할 수 있는 광범위하고 다양한 상황을 고려하여 새로운 문제를 분석하거나 해 구하기

① '문제 제기' 또는 '문제 설정'이라고 불리는 이 전략은 주어진 문제의 해결 과정에서 새로운 문제를 제기 하거나, 해결 후에 새로운 문제를 만들어 보도록 하는 교수-학습방법. Brown & Walter는 체계적으로 문제를 만드는 방법으로 다음과 같은 'what if ~(not)?' 기법의 4단계를 설정함.

② What if ~ (not)? 기법을 이용한 문제제기의 전략

- 자유로우며 폭 넓고 다양하게 생각할 것
- 자기 스스로도 문제를 만들 수 있다는 자신을 갖고 여러모로 시행착오를 할 것
- 지금까지 학습한 경험 및 지식에서 얻은 유사한 문제 등과 연결시킬 것
- 많은 의문을 품을 것
- 자신이 생각한 것을 모두 기록할 것
- 새롭고 발전적인 문제를 만들도록 노력할 것
- 상황 및 속성과 숫자 등을 변경하고 역으로도 생각해 볼 것
- 자기가 풀 수 있는 문제를 만들 것
- 다른 도형을 생각해 볼 것
- 차원을 확대 및 축소할 것
- 다른 단위 및 타 교과와 연결지어 볼 것

4. Re-Creation Math의 교육적 가치

(인지/사고적 측면)

- 수학적인 기초지식과 기능을 강화하고 더 나아가 개념획득과 발달에 도움을 줌.
- 개념학습과 응용을 위한 다양한 수학교수전략을 가능하게 함.

(정의/태도적인 측면)

- 딱딱하고 재미없다는 수학 교과와 선입견을 벗겨 학생들의 흥미와 욕구를 충족시키고 학습동기를 유발/강화할 수 있음.
- 학습내용에 대한 다양한 경험을 통하여 수학적 개념을 실생활과 연결지어보거나 새로운 수학을 만들어 보려는 의지 및 수학적 성향의 계발에 도움이 됨.

(의지/성향적인 측면)

- 학습내용에 대한 다양한 경험을 통하여 수학적 개념을 실생활과 연결지어보려는 의지와 수학적 성향의 계발에 도움이 됨.

==> 결국 수학은 재미있고 나의 생각은 창조적이라는 경험과 자신감, 도전감을 제공

5. Re-Creation Math를 통한 수학 학습의 방향

- 이미 알고 있는 것이나 유사한 것으로 바꾸어 생각해 보기
- 또 다른 풀이나 대안을 찾아보기
- 알고 있는 문제라 할지라도 그 속에서 원리를 찾아내기
- 해결한 문제를 한 단계 더 높은 수준으로 적용해 보기
- 조건이나 규칙을 바꾸어 새로운 문제를 만들어 보기
- 모르는 문제는 며칠이 걸려서라도 끝까지 풀고야말겠다는 집념 갖기
- 스스로 정답을 얻어냈을 때의 감동 소유하기(Alleh, Wonderful!)

6. Re-Creation Math의 예 :

가. 삼육구 네친구

(기본 삼육구 게임)

흔히 잘 알고 있는 '삼육구 게임'은 여러 사람이 원형으로 돌아가면서 1부터 수를 하나씩 차례대로 부르되 3, 6, 9라는 숫자가 들어있는 수에는 그 수를 부르지 않고 3, 6, 9 숫자의 개수만큼 손뼉을 치면서 틀리는 사람이 나올 때까지 이어가는 수 세기 게임입니다.(예를 들어, 30에는 한 번만 쳐도 되지만 33에는 손뼉을 두 번 쳐야 합니다.)

(What if ~not?) 그런데 왜 3, 6, 9라는 숫자에만 손뼉을 쳐야 할까요? 다른 수를 고르라면?

(Re-Creation) 2, 5, 8이나 1, 3, 7 등도 가능합니다. 그런데 나는 4, 7, 9를 골랐습니다. 그 이유는 3-6-9는 손뼉을 치는 간격이 3,3,3,4, 3,3,3,4의 규칙이 있는데 이 경우 3명이 게임을 할 때는 한 사람이 계속 반복하여 손뼉을 쳐야 하는 단조로운 게임이 되었습니다. 그래서 간격이 일정하지 않는 수를 고르다 보니 4-7-9는 간격이 4,3,2,5, 4,3,2,5으로 간격이 일정하지는 않지만 전체적으로는 패턴이 있는 수입니다.

(What if ~?) 이 새로운 숫자 부르기 게임은 뭐라고 이름을 붙일까요?

(Re-Creation) 4, 7, 9는 넷칠구로서 '네 친구'라는 이름을 가지므로 '사칠구 네 친구'라고 합시다.

(What if ~not?) 왜 손뼉만 쳐야 하나요?

(Re-Creation) 음, 발을 구르는 방법도 있으니 4, 7, 9에는 발을 구르도록 합시다.

(What if ~not?) 삼육구와 사칠구를 결합하면 어떨까요?

(Re-Creation) 좋은 생각입니다. 그러면 게임의 이름을 '삼육구 네 친구'로 하고 3, 6, 9에는 손뼉치고, 4, 7, 9에는 발을 구르면서 공통으로 들어가는 9와 같은 수에는 손뼉과 발을 동시에 구르면 되겠군요. 게임 시작!

★What if ~not?을 활용한

- 레크리에이션 수학의 예 : 삼육구 네친구

삼육구 게임

What if ~not?

What if ~

What if ~not?

What if ~

- What if ~not? 질문
 - 그런데 왜 3, 6, 9라는 숫자에만 손뼉을 쳐야 할까요?
 - 다른 수를 고르라면?
- Re-Creation
 - 4, 7, 9를 선택
 - 3, 6, 9는 손뼉을 치는 간격이 규칙적이어서, 3명이 게임을 할 때는 한 사람이 반복하여 손뼉을 쳐야 함
 - 4, 7, 9는 간격이 넷, 셋, 둘, 다섯으로 간격이 일정하지는 않지만 전체적으로는 패턴이 있는 수



아래의 영상출처: YTN 수다학 리크리에이션 수학 (2014년 12월 1일 방송)

네이버캐스트 <http://tvcast.naver.com/v/243901> 다음 tv팟 (<http://tv팟.daum.net/mypot/View.do?clipid=63894775&ownerid=1kFWgJA3wd0>)



수학재창조의 3가지 기본

“~해보려는” 태도(의지)

“What if (not)~?” 질문방법

“여기도 수학이!” 내용요소

삼육구 게임

- 기본 삼육구 게임
 - 여러 사람이 원형으로 돌아가면서 1부터 수를 하나씩 부름
 - 3, 6, 9라는 숫자가 들어있는 수에는 3, 6, 9 숫자의 개수만큼 손뼉을 칩
 - 틀리는 사람이 나올 때까지 이어가는 수 세기 게임
 - 300에는 한 번만 쳐도 되지만 330에는 손뼉을 두 번 쳐야 됨

왜 3, 6, 9에만? 다른 수는?
그렇다면 4, 7, 9에도?
왜 손뼉만 치지?
발을 구르면 안될까?
둘을 결합해 보면 안될까?
삼육구 내친구!



Re-Creation Math

수학 재창조의 사례

배스킨라빈스 31 ← NIM게임

- 1) 여러 사람이 둘러 앉아
- 2) 1~3개의 수를 불러
- 3) 31을 가져가는 사람이
- 4) 지는 게임

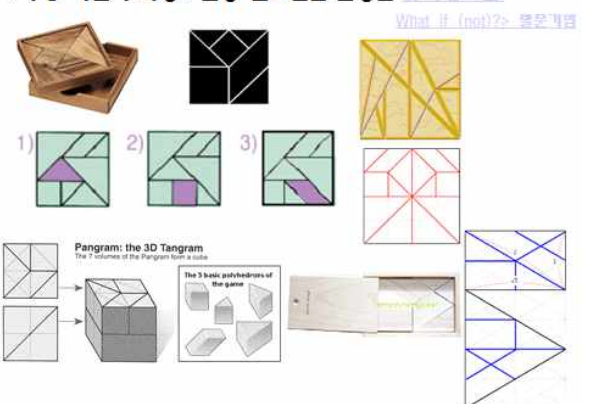
1) 두 사람이 번갈아 1부터 시작하여
 $N = (k+1)Q + r$ 에서
 $r > 0$ 이면 선수필승
 $r = 0$ 이면 선수필패
 (상대방이 먼저 하도록)

2) 1~2(k)개의 수를 불러

3) 21(N)을 가져가는 사람이

4) 이기는 NIM게임

<사례: 퍼즐의 확장> 전통 칠교판을 변형한 유색칠교판
 What if (not)? 질문방법





Banana, Sake, Welsh onion, Tako iuka, Ice

7. 「Recreation 활동을 통한 Re-Creation Math 교구 시리즈」 소개

경인교육대학교 수학생재교육연구소 발간(예정)

송성현교수의 Recreation 활동을 통한 Re-Creation Math 교육 시리즈 ① 주사위 윷놀이 연세대학교 수학교육연구소 Yonsei University Institute for Gifted Education in Mathematics	송성현교수의 Recreation 활동을 통한 Re-Creation Math 교육 시리즈 ② 머긴스 트랜스포머99 연세대학교 수학교육연구소 Yonsei University Institute for Gifted Education in Mathematics
송성현교수의 Recreation 활동을 통한 Re-Creation Math 교육 시리즈 ③ 스핑크스퍼즐 골프게임(Sphinx Puzzle Golf Game) -전통적인 정사각형 텅그를 발전시켜 골프 게임과 접목한 새로운 정삼각형 칠교놀이- 5(1) Par (Par) 5(0) 버디 (Birdie) 연세대학교 수학교육연구소 Yonsei University Institute for Gifted Education in Mathematics	송성현교수의 Recreation 활동을 통한 Re-Creation Math 교육 시리즈 ④ 폴리큐브(Poly Cubes) -5개 41종(200개)의 큐브에 테트라이브, 펜타큐브, 헥사큐브, 일곱큐브를 모두 포함- 연세대학교 수학교육연구소 Yonsei University Institute for Gifted Education in Mathematics

 경인교육대학교 수학영재교육연구소
Institute for Gifted Education in Mathematics

[주 소] (430-804) 경기도 안양시 만안구 경인교대길 353(석수동6-8) 경인교육대학교자연과학관 605호. [연락처] (031)470-6371

[개발자] 송상현(경인교육대학교 수학적재교육연구소장, shsong@ginue.ac.kr)

[홈페이지] <http://sub.ginue.ac.kr/igem>

[제작원] 플랜우드

MADE IN VIETNAM

[디 자 인] 아트미디어

교구 구입처: mathgifted@ginue.ac.kr 아래 카페에 신청서 있음.

송하년의 수학교실

cafe.daum.net/sigmathclass

최신글 보기 | 인기글 보기 | 이미지 보기 | 동영상 보기

동영상 (총6)
 카페지기 송하년
 회원수 4,482
 방문수 1 댓글됨

▼ 내 정보

카페 글쓰기

관리 | 위메가

▼ 최신글 보기

교내외의 강의자료로

Re-Creation Math 강의자료

교과교육심사(수학과2학년)
 영백교육심사자료실
 공돌 자료실(수업 자료나 할 일)

학원의 수업정보(강의비, 과
 재등록비, 등록금 등

11-1학기 리크리에이션수학
 (대학원)

11-1학기(수학영재교육원이
 배(대학원))

11-1학기(수학영재교육이학부
 4)

스펅크스퍼를 견적서 및 구입 신청서

작(구입)일자: _____

사업장소재지 마포구 도화동 마포트라팔라사동 2105호

귀중 상 호 플랜우드 (PLAIN WOOD)

사업자등록번호 214-07-22295

대표자 성명 김 형 진 (인)

업 종 도매(무역)

전화 번호 TEL (02) 575-3278 FAX: (02) 572-3924

(본 견적의 유효기간은 발행일로부터 30일로 합니다.)

번호	재 품 명	수량	단 가	금 액	비 고
1	스펅크스퍼를 계	20	20,000	₩ 400,000	
2	VAT(포함시)			₩ 40,000	세금계산서발행시
3	배송료				복수 주문시 면제
합 계				₩ 440,000	

E-mail로 주당할 곳: mathsigfed@sinue.ac.kr ifill@hanmail.net

업금하실 곳(연락처): 국민은행 456701-01-080380 (김형진, 010-8701-3221)

* 조건 및 특이사항: 세금계산서 발행 요청시 별도 연락 요함,
 * 제품은 경인교육대학교 수학영재교육연구소에서 직접 발송합니다.

주문자 기록사항:

성명(가관명): _____

담당자 연락처: _____

긴급연락처(휴대용): _____

제품을 받으실 곳: _____

우편번호: _____

납기요청일자: _____

10.09.28 127

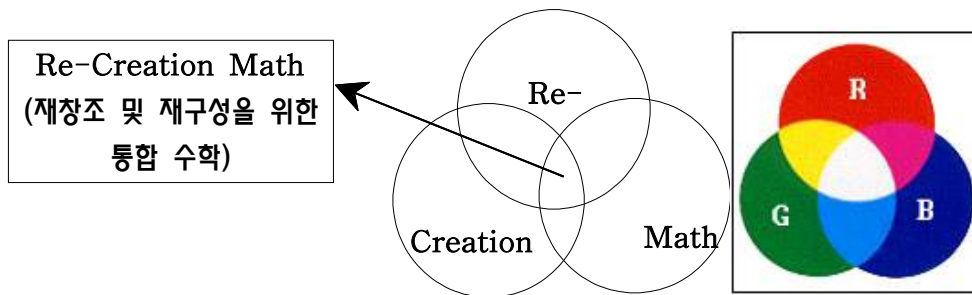
<http://cafe.daum.net/ginuemathclass> 가입하려면 닉네임을 '실명_소속'으로 (예)송상현_수학16



학습 정리

1. 본래 레크리에이션(Recreation, 오락, 위안, 취미, 유희, 휴식, 기분전환, 원기회복)의 의미에는 리크리에이션(Ré-creation, 재창조, 개조, 재생, 능력의 부활, 새롭게 함)의 의미도 포함하고 있다.
2. 레크리에이션 수학과 리-크리에이션 수학의 관계
 - (좁은 의미) Recreational Mathematics(레크리에이션 수학): 아동이 흥미를 가지고 수학 학습에 적극적으로 참여토록 하기 위해 레크리에이션의 방법적 요소를 수학에 접목(내용 수학)
 - (중간적 의미) Mathematical Recreation & Mathematical Re-Creation: 레크리에이션이라는 활동 중심을 넘어 수학적인 재창조의 방법을 가미한 모든 구성적 사고 활동(수학적 방법)
 - (구성/종합적 의미) Re-creation Mathematics(리-크리에이션 수학): 전통적인 레크리에이션 수학에다 교육적인 의미와 가치를 고려하면서 보다 창조적이고 능동적으로 재구성해 가는 모든 수학적 사고 활동과 그 산물(방법과 내용의 통합, 재창조한 수학)
 - 본 강좌에서는 리-크리에이션 수학 강조하면서도 필요시에는 이 둘을 구분하기도 하겠지만, 레크리에이션(recreation)의 본래적인 의미가 포함된 경우에는 통칭하여 '레크리에이션수학'이라 부르기로 함.

==> RGB의 각 성격에 해당하는 '창조'와 '레크리에이션', '수학'이라는 기본 3원색이 모여 리-크리에이션 수학이라는 독특한 영역이 완성되는 그 날을 기대



3. 레크리에이션 수학의 교육적 가치
 - (인지/사고적 측면)
 - 수학의 기초 지식과 기능을 강화하고 더 나아가 개념획득과 발달에 도움을 줌.
 - 개념학습과 응용을 위한 다양한 수학 교수 전략을 가능하게 함.
 - (정의/태도적인 측면)
 - 딱딱하고 재미없다는 수학 교과에 선입견을 벗겨 학생들의 흥미와 욕구를 충족시키고 학습동기를 유발/강화할 수 있음.
 - 일상생활의 활동을 수학적으로 생각하도록 하는 수학적 태도를 신장시켜 창의적인 문제해결을 고무함.
 - (의지/성향적인 측면)
 - 학습내용에 대한 다양한 경험을 통하여 수학적 개념을 실생활과 연결지어보거나 새로운 수학을 만들어 보려는 의지 및 수학적 성향의 계발에 도움이 됨.
4. 참고 문헌/참고사이트
 - 송상현(1998). 초등학생들을 위한 레크리에이션 활동을 통한 Re-Creation수학의 가능성 탐색. 대한수학교육학회 수학교육연구발표회 논문집. <열린 수학교육의 이론과 실제>, 419-430.

학습 평가

1. 다음 중 레크리에이션(Recreation)에 관한 설명으로 잘못 된 것을 고르시오.

- ① 레크리에이션은 단순한 휴식이나 오락을 넘어 회복(recovery), 복구(restoration), 새롭게 함(making anew)을 추구한다.
- ② 문예부흥기에 인간 개조의 필요성을 부르짖던 인문주의자들에 의해 처음 사용되었다.
- ③ Ré-creation이라고 읽을 수도 있으므로 재창조, 재생, 부활의 개념도 포함하고 있다.
- ④ 레크리에이션은 라틴어 레크레아~싸오(Recreatio)에서 유래하였다.
- ⑤ 우리나라에서는 '레크레이션'이라고 말한다.

2. 리-크리에이션수학에 대한 설명 중 잘못 된 것을 고르시오.

- ① 리-크리에이션 수학이란 레크리에이션(활동)을 통한 Re-Creation 수학을 추구하는 모든 수학적 내용과 사고활동을 통칭하는 말이다.
- ② 디엔에스(Dienes)가 말하는 구성성의 원리는 원리의 종합이전에 활동을 통한 구체적인 분석이 우선되어야 함을 강조한 것이다.
- ③ 리-크리에이션 수학에 적합한 대표적인 이론의 예로는 경험적 활동이후 사고활동의 내면화까지 포함하는 구성주의와 수학적 활동을 강조하는 수학화를 들 수 있다.
- ④ 디엔에스(Dienes)의 수학놀이 학습 6단계는 자유놀이단계, 게임단계, 공통성탐구단계, 기호화단계, 형식화단계, 재구성단계이다.
- ⑤ 리-크리에이션 수학을 위해서는 아동이 당면하는 생활 주변의 물리적 현상뿐만 아니라 수학 그 자체의 이론까지도 포함하는 현상(reality)을 수학적 수단에 의해서 조직하는 과정을 포함해야 한다.

3. 3-6-9에는 손뼉을 치고 4-7-9에는 발을 구르는 '삼육구 내친구' 게임을 한다고 할 때 1부터 100까지의 수에서 손뼉 치기와 발 구르기를 동시에 해야 하는 수는 몇 개인지 고르시오.

- ① 18개 ② 25개 ③ 27개 ④ 30개 ⑤ 32개

A large rectangular area with horizontal dotted lines for handwriting practice. In the top right corner, there is a blue cloud-shaped tag with a white outline and a white string tied around its top. The word "MEMO" is written in white capital letters on the tag.

02차시: 주사위 윷놀이

학습 안내

본 활동은 첫 번째 체험활동으로 전통 윷놀이를 변형해 만든 ‘주사위 윷놀이’입니다. 주사위 윷놀이는 전통적인 윷놀이의 규칙과 비슷하지만 윷가락이나 판의 모양, 말의 개수, 말을 움직이는 방법, 게임의 승패 결정 방법 등을 다양하게 바꾸어 볼 수 있는 창의적인 놀이입니다. 윷가락 대신 주사위를 던지고, 둘 또는 세 주사위 눈의 합, 차 또는 곱만큼 말판 위의 말을 움직이면서 목표지점으로 빨리 나오든지 큰 점수로 나오면 승리하는 전략게임입니다. 놀이의 조건이나 규칙, 승리방식을 여러 가지 방식으로 변경하면서 자신의 수준에 맞게 창의적인 놀이로 재구성해 보시기 바랍니다.

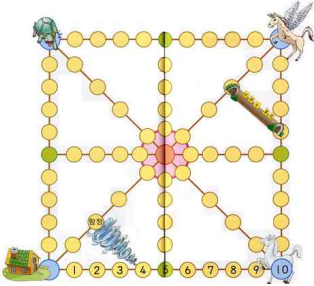
이 주사위 윷놀이의 사례를 통해 생활 속의 놀이 활동에 들어있는 수학적 사실이나 규칙을 이해하고, 그것을 변형하여 수리적인 Re-Creation을 해 보려는 수리적인 마음가짐(Mathematical Attitude)이 생겨나기를 희망합니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

- 1.(지식과 이해의 측면) 주사위 윷놀이의 게임 규칙을 이해하고 확률(가능성) 판단을 이용하여 게임의 승리전략을 찾을 수 있게 됩니다.
- 2.(기능적인 측면) 경우의 수와 가르기/모으기를 이용한 두 수(또는 세 수)의 합과 차, 곱, 그리고 나눗셈에서의 몫과 나머지 등을 연습하게 됩니다.
- 3.(수학적 사고의 측면) ‘What if not?’와 ‘What if ~not?’이라는 전략을 활용한 창의적인 윷놀이 게임을 만들고 평가할 수 있게 됩니다.
- 4.(태도와 의지의 측면) 게임의 규칙을 통해 준법정신의 필요성을 느끼고 승리전략이나 새로운 수학 문제를 찾아보려는 태도를 갖게 됩니다.

[준비물, 4인 모듬별]

			
주사위 윷놀이 활동판 (변형게임판 추가)	윷가락	정다면체 주사위 3개, 연산 주사위1개	말(색큐브) 3색 3개씩



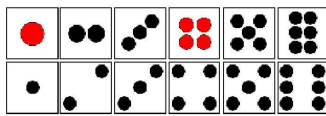
학습 내용

1. 주사위의 어원과 유래

인류 역사에 언제 주사위(dice)가 처음 등장했는지는 확실하지 않지만 이집트에서는 B.C. 10C 이전에 상아나 동물의 뼈로 된 주사위가 있었다. 주사위는 발굽이 있는 동물의 관절 뼈(거의 정사면체 모양?)로부터 발전한 것으로 추정되며, 역사시대 이전부터 사용되고 있었다. 주사위놀이는 역사적으로 다양한 데에 사용되었다. B.C. 49년에 율리우스 카이사르가 루비콘 강을 건너 로마로 진격할때 "주사위는 던져졌다."라고 선언한 이야기는 유명하다. 주사위는 여러 나라의 전통놀이에 사용되고 있는데, 한국에서는 승경도 놀이에 윤목이라는 이름의 5개의 면을 가진 주사위가 사용되었으며, 정6면체 주사위를 쓰는 쌍륙이라는 놀이가 대중화되기도 하였다. 이외에도 주사위만을 가지고 도박을 하기도 하였으며, 확률론 자체가 드메레가 파스칼에게 주사위 놀이에서 돈을 잃자 이에 대해 질문에서 시작된 이야기는 유명하다.



여러 가지 모양의 주사위



주사위의 눈
아시아형(상)과 유럽형(하)



정다면체 주사위



연산/부호 주사위

<http://ko.wikibooks.org/wiki/%EC%A3%BC%EC%82%AC%EC%9C%84>

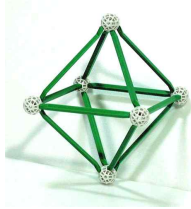
★[탐구활동] 주사위의 눈을 배열하고 정사면체 주사위의 눈을 읽는 방법

★[학습활동] 두(세) 주사위의 합과 차를 통한 가르기와 모으기

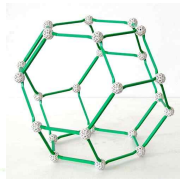
2. 14면체 목제주령구

통일신라 시대(7-9세기)의 유물로 안압지에서 출토된 이 주사위는 6개의 정사각형인 면과 8개의 육각형인 면을 가지고 있는데, 나무로 만든(木製) 술 먹을 때 놀던 주사위(酒令具)라 해서 목제주령구라고 이름을 지었다. 쉽게 말하면 신라 시대 귀족들이 술좌석 등 여러 사람이 모인 흥겨운 자리에서 주사위를 던져 나오는 내용을 별칙으로 하는 '놀이용 주사위'라 할 수 있다. 신라인들의 창의성이 돋보이는 목제 주령구는 어떻게 만들었을까 수학적으로 접근해보자.

같은 크기의 정삼각형 8개를 연결하여 만든 정팔면체를 이용하여 만들 수 있다. 정팔면체의 각 모서리를 3등분하여 꼭지점 부분을 잘라내면 정팔면체의 꼭지점 6개가 정사각형 모양으로, 정팔면체의 면 8개가 육각형 모양으로 바뀌어 14면체(육팔면체) 목제 주령구가 만들어진다. 전개도를 그려 직접 만들 수도 있다.



정팔면체



깎은 정팔면체(1)



깎은 정팔면체(2)



목제주령구



깎은정팔면체(3)



축구공

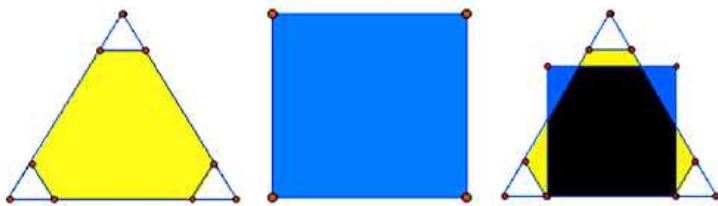
◆6개의 정사각형인 면에 쓰인 벌칙.

- 1.금성작무(禁聲作舞):소리없이 춤추기
- 2.중인타비(衆人打鼻):여러 사람 코 두드리기
- 3.음진대소(飲盡大笑):술 한잔 다 마시고 크게 웃기
- 4.삼잔일거(三盞一去):한번에 술 석 잔 마시기
- 5.유범공과(有犯空過):덤벼드는 사람이 나 별난 짓으로 골려도 가만히 있기
- 6.자창자음(自唱自飲):스스로 노래 부르고 마시기

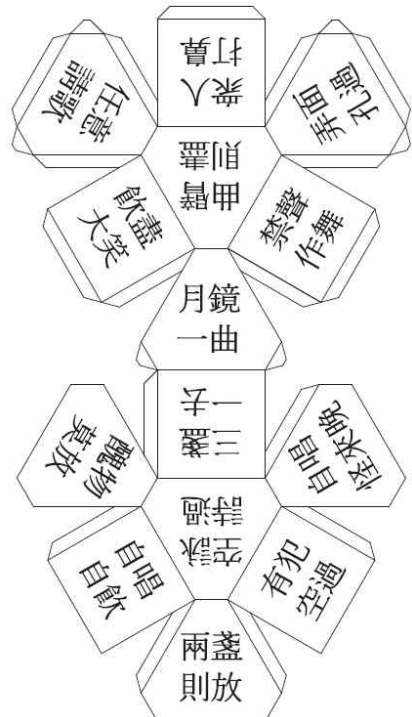
◆8개의 육각형인 면에 쓰인 벌칙

- 7.곡비즉진(曲臂則盡):팔뚝을 구부려 다 마시기
- 8.농면공과(弄面孔過):얼굴 간질러도 꼼짝 안기
- 9.임의청가(任意請歌):누구에게 마음대로 노래시키기
- 10.월경일곡(月鏡一曲):달(여자)관련 한 곡조 부르기
- 11.공영시과(空詠詩過):시 한 수 읊기
- 12.양잔즉방(兩盞則放):술 두 잔이면 즉각 마시기
- 13.추물막방(醜物莫放):더러워도 버리지 않기
- 14.자창괴래만 (自唱怪來晩):스스로 괴래만(밤 늦게 곤드레 되어 들어오는 모양새)으로 부르기

실물 크기의 목제 주령구를 구성하는 육각형과 정사각형을 직접 만들어 실험해 보자. 한 변의 길이가 4.1cm인 정삼각형의 각 꼭지점에서 0.8cm를 잘라내면 긴 변이 2.5cm인 육각형 모양을 만들 수 있다. 한 변의 길이가 2.5cm인 정사각형을 만들어 둘을 포개어 보라. 둘의 넓이가 거의 같음을 알 수 있다.(실제 계산에 의하면 육각형 모양의 넓이가 정사각형 모양의 넓이보다 약간 크다) 결국 14개의 면의 넓이가 거의 같기 때문에 목제 주령구의 각 면이 나올 확률은 모두 14분의 1이 된다.



넓이가 일정하도록 목제주령구를 깎는 정도



목제주령구 전개도



3. 윷놀이 말의 종류와 나을 확률 구하기

종류	모양	상징물	가지 수	확률
도				
개				
걸				
윷				
모				
합계				

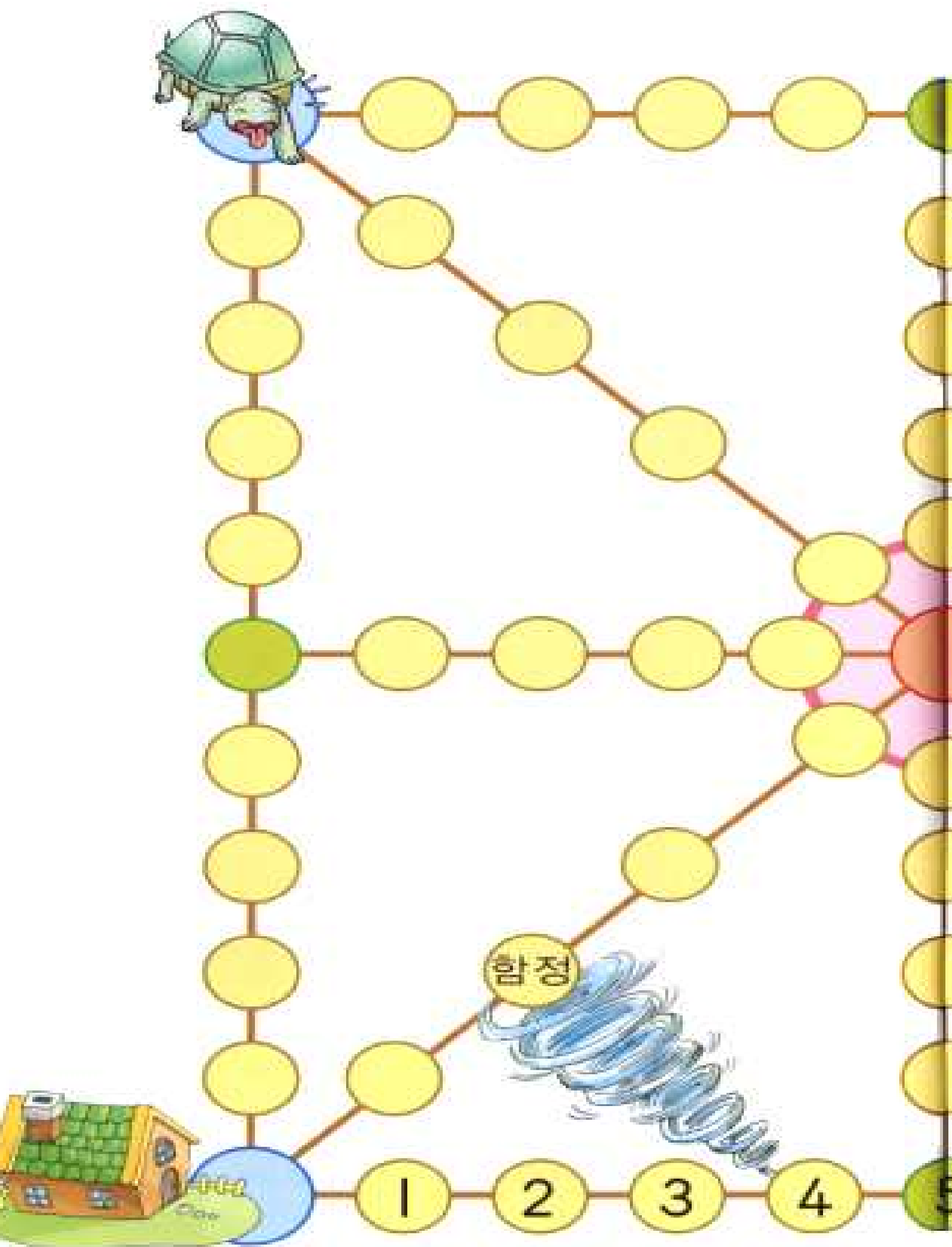
4. (활용) 주사위 윷놀이와 변형

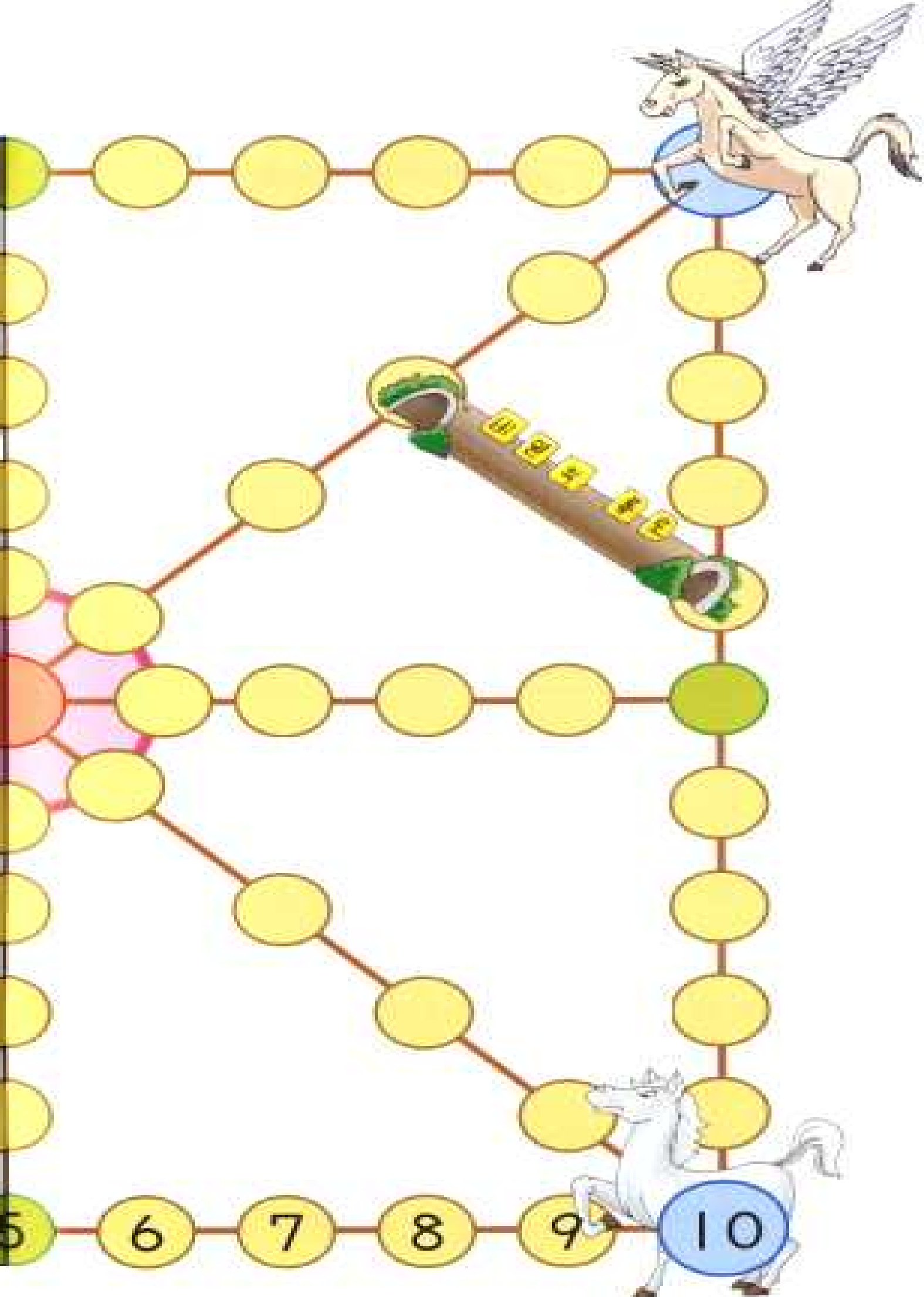
【게임방법】

- 인원을 두 팀으로 나누고 팀에서 공용으로 사용할 말판과 주사위 2개, 그리고 팀별 3개씩의 말을 준비한다.
- 주사위를 하나 던져 먼저 시작할 팀을 정하고, 두 팀이 번갈아가면서 **두 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수를 더한 수만큼** 말을 이동한다.
- 두 주사위의 눈의 수가 똑같이 나오는 경우(**더블**)는 1회 더 던질 수 있다.
- 길을 따라 말을 옮겨가다가 **갈림길에 멈추었을 때만** 지름길로 방향을 바꿀 수 있고 지름길에서 먼 길로 돌아갈 수는 없다.
- 상대방의 말을 잡게 되면 주사위를 1회 더 던질 수 있는 보너스를 얻는다. 그러나 더블로 말을 잡게 되면 다시 던지는 경우는 1회만 허용한다. 주어진 보너스 횟수를 모두 사용한 다음 한꺼번에 말을 옮겨도 된다.
- 같은 팀의 말은 여러 개 겹쳐(업어) 갈 수도 있다.
- 정한 개수의 말(3개)이 먼저 나오는 팀이 이긴다.

※ 기본 주사위 윷놀이의 여러 가지 조건들을 하나씩 바꿔 봅시다.

- 왜 덧셈만 하지? 뺄셈이 더 유리할 때는 뺄셈도 할 수 있도록 하면 어떨까?
(예) 주사위의 눈이 5와 3이 나왔을 때: $5+3=8$ 또는 $5-3=2$ 에서 자신이 유리한 칸 수만큼 움직일 수 있도록 선택할 수 있다. 곱셈도 가능하며 나눗셈의 경우는 '몫 + 나머지' 만큼 진행하도록 할 수도 있다.
- Back Do(뺄도)처럼 뒤로 가는 경우 한 칸보다 더 많이 뒤로 가면 어떨까?
(예) 주사위의 눈이 4와 3이 나왔을 때: 3-4를 계산하거나, 3칸 앞으로 간 뒤 4칸을 뒤로 갈 수도 있다.
(결국 뒤로 1칸 물러남)
- 주사위의 모양이나 개수를 바꾸면 어떨까?
(예) 3개의 주사위를 던져서 계산하거나 다른 종류의 정다면체 주사위를 사용할 수도 있다.
사칙계산(+, -, x, ÷)과 대소(>, <) 부호를 적은 연산 주사위를 하나 더 넣고 대소 부호의 경우는 큰 수 또는 작은 수 중 자신에게 유리한 수를 선택할 수 있다.
- 규칙 중에 '역전 대박 찬스'라는 재미있는 보너스를 사용할 수 있도록 하면 어떨까?
(예) 주사위를 던지기 전에 자신이 예상한 수들을 말하고 그것이 정확히 나왔을 때는 상대 팀 말과 우리 팀 말의 위치를 하나씩 바꿔 놓을 수 있다.
- 승리 방법을 각 말이 나오면서 남은 칸 수만큼 말의 점수를 주고 그 점수들을 모두 합하면 어떨까?
(예) Home까지 4칸이 남았을 때 10이라는 수가 나왔으면 그 말은 6점을 얻는다. 그러면 모든 말이 먼저 나오는 팀보다 점수의 합이 많은 팀이 승리할 수도 있다.





학습 정리

1. 주사위 윷놀이는 전통적인 윷놀이의 규칙과 비슷하여 쉽게 익힐 수 있는 게임이지만 윷가락이나 판의 모양, 말의 개수, 말을 움직이는 방법, 게임의 승패 결정 방법 등을 다양하게 바꾸어 볼 수 있는 창의적인 놀이이다.
2. 주사위윷놀이는 둘 또는 세 주사위를 던져 나온 눈을 사칙계산하여 나온 수만큼 말판 위의 말을 움직이면서 단순히 계산만 하는 게임이 아니라, 뒤에 오는 말에 의해 잡힐 가능성(확률)과 더블이나 트리플이 나올 가능성(확률)까지 고려하면서 목표 지점으로 빨리 나오거나 큰 점수로 나오면 승리하는 전략을 찾아야 하므로 확률을 이용한 전략게임의 일종이다.
3. 많은 점수를 얻기 위해서는 업어 갈지, 돌아갈지, 0보다 작은 값을 만들어서 한 칸 뒤로 물러갈지도 판단해야 하는 즉각적인 상황 판단이 필요한 놀이이다.
4. 주사위 윷놀이판은 한 줄 10칸을 기본단위로 하고 5칸을 보조단위로 하는 십진기수법의 암산이 가능하도록 수학적으로 만든 놀이판이다. 필요하다면 주사위윷놀이 말판의 모양 전체를 변경할 수도 있지만 단순히 재미 있는 모양보다는 수학적 구조가 들어있는 모양판이 좋다. 1부터 100까지의 수를 10칸씩 10줄로 배열한 100수표를 이용해도 된다.
5. 주사위 윷놀이는 'What if~(not)' 전략에 따라 주사위의 개수나 모양(나오는 수), 게임의 조건이나 규칙, 계산 방법, 승리방식 등을 수정, 변경하면서 자신의 수준에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있는 Re-Creation 수학에 적합한 놀이이다.
6. 참고문헌/참고사이트
안금희 외 9인(2006). 놀이를 활용한 신나는 교실 수업. 학지사.



학습 평가

1. 주사위 윷놀이에 대한 설명 중 가장 옳지 못한 것을 하나 고르시오.
 - ① 주사위 윷놀이에서는 뺑도(Back Do)처럼 말이 뒤로 가는 경우는 없다.
 - ② 주사위 윷놀이는 사칙 혼합계산을 연습하기 위한 계산용 학습게임이다.
 - ③ 주사위 윷놀이는 전통적인 윷놀이의 말이 옮기는 규칙과 똑같이 진행할 수도 있다.
 - ④ 주사위 윷놀이판은 한 줄 10칸을 기본단위로 하고 5칸을 보조단위로 하는 십진기수법의 암산이 가능하다.
 - ⑤ 주사위 윷놀이는 'What if~(not)' 전략에 따라 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 Re-Creation 수학에 적합한 놀이이다.

2. 다음 중 두 정육면체 주사위를 던져 나오는 눈의 합이 될 수 없는 값을 모두 고르시오.

① 1 ② 2 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

3. 다음 중 3개의 정육면체 주사위를 던져 나오는 수들의 합으로 가장 자주 나오는 값을 모두 구하시오.

① 7 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 14

03차시: 주사위 윷놀이를 통한 혼합계산과 확률지도

학습 안내



본 활동은 지난 시간에 학습한 ‘주사위 윷놀이’를 통해 저학년에서는 수의 분해와 결합을, 중학년에서는 혼합계산을, 그리고 고학년에서는 경우의 수와 확률을 지도하는 방법을 탐구해 보는 시간입니다.



주사위 윷놀이는 전통적인 윷놀이에 ‘What if ~ (not)’ 전략을 적용하여 윷가락 대신 주사위를 던지면서 주사위의 개수, 종류, 말을 옮기는 규칙, 게임의 승패 결정 방법 등을 다양하게 바꾸어 보는 창의적인 놀이요 전략적인 게임입니다. 기본 게임으로부터 어떻게 새로운 게임을 만들 수 있는지를 살펴보면서 지도할 수 있는 방법과 추가로 필요한 내용들에 대해 연구해 봅시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

- 1.(지식과 이해의 측면) 주사위 윷놀이의 게임 규칙을 이해하고 확률(가능성) 판단을 이용하여 게임의 승리전략을 찾을 수 있게 됩니다.
- 2.(기능적인 측면) 경우의 수와 가르기/모으기를 이용한 두 수(또는 세 수)의 합과 차, 곱, 그리고 나눗셈에서의 몫과 나머지 등을 연습하게 됩니다.
- 3.(수학적 사고의 측면) ‘What if not?’와 ‘What if ~not?’이라는 전략을 활용한 창의적인 윷놀이 게임을 만들고 평가할 수 있게 됩니다.
- 4.(태도와 의지의 측면) 게임의 규칙을 통해 준법정신의 필요성을 느끼고 승리전략이나 새로운 수학 문제를 찾아보려는 태도를 갖게 됩니다.
- 5.(학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 'What if~(not)' 전략에 따라 <기본 주사위 윷놀이> 변형하기

지난 시간에 체험했던 주사위 윷놀이는 'What if~(not)' 전략에 따라 주사위의 개수나 모양(나오는 수), 게임의 조건이나 규칙, 계산 방법, 승리방식, 말판의 모양 등을 수정, 변경하면서 자신의 수준에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있는 Re-Creation 수학에 적합한 놀이입니다. 그 플래시 게임은 "두 정육면체의 주사위의 눈을 합한 값만큼 말을 진행하여 4개의 말이 먼저 나오는 사람이 이긴다."는 기본 주사위 윷놀이 게임을 변형한 것인데 오늘 우리는 지난 시간의 활동을 회상하면서 'What if~(not)' 전략에 따른 각 질문에 따라 변형 가능한 게임을 먼저 생각해 봅시다. 그리고 나서 **(예시)** 아이콘을 눌러 가능한 답안을 확인해 봅시다.

<기본 주사위 윷놀이> 윷놀이 말판에 두 정육면체의 눈의 합만큼 말을 움직여가며 3개의 말이 먼저 나오는 사람이 이긴다.

(1) 왜 덧셈만 하지? 뺄셈이 더 유리할 때는 뺄셈도 할 수 있도록 하면 어떨까?

(예시) 주사위의 눈이 5와 3이 나왔을 때: $5+3=8$ 또는 $5-3=2$ 에서 자신이 유리한 칸 수만큼 움직일 수 있도록 선택할 수 있다. 곱셈도 가능하며 나눗셈의 경우는 '몫 + 나머지'만큼 진행하도록 할 수도 있다.

(2) Back Do(뺄도)처럼 뒤로 가는 경우는 없을까?

(예시) 주사위의 눈이 5와 3이 나왔을 때 처럼 $3-5$ 를 계산하여 뒤로 두 칸 물러나거나, 3칸 앞으로 간 뒤 5칸을 뒤로 갈 수도 있지만, 계산값이 -1 이 되는 경우에 한해서만 한 칸을 뒤로 물러날 수 있게 한다.

(3) 주사위의 모양이나 개수, 종류를 바꾸면 어떨까?

(예시) 3개의 주사위를 던져서 계산하거나 정다면체 주사위를 사용할 수도 있다. 사칙계산(+, -, $\times$, $\div$)과 부등(>)가 적힌 연산 주사위를 하나 더 넣고 부등의 경우는 가장 큰 수 또는 가장 작은 수 중 자신에게 유리한 한 수만 선택할 수도 있고 자신이 자유롭게 계산할 수도 있다. 연산주사위는 일부만 주거나 주어진 것만 사용할 수 있다.

(4) 규칙 중에 '역전 대박 찬스'라는 보너스나 함정을 사용할 수 있도록 하면 어떨까?

(예시) 주사위를 던지기 전에 자신이 예상한 수들을 말하고 그것이 정확히 나왔을 때는 상대 팀의 말과 우리 팀 말의 위치를 하나씩 바꿔 놓을 수 있다. 더블이 나오면 나의 말과 상대방의 말의 위치를 바꾸어 놓을 수도 있고, 트리플이 나오면 남아있는 상대방의 모든 말은 아웃되게 하거나, 남아있는 내 말을 모두 가운데 칸에 '몰빵' 할 수도 있다. 가운데 칸에 들어가면 무인도처럼 특정한 값(예를 들어, 3)이 나올 때까지 쉬어간다.

(5) 빨리나오는 승리 방법을 점수제로 바꿀 수는 없을까?

(예시) Home까지 4칸이 남았을 때 10이라는 수가 나왔으면 그 말은 6점을 얻는다. 그러면 모든 말이 먼저 나오는 팀보다 점수의 합이 많은 팀이 승리할 수도 있다.

2. 주사위 옷놀이 활동 차시 계획

차시	단계	활동 계획	지도전략/유의점	관련 다중지능	비고
1	생각 열기	- 전통 옷놀이 경험 회상 - 남들이 만들어 놓은 게임을 즐기지만 했는데 이제 우리는 지식의 소비자가 아닌 지식의 생산자가 될 준비	- 옷놀이는 운과 함께 말을 놓는 전략에 따라 결정되는 전략게임임을 상기	· 언어적 · 개인내	옷놀이를 하는 모습
	기본활동	- 기본 주사위 옷놀이를 게임 해보기 - 전통 옷놀이의 공통점, 차이점 비교	- 말판이나 도구는 다르지만 옷놀이와 유사한 방법으로 진행하도록 함.	· 논리적 · 신체적 · 대인관계	놀이판, 주사위, 말(큐브)
2	문제해결 활동1	- 두 주사위 눈의 합과 차 중에서 가장 자주 나오는 값 구하기 (개인 경험, 집단 실험, 이론상으로 경우의 수와 확률 계산)	- 전통 옷놀이와 같은 점이나 다른 점을 비교할 때 형식보다는 종합된 수학적 안목을 강조	· 논리적 · 개인내	활동지
	문제 해결 활동2	- 모둠별로 변형된 주사위 옷놀이 만들기	- what if?/what if not?의 전략을 이용한 변형 주사위 옷놀이 개발 - 설계도와 평가기준을 참고하여 단순 흥미보다는 수화적인 개념이 반영된 게임에 주목하도록 함.	· 논리적 · 개인내	설계도 평가 기준표
3	확장 하기	- 모둠별로 변형한 놀이 발표	- 학생 상호 동료평가 실시	· 논리적 · 언어적	평가표
	정리 활동	- 수업내용 정리하기 - 프로젝트 안내	- 우리도 새로운 게임을 만들 수 있다는 자신감을 갖도록 격려	· 논리적 · 개인내	



1.(기본형) 문제를 풀어 봅시다.

※ 1부터 6까지 적힌 두 주사위를 던져서 나온 눈의 합과 차를 각각 구해 봅시다.

1) (개인 경험을 떠올려 봅시다.) 가장 자주 나오는 수는 무엇이었나요?

합	차

2) (학급 전체를 대상으로 조사해 봅시다.) 가장 자주 나오는 수는 무엇인가요?

합	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	계
개인별 경험 확인												
다시 던졌을 때												

차	0	1	2	3	4	5	계
개인별 경험 확인							
다시 던졌을 때							

3) (계산으로 알아봅시다.) 아래 표의 각 칸에 A, B 두 주사위 눈의 합과 차를 채우면서 가장 자주 나오는 값은 각각 무엇인지 구하시오. 그리고 그 값들이 나올 확률을 구하시오.

B 주사위	6						
	5						
	4						
	3						
	2						
	1						
두 주사위의 눈의 합		1	2	3	4	5	6
		A 주사위					

B 주사위	6							
	5							
	4							
	3							
	2							
	1							
두 주사위 눈의 차			1	2	3	4	5	6
		A 주사위						

2.(심화형) 문제를 풀어 봅시다.

※ 1부터 6까지 적힌 3개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 모두 합한다고 합시다.

1. (개인 경험을 떠올려 봅시다.) 가장 자주 나오는 수는 무엇이었나요?

2. (학급 전체를 대상으로 조사해 봅시다.) 가장 자주 나오는 수는 무엇인가요?

세 수의 합	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	계
개인별 경험 확인																	
다시 던졌을 때																	

3. (계산으로 알아봅시다.) A, B 두 주사위 눈의 합을 채워보았던 앞의 표를 이용하여 A, B, C 세 주사위 눈의 합으로 가장 자주 나오는 경우의 값을 구하고 각 값들이 나올 확률을 계산하여 봅시다.

세수의 합	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	계
경우의 수																	
확률																	

Think⁺ 위의 표들을 쉽고 빠르게 채울 수 있는 방법 또는 규칙을 찾아봅시다.



3. 주사위 윷놀이를 활용한 활동에 대한 해설

교육활동 안내

Guide

- 주사위를 던져 나온 눈의 합(또는 차)으로 가장 자주 나왔다고 생각하는 값을 조사해 본다.
- 각자 주사위를 한 번씩 더 던지도록 하여 나온 눈의 합(또는 차)을 조사해 본다.
- 표를 이용하여 이론적인 값을 계산해 본다.
- 경험적인 값과 이론적인 값의 차이를 생각하고 토론해 보도록 한다.

생각 더하기

Question

- 조사결과에 따르면 (학급에서 나온 실제 값)★ 이 가장 많이 나왔는데 한 번씩 더 던져도 그럴까?
- 표 안에 계산 값을 빠르고 쉽게(규칙적으로) 적는 방법이 있나?
- 혼자 100번을 던져 얻은 결과와 20명이 5번씩 던져 얻은 결과가 크게 다를까?

정보 더하기

Information

- 놀이를 하면서 경험한 수를 표로 적은 다음, 개인별로 한번씩 더 던진 결과를 표로 수집한다. 마지막 칸의 계는 같아야 동일하게 비교할 수 있다. 표를 만들어 보면 가장 자주 나오는 눈은 대각선에 위치한 7(또는 0)임을 알 수 있다. 다른 값들은 7(또는 0)을 중심으로 좌우로 대칭을 이루고 있다.

	6	7	8	9	10	11	12
B	5	6	7	8	9	10	11
주	4	5	6	7	8	9	10
사	3	4	5	6	7	8	9
위	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	
두 주사위 눈의 합	1	2	3	4	5	6	

A 주사위

	6	5	4	3	2	1	0
B	5	4	3	2	1	0	1
주	4	3	2	1	0	1	2
사	3	2	1	0	1	2	3
위	2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5	
두 주사위 눈의 차	1	2	3	4	5	6	

A 주사위

활동 더하기

Activity

- (심화) 3개의 정육면체를 더한 값의 모든 경우의 수와 확률 구하기

세수의 합	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	계
경우의 수	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	216
확률	1/216	3/216	6/216	10/216	15/216	21/216	25/216	27/216	27/216	25/216	21/216	15/216	10/216	6/216	3/216	1/216	216/216

- 두 개의 주사위를 던져 나온 표를 바탕으로 2부터 12까지의 수가 나오는 경우에도 세 번째 주사위의 눈이 1일 때부터 6일 때까지를 하나씩 추가하면서 합하면 된다. 예를 들어, 세 수의 합이 10인 경우는 세 번째 주사위가 1부터 6까지 나올 수 있으므로 두 주사위로 9부터 3까지 나왔던 경우를 모두 합한 $4+5+6+5+4+3=27$ 가지이다. 모든 경우들의 확률의 합은 1이다.

3. 우리는 이렇게 바꾸었어요!

다음 쪽의 [평가기준]을 참고하면서 우리들만의 새로운 놀이를 만들어 봅시다.

우리가 만든 놀이의 이름 : _____ 누구누구랑: _____

놀이의 이름			
대상	내용	우리는 이렇게 정했어요.	
		기본 게임	심화 또는 보충
주사위	어떤 모양(눈의 수)을 몇 개 사용하는가?		
	주사위 눈을 계산하는 방법은?		
	보너스 찬스는 언제?		
말을 옮기는 규칙	말의 개수는 몇 개?		
	말을 옮기는 규칙은?		
	함정이나 보너스 칸을 만들까?		
이기는 방법	먼저 나는 것으로 할까? 점수로 계산할까?		
	점수 계산 방법		
기타	(우리 모둠에서 가장 핵심적인 것?) 무언가 색 다른 것이 없을까?		

Think⁺ 가장 핵심적인 것에 초점을 맞추어 우리가 만든 게임의 이름을 만들어 봅시다.



4. 다른 친구들의 좋은 아이디어 평가하기

다른 친구들이 만든 윷놀이를 평가해 봅시다.

[아래의 평가 내용을 수정하거나 추가할 수도 있습니다.]

모 둠	평 가 내 용							좋은 점/ 아쉬 운 점
	내용	독창성	흥미	협동, 시간	발표력	그림	총 점	
	수학적인 내용을 포함한 아이디어임	아이디어가 신선하고 독창적임.	재미가 있음	협동심을 발휘하여 완료 시간을 지킴	이해하기 쉽게 발표함	추가할 평 가 항목:		
	5	5점	5점	5점	5점			
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

교육활동 안내

Guide

- 교사가 'What if~?'/ 'What if~not?' 전략을 사용하여 놀이의 조건이나 규칙, 승리 방법 등을 바꾼 몇 가지 예시를 설명해 준다.
- 각 모둠별로 새로운 주사위 윷놀이를 만들어 발표한다. 발표할 때는 기본적인 설명을 칠판에 미리 적어놓은 다음 핵심적인 부분만 강조하여 설명한다.
- 다른 모둠이 만든 새로운 주사위 윷놀이를 상호 평가한다.

생각 더하기

Question

- 왜 더 하기만 할까? 뺄 값만큼 뒤로 옮겨 가도록 하면 어떨까?
- 말을 옮길 때 모두 더한 만큼 간다든지, 빨간색 주사위끼리는 더하고 파란색 주사위는 뺄다는 식으로 고정된 한 가지 규칙대로만 움직이는 것보다 세 수를 가지고 특정한 연산은 반드시 사용하면서 나머지는 자유롭게 계산할 수 있다는 것과 같이 말의 위치에 따라 여러 가지 가능한 경우에서 자신에게 더 유리한 방법을 선택할 수 있도록 해 보자.
- 우리 모듬의 작품에서 가장 중요한 것은 무엇인가? 어떤 수학적 아이디어가 들어있나? 그런 중요함과 강조점이 드러나도록 우리 모듬의 놀이 이름을 지어보자.
- 다시 만든다면 어떠한 점을 개선할 것인가?

정보 더하기

Information

[약속하기]

‘모든 경우의 수에 대한 해당 사건이 일어날 경우의 수의 비율’을 **확률**이라 한다.

$$\text{어떤 사건의 확률} = \frac{\text{그 사건이 일어날 경우의 수}}{\text{모든 경우의 수}}$$

활동 더하기

Activity

- 모든 아이디어는 계속 다듬어져야 한다. 즉, 우리가 만든 주사위 윷놀이 역시 좀 더 개선할 점이 많다. 다른 모듬의 작품에 대한 상호 평가가 이루어지도록 지도한다.
- 모듬이 만든 작품 발표 시 자기의 다중 지능을 살려 발표할 수 있도록 지도한다.

Think+ 각 모듬의 작품에서 가장 핵심적인 부분은 무엇이며 작품명을 무엇이라고 지을 것인가?



학습 정리

1. 주사위 윷놀이를 할 때,
저학년생에게는 실제 말을 움직일 때 일일이 칸 수를 세지 않고 단번에 옮겨가도록 요구하면서 10칸과 5칸으로 이루어진 말판의 구조를 파악하여 수의 분해와 결합을 더 생각해보도록 할 수 있고,
고학년생에게는 각 말의 원활한 이동과 상대방의 말 잡기, 그리고 득점을 높이기 위해 앞으로 나올 주사위는 계산값의 확률(가능성)을 세밀히 고려하고 전략적인 접근을 모색하도록 강조하고 격려해 주어야 한다.
2. 주사위 윷놀이를 할 때 숫자주사위에서 얻은 수와 연산이 이미 정해져 있는 계산연습보다는 숫자주사위에서 얻은 수들만 가지고 자유계산을 하도록 하면 말이 놓인 위치에 따라서는 잡거나 지름길로 가기 위해 보다 다양한 경우의 수를 생각하게 할 수 있다.
3. 주어진 조건의 놀이에만 그치지 않고 기본 게임을 ‘What if? / What if ~not?’의 전략을 이용하여 다양한 변형 주사위 윷놀이를 개발해 보도록 요구하고 학생들이 만든 주사위 윷놀이 산출물의 작품에 대한 상호 평가를 통해 서로의 아이디어를 공유하도록 지도한다.
4. 모둠별 산출물을 발표할 때는 모둠별 활동 내용을 칠판에 요약해 두고 핵심내용만 설명하면서 토론하도록 한다.



주사위 윷놀이 변형의 예

[]

1. 사용할 플래시 말판
2. 사용할 정다면체 주사위의 종류(6, 8, 12, 20면체)와 개수(2개, 3개)를 선택
3. 팀별 3개씩의 원형 색깔 말

[게임의 규칙(방법)]

1. '점수기록판'에서 게임자1이 주사위의 개수[2개 또는 3개]와 주사위의 종류[정사각형(정6면체), 정삼각형(정8면체), 정오각형(정12면체)], 계산방법[수동 또는 자동], 승패결정[빨리나오기 또는 큰 점수]을 선택한다.
2. 게임자1이 먼저 게임을 시작하고 두 게임자가 번갈아 게임을 실시한다.
3. '주사위 돌리기'버튼을 눌러 나온 수와 연산을 '계산식 만들기'틀로 옮겨서 나온 '계산 값'이 나타나면 그 값을 끌어다 말 위에 올려놓으면 그 수만큼 말을 옮겨 윷놀이판의 해당하는 위치로 옮겨 놓을 수 있다.(단, 계산값은 반드시 정수여야 한다.)
4. 두 주사위의 눈의 수가 똑같이 나오는 경우(더블)는 1회 더 던질 수 있는 보너스를 얻는다.
5. 상대 팀의 말을 잡게 되면 잡힌 말은 아웃되며, 게임자는 주사위를 1회 더 던질 수 있는 보너스를 얻는다.(그러나 더블로 말을 잡게 되더라도 보너스의 기회는 1회만 허용한다.)
6. 여러 개의 계산 값으로 한 말을 움직여도 되고 서로 다른 말을 움직여도 된다. 따라서 보너스의 횟수가 2회이면 기본 횟수를 포함하여 최소 1개에서 최대 3개까지의 말을 옮길 수 있다.
7. 길을 따라 계산값만큼 말을 진행하되 갈림길에 멈추었을 때만 최단 지름길로 방향을 바꿀 수 있다. 그러나 지름길에서 일부러 먼 길로 돌아갈 수는 없다.
8. 같은 팀의 말은 여러 개 겹쳐 엮어갈 수도 있다.
9. 무인도에 들어가면 특정한 값(예를 들어, 3)이 나와야만 탈출할 수 있다.
10. 세 주사위의 눈의 수가 모두 같은 경우(트리플)는 빵파레(환호성, 축하 풍선)가 터지면서 윷놀이 판 위에 놓인 상대팀의 말은 모두 죽는다.
11. 홈으로 들어오는 말을 홈에 옮겨놓으면 10점(또는 홈까지 사용된 칸 수를 제외한 점수)이 주어진다. 엮어서 들어오면 각 말의 개수만큼 곱한다.
12. [선택] 계산값이 -1일 때는 뒤로 한 칸 물러갈 수도 있다.(뺄도)

[승패의 결정방법]

- (선택1, 빨리나오는 방법) 각 말에 10점을 주어 30점을 얻는 팀이 이긴다.
(선택2, 높은 점수가 이김) 각각의 말이 홈을 지나면서 남는 수들의 합이 크면 이긴다.



학습 평가

1. '주사위 윷놀이' 지도에 대한 설명 중 가장 옳지 못한 것을 하나 고르시오.
 - ① 주사위를 던져서 나오는 경험적인 값과 이론적인 값은 다를 수 있음을 설명한다.
 - ② 상대 게임자보다 더 많은 점수를 얻기 위해 애를 쓰고 노력하는 것 자체가 이미 좋은 놀이학습임을 강조한다.
 - ③ 주사위 윷놀이를 변형할 때, 가장 핵심적인 것에 초점을 맞추어 자신들이 만든 게임의 이름을 만들어 보도록 한다.
 - ④ 학생들이 만든 주사위 윷놀이 산출물의 작품에 대한 상호 평가를 통해 서로의 아이디어를 공유하도록 지도한다.
 - ⑤ 정팔면체 주사위를 학급 인원들이 모두 각각 두 번씩 던져서 6이 나오는 횟수와 개인이 학급 인원수의 두 배 수만큼 던져서 6이 나오는 횟수가 거의 비슷할지를 예상해 보도록 한다.

2. 정육면체 주사위 2개를 던졌을 때 눈의 합으로 가장 자주 나오는 경우의 값과 그 값이 나올 확률을 각각 바르게 짝지은 것은?

① 6, $\frac{1}{36}$ ② 7, $\frac{1}{36}$ ③ 6, $\frac{1}{6}$ ④ 7, $\frac{1}{6}$ ⑤ 7, $\frac{7}{36}$

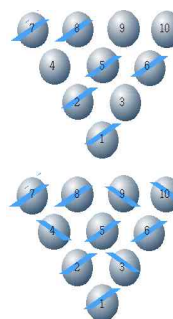
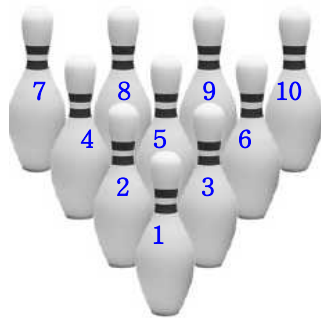
3. 정육면체 주사위 3개를 던졌을 때, 셋 중 두 수가 같은 '더블(double)'이 나올 확률과 세 수가 모두 같은 '트리플(triple)'이 나올 확률을 각각 바르게 계산 한 것은?

① $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{216}$ ② $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{216}$

④ $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{216}$

04차시: 숫자 볼링 게임

학습 안내



$$\begin{aligned} X &= 3 + 4 - 6 \\ Z &= (3 \times 4) + 6 \\ B &= 6 - (4 - 3) \\ B &= 6 \div (4 - 3) \\ A &= 4 + 6 - 3 \\ B &= 4 \times (6 + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 &= 4 - (3 + 3) \\ 4 &= 4 \times (3 + 3) \\ 3 &= 3 \times 4 - 3 \\ 10 &= 3 + 3 + 4 \end{aligned}$$

본 활동은 볼링게임을 변형해 만든 '숫자볼링 게임'입니다.

숫자볼링게임은 스포츠의 일종인 볼링게임의 '스트라이크'와 '스페어'라는 용어와 득점 방식은 그대로 활용하지만 각 프레임에서 핀을 쓰러뜨려 점수(스트라이크나 스페어)를 얻는 방법을 수학적으로 재구성한 것입니다. 볼링대신 주사위를 던져 나온 수와 사칙계산을 활용하면서 보다 높은 점수를 얻기 위한 상황 판단이 필요한 게임입니다. 놀이의 조건이나 규칙, 승리방식을 여러 가지 방식으로 변경하면서 자신의 수준에 맞게 창의적인 놀이로 재구성해 보시기 바랍니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

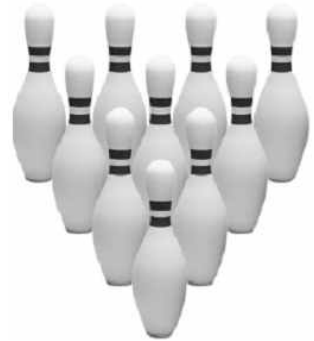
1. (지식과 이해의 측면) 숫자볼링 게임의 규칙과 점수 계산방법을 이해한다.
2. (기능과 활동의 측면) 3~4개의 자연수를 이용한 사칙혼합계산을 할 수 있을뿐만 아니라 수식 만들기에 대한 직감도 필요함을 느끼게 된다.
3. (수학적 사고의 측면) 점수의 합계를 높이기 위해서는 연속적으로 스트라이크 또는 스페어의 가능성이 높은 수들을 전략적으로 선택할 필요가 있음을 알게 된다.
4. (태도와 의지의 측면) 게임의 규칙을 통해 개인 준법정신과 단체 협동의 필요성을 느끼고, 승리전략이나 새로운 수학 문제를 찾아보려는 태도를 갖게 된다.



학습 내용

1. 볼링 게임

볼링은 일정하게 떨어진 거리에 10개의 핀을 세워 놓고 공을 던져 많은 핀을 쓰러뜨리는 경기입니다. 기원전 5200년경으로 추정되는 고대 이집트의 유적에서도 오늘날과 유사한 용구가 사용된 것으로 보아 매우 오래된 역사를 가지고 있습니다. 오늘날의 볼링은 10프레임을 진행하는 동안 한 프레임에서 최대 2회씩 공을 던져 핀을 쓰러뜨리되 점수를 계산하는 방식이 매우 독특합니다. 각 프레임에서 첫 번째 투구에서 10개의 핀을 모두 쓰러뜨리는 것을 스트라이크(strike)라 하고 두 번째 투구로 10개를 모두 쓰러뜨리는 것을 스페어(spare)라 하며 스트라이크는 2회, 스페어는 1회의 보너스가 주어지며 다음 프레임의 점수를 앞으로 가져와 누적시킬 수 있습니다. 다시 말해, 스트라이크가 나오면 이후에 나온 두 개의 점수를, 스페어가 나오면 이후에 나온 한 개의 점수를 현재 프레임에 추가로 합하여 적습니다. 따라서 연속으로 스트라이크를 많이 칠수록 유리합니다. 마지막 10번 프레임에서는 3회까지 던질 수 있습니다.



2. 볼링게임의 점수 계산 방법 익히기

① 앞의 볼링점수판을 참고하여, 다음의 볼링 점수판에 기록될 최종 점수를 계산하여 봅시다.

프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
득점	6	3	5	0	8	9	9			
누계	9	14	33	52	72	102	132	162	192	222

② 모든 프레임에서 스트라이크를 쳤을 때 한 게임(10프레임)에서 얻을 수 있는 최대점수는 얼마일까요?

[해설] 최대점수를 얻는 경우는 모든 프레임에서 스트라이크를 치는 것으로 이를 '퍼펙트게임'이라고 합니다. 스트라이크는 다음 2회의 점수까지 누적하여 더할 수 있으므로 각 프레임에서의 최대 점수는 30점입니다. 모든 프레임에서 30점씩 얻게 되면 최대점수는 결국 300점이 됩니다.

③ 스트라이크와 스페어를 치는 경우의 수가 비슷하다고 할 때, 볼링게임에서 고득점을 올릴 수 있는 효율적인 방법에는 어떤 것이 있을까요?

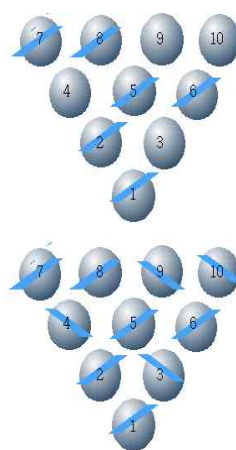
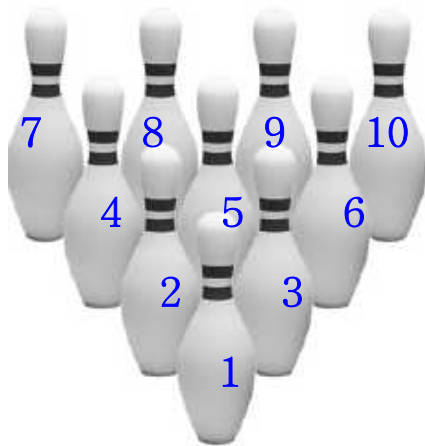
[해설] 스트라이크와 스페어를 치는 경우의 수가 비슷하더라도 그 스트라이크가 얼마나 연달아 나오느냐에 따라 전체 점수는 많이 달라집니다. 아래의 표는 앞의 1번 점수와 비교할 때 10번 프레임이 동일하고 스트라이크도 4회, 스페어 3회, 오픈이 2회로 동일합니다. 하지만 스트라이크가 나온 직후의 프레임(2번과 4번)에서의 점수가 좋지 못하여 많은 점수를 누적할 수 없고 이로 인해 전체 점수는 낮아졌습니다.

프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
득점		5	0	6	3	9	9		8	
누계	15	20	39	48	68	88	108	128	148	178

Think+ 결국 볼링은 연속으로 스트라이크를 칠 때 보너스 점수가 많아집니다.

3. 숫자 볼링 게임의 이해

숫자볼링은 볼링 핀과 공 대신에 3개의 정육면체 주사위를 던져 나오는 세 수를 가지고 사칙계산을 하여 주어진 시간 안에 1부터 10까지의 수를 만들어 지우는 방식입니다. 1부터 10까지의 수를 모두 만들면 “스트라이크”이고, 더 이상 만들 수 없을 때는 주사위를 다시 던져서 나온 세 수로 남아있는 수를 “스페어”처리할 수 있습니다.



$$\begin{aligned} X &= 3 + 4 - 6 \\ Z &= (3 \times 4) \div 6 \\ Y &= 6 - (4 - 3) \\ \bar{Y} &= 6 \div (4 - 3) \\ \bar{X} &= 4 + 6 - 3 \\ \bar{X} &= 4 \times (6 \div 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{3} &= 4 - (3 \div 3) \\ \bar{4} &= 4 \times (3 \div 3) \\ \bar{9} &= 3 \times 4 - 3 \\ \bar{10} &= 3 + 3 + 4 \end{aligned}$$

- 1) 정육면체 주사위 3개(또는 4개)를 동시에 던져서 나온 수만으로 사칙계산(더하기, 빼기, 곱하기, 나누기)을 하여 1부터 10까지의 수를 만들어 봅시다. 처음에 던져 나온 수들로 만든 값은 지우세요.

프레임	나온 수	만든 식
1	주사위 3개와 자유연산	1= 2= 3=
	처음 나온 세 수 (A, B, C)	4= 5= 6=
	스페어용 세 수 (X, Y, Z)	7= 8= 9= 10=
2	주사위 4개와 자유연산	1= 2= 3=
	처음 나온 네 수 (A, B, C, D)	4= 5= 6= 7=
	스페어용 네 수 (W, X, Y, Z)	8= 9= 10=



4. 'What if~(not)' 전략에 따라 <숫자볼링 게임> 변형하기

<기본 숫자볼링 게임> 정육면체 3개를 던져 나오는 세 수를 사용하여 1부터 10까지의 수를 만든다.

숫자볼링게임은 'What if~(not)' 전략에 따라 던지는 주사위의 개수나 모양, 게임의 조건이나 규칙, 계산 방법, 승리방식, 한 게임에 필요한 프레임의 개수 등을 수정 또는 변경할 수 있습니다. 자신의 수준에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있는 Re-Creation 수학에 적합한 놀이입니다.

'What if~(not)' 전략에 따른 각 질문에 따라 가능한 해답을 먼저 생각해 봅시다. 그리고 나서 (예시) 아이콘을 눌러 가능한 답안을 확인해 봅시다.

(1) 왜 정육면체 주사위 3개만 사용하지? 4개라면?

(예시) 정육면체 주사위도 2개를 이용하여 하나는 1부터 6까지, 다른 하나는 4부터 9까지 적힌 것을 이용할 수도 있습니다. 하지만 보너스로 1부터 시작하는 주사위를 사용한다고 할 때 정육면체 주사위 3개에서 나오는 1~6까지의 수 3개를 가지고는 1부터 10까지의 수를 모두 만들기가 쉽지 않습니다. 따라서 네 수를 이용하면 더 쉽게 만들 수 있습니다.

(2) 왜 정육면체 주사위만 사용하지? 정팔면체 주사위는?

(예시) 정육면체 주사위는 1부터 6까지만 사용하지만 정4, 8, 12, 20면체의 주사위를 사용할 수도 있습니다. 정다면체는 아니지만 1부터 10까지 또는 0부터 9까지의 눈이 적힌 십면체 주사위도 가능합니다.

(3) 연산주사위를 추가하면 어떨까?

(예시) 정육면체 주사위 3개인 경우는 자유연산을 이용하더라도 1부터 10까지의 수를 모두 만들기가 어려운 반면 정육면체 주사위 4개만 이용하더라도 자유연산을 이용하면 1부터 10까지의 수를 쉽게 만들 수 있어 난이도가 쉬워집니다. 따라서 자유연산이 아니라 특정한 연산을 반드시 1개 또는 2개는 이용하도록 하기 위해 연산주사위를 추가할 수 있습니다.

(4) 규칙 중에 '대박 찬스'라는 보너스를 사용할 수 있도록 하면 어떨까?

(예시) 세 또는 네 수가 모두 같은 수가 나올 확률은 매우 적지만 그것을 가지고 1부터 10까지의 수를 만들기는 어렵습니다. 행운의 기회가 오려야 꼭박이 되는 것을 방지하기 위해 주사위를 던지기 전에 3개이상 같은 수가 나올 때는 특정한 수(예를 들어, 13)를 만들 수 있으면 다시 던지거나 스트라이크로 처리합니다.

(5) 왜 사칙계산으로만 제한하는가?

(예시) 볼링게임은 전체 10프레임 중 스트라이크를 연속으로 만들면 더 많은 점수를 얻을 수 있습니다. 이를 활용하기 위해 중간에 자신들이 생각하는 새로운 연산 규칙을 만들어 그 연산으로 1부터 10까지의 수를 만들 수도 있습니다.

(6) 왜 1부터 10까지의 수만 만들어야 하는가?

(예시) 당연히 10보다 더 큰 수가 적힌 볼링핀을 세워 놓아도 되고 볼링핀의 개수도 10개보다 더 늘려도 됩니다.

5. 숫자볼링게임

주사위의 사용 방법 (각 프레임임을 둘러 사용하는 주사위의 개수와 계산방법을 확인하십시오.)	주사위 3개와 자유연산		주사위 4개와 자유연산		주사위 4개와 반드시 (×)포함		주사위 4개와 반드시 (+,-)포함		4개와 (×) 사용불가		
	1프레임		2프레임		3프레임		4프레임		5프레임		

★ 모둠별 숫자볼링게임 기록지

주의: 각 프레임별로 5분 안에 스페어까지 처리해야 하므로 스트라이크가 잘 안 나올 때 스트라이크를 위해 더 많은 시간을 사용할지 스페어용 주사위를 던질지를 결정해야 합니다.

프레임	나온 수	만든 식	프레임	나온 수	만든 식
1	주사위3개와 자유연산	1=	2	주사위4개와 자유연산	1=
		2=			2=
		3=			3=
		4=			4=
	처음 나온 세 수 (A, B, C)	5=		(A, B, C, D)	5=
		6=			6=
		7=			7=
	스페어용 세 수 (X, Y, Z)	8=		(W, X, Y, Z)	8=
		9=			9=
		10=			10=
3	주사위4개와 (×)포함	1=	4	주사위4개와 (+,-)포함	1=
		2=			2=
		3=			3=
		4=			4=
	(A, B, C, D)	5=		(A, B, C, D)	5=
		6=			6=
		7=			7=
	(W, X, Y, Z)	8=		(W, X, Y, Z)	8=
		9=			9=
		10=			10=
5	주사위3개와 자유연산	1=			1=
		2=			2=
		3=			3=
	(A, B, C)	4=			4=
		5=			5=
		6=			6=
	(X, Y, Z)	7=			7=
		8=			8=
	(A, B, C)	9=			9=
		10=			10=



학습 정리

1. 숫자볼링은 볼링 핀과 공 대신에 3개의 정육면체 주사위를 던져 나오는 세 수를 가지고 사칙계산을 하여 주어진 시간 안에 1부터 10까지의 수를 만들어 지우는 방식으로 진행하므로 빠르고 정확한 사칙혼합 계산능력이 필요합니다. 그러나 주어진 계산식을 잘 구하는 사람도 주어진 답을 만족시키는 식을 직접 만들어 내는 것이 얼마나 어려운지를 느낄 수 있습니다. 이를 통해 계산능력뿐만 아니라 수식에 대한 직감적인 능력도 필요함을 알게 됩니다.
2. 숫자볼링은 단지 계산만으로 끝나서는 안 됩니다. ‘What if ~(not)?’의 방법으로 주사위의 개수나 모양을 변경하면서 연산의 개수와 종류를 제한한다든지, 독특한 방법의 계산도 허용하면서 볼링핀의 개수나 프레임의 수도 조정하면서 응용이 가능한 놀이입니다. 특히 보다 높은 점수를 얻기 위해 어떤 새로운 조치가 필요한지를 판단하면서 자신의 수준에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있는 Re-Creation 수학에 적합한 놀이입니다.
3. 예를 들어, 각 프레임별로 시간제한(예를 들어, 5분)을 두면 그 시간 안에 스페어까지 처리해야 하므로 스트라이크가 잘 안 나올 때 스트라이크를 위해 더 많은 시간을 사용할지 시간이 모자라 미스처리를 할지 또는 스페어용 주사위를 던질지를 결정해야 하므로 긴장감을 높일 수 있고 더 많은 생각을 하게 됩니다. 시간이 적을 때는 프레임의 수를 줄이거나 4~6인의 모둠별로 진행하면서 한 명이라도 그 식을 만들면 성공한 것으로 인정하는 방식으로 변형할 수 있습니다.

학습 평가

1. 볼링과 숫자볼링게임에 대한 설명 중 가장 옳지 못한 것을 하나 고르시오.
 - ① 숫자볼링게임은 볼링과 혼합사칙계산을 응용한 게임이다.
 - ② 볼링은 10프레임을 기본으로 구성하며 개인별 최대 점수는 300점이다.
 - ③ 숫자볼링게임도 볼링과 마찬가지로 10프레임을 기본으로 하며 모든 프레임에서 스트라이크를 치는 퍼펙트게임의 경우 300점을 만점으로 한다.
 - ④ 숫자볼링게임은 식의 값을 계산하기 보다는 원하는 값을 얻기 위한 계산식을 만드는 과정이므로 가역적 사고와 수 감각, 계산감각이 뛰어난 사람에게 유리하다.
 - ⑤ ‘What if ~(not)?’ 전략에 따라 주사위의 모양이나 개수 변형, 계산방법 변형, 볼링핀의 개수 변형 등으로 숫자볼링게임을 다양하게 재구성할 수 있다.
2. 다음 중 정육면체 주사위 3개(A, B, C)를 사용하는 숫자볼링게임의 기본 계산법으로 스트라이크를 칠 수 있는 경우는?
 - ① (1, 2, 4) ② (1, 2, 5) ③ (1, 3, 5) ④ (2, 3, 5) ⑤ (2, 4, 7)
3. (2, 4, 12)의 수와 (+, ÷)의 두 연산만 가지고 만들 수 있는 자연수 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 순서대로 바르게 짝지은 것은?
 - ① 2, 4 ② 3, 8 ③ 2, 10 ④ 3, 10 ⑤ 5, 10

05차시: 숫자볼링 게임을 통한 수식 만들기 지도

학습 안내



본 활동은 지난 시간에 학습한 '숫자볼링게임'을 통해 사칙혼합계산의 수식 만들기를 지도하는 방법을 탐구해 보는 시간입니다.

숫자볼링게임은 스포츠의 볼링게임에 'What if ~(not)' 전략을 적용하여 볼링대신 대신 주사위를 던지면서 1부터 10까지 쓰인 핀의 값을 직접 만들어 지워나가면서 주어진 값을 만들어 내어야 하므로 일종의 계산용 게임으로 볼 수도 있습니다. 하지만 주어진 수식을 계산하는 것이 아니라 주어진 답에 적합한 수식을 직접 만들어야 하므로 창의적인 수식 만들기 게임이고 높은 점수를 얻기 위해서는 시간 내에 스트라이크를 잡을지 스페어처리를 할지를 결정해야 하는 전략적 게임이기도 합니다. 기본 게임으로부터 어떻게 새로운 게임을 만들 수 있는 지도 살펴보면서 지도 방법을 연구해 봅시다.



학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해의 측면) 숫자볼링 게임의 규칙과 점수 계산방법을 이해합니다.
2. (기능과 활동의 측면) 3~4개의 자연수를 이용한 사칙혼합계산을 할 수 있을 뿐만 아니라 수식 만들기에 대한 직감도 필요함을 느끼게 됩니다.
3. (수학적 사고의 측면) 점수의 합계를 높이기 위해서는 연속적으로 스트라이크 또는 스페어의 가능성이 높은 수들을 전략적으로 선택할 필요가 있음을 알게 됩니다.
4. (태도와 의지의 측면) 게임의 규칙을 통해 개인 준법정신과 단체 협동의 필요성을 느끼고, 승리전략이나 새로운 수학 문제를 찾아보려는 태도를 갖게 됩니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 'What if~(not)' 전략에 따라 <숫자볼링 게임> 변형하기

<기본 숫자볼링 게임> 정육면체 3개를 던져 나오는 세 수를 사용하여 1부터 10까지의 수를 만든다.

숫자볼링게임은 'What if~(not)' 전략에 따라 던지는 주사위의 개수나 모양, 게임의 조건이나 규칙, 계산 방법, 승리방식, 한 게임에 필요한 프레임의 개수 등을 수정 또는 변경할 수 있습니다. 자신의 수준에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있는 Re-Creation 수학에 적합한 놀이입니다. 'What if~(not)' 전략에 따른 각 질문에 따라 가능한 해답을 먼저 생각해 봅시다. 그리고 나서 **(예시)** 아이콘을 눌러 가능한 답안을 확인해 봅시다.

(1) 왜 정육면체 주사위 3개만 사용하지? 4개라면?

(예시) 정육면체 주사위도 2개를 사용하여 하나는 1부터 6까지, 다른 하나는 4부터 9까지 찍힌 것을 사용할 수도 있습니다. 하지만 보통으로 1부터 시작하는 주사위를 사용한다고 할 때 정육면체 주사위 3개에서 나오는 1~6까지의 수 3개를 가지는 1부터 10까지의 수를 모두 만들기가 쉽지 않습니다. 따라서 네 수를 사용하면 더 쉽게 만들 수 있습니다.

(2) 왜 정육면체 주사위만 사용하지? 정팔면체 주사위는?

(예시) 정육면체 주사위는 1부터 6까지만 사용하지만 정4, 8, 12, 20면체의 주사위를 사용할 수도 있습니다. 정다면체는 아니지만 1부터 10까지 또는 0부터 9까지의 눈이 찍힌 십면체 주사위도 가능합니다.

(3) 연산주사위를 추가하면 어떨까?

(예시) 정육면체 주사위 3개인 경우는 자유연산을 사용하더라도 1부터 10까지의 수를 모두 만들기가 어려운 반면 정육면체 주사위 4개만 사용하더라도 자유연산을 사용하면 1부터 10까지의 수를 쉽게 만들 수 있어 눈이득이 수득입니다. 따라서 자유연산이 아니라 특정한 연산을 반드시 1개 또는 2개는 사용하도록 하기 위해 연산주사위를 추가할 수 있습니다.

(4) 규칙 중에 '대박 찬스'라는 보너스를 사용할 수 있도록 하면 어떨까?

(예시) 세 또는 네 수가 모두 같은 수가 나올 확률은 매우 적지만 그것을 가지고 1부터 10까지의 수를 만들기는 어렵습니다. 행운의 기회가 오히려 쪽박이 되는 것을 방지하기 위해 주사위를 던지기 전에 3개이상 같은 수가 나올 때는 특정한 수(예를 들어, 13)를 만들 수 있으면 다시 던지거나 스트라이크로 처리합니다.

(5) 왜 사칙계산으로만 제한하는가?

(예시) 볼링게임은 전체 10프레임 중 스트라이크를 연속으로 만들면 더 많은 점수를 얻을 수 있습니다. 이를 활용하기 위해 중간에 아이들이 생각하는 새로운 연산 규칙을 만들어 그 연산으로 1부터 10까지의 수를 만들 수도 있습니다.

(6) 왜 1부터 10까지의 수만 만들어야 하는가?

(예시) 당연히 10보다 더 큰 수가 찍힌 볼링핀을 세워 놓아도 되고 볼링핀의 개수도 10개보다 더 늘려도 됩니다.

이처럼 기존의 숫자볼링 게임을 'What if~(not)' 전략에 따라 주사위의 개수나 모양을 바꿀 수도 있고, 새로운 주사위를 추가하거나 볼링핀을 추가할 수도 있습니다. 사칙계산 게임이지만 특정한 연산의 사용을 제한하거나 반드시 사용하도록 할 수도 있으며 게임자의 능력이나 독특한 발상에 따라 사칙계산 이외의 연산이나 소수점을 사용할 수도 있습니다.

2. 숫자볼링게임 활동 차시 계획

차시	단계	활동 계획	지도전략/유의점	관련 다중지능	비고
1	생각 열기	- 볼링게임에 대한 개인별 회상 - 볼링의 용어와 점수 계산 방법 이해	- 볼링은 연속적인 스트라이크 또는 스페어를 칠수록 더 높은 점수를 받음.	· 언어적 · 개인내	
	기본 활동	- 주사위 3개(4개)와 자유연산을 사용하여 숫자볼링게임의 점수 계산법 익히기 (1프레임, 2프레임 연습)	- 주사위를 3개만 사용하면 스트라이크는 거의 나오지 않고 4개를 사용하면 너무 자주 나오므로 적정선 탐색	· 논리적 · 대인관계 · 개인내	활동판 주사위
2	문제 해결 활동 1	- 숫자볼링(모듬별) 게임하기 - 높은 점수를 얻기 위해 7프레임은 모듬별로 논의하여 정함.	- 설계도와 평가기준을 참고하여 다른 모듬이 생각지 못하는 독특한 방법으로 계산하도록 함.	· 논리적 · 대인관계 · 개인내	활동지
	문제 해결 활동 2	- 반드시 스트라이크를 칠수 있는 세 수 또는 네 수 찾기	- 수업 진행 시간에 따라 시간이 부족할 경우는 8-9프레임은 생략할 수 있음. - 세 수로 스트라이크를 칠수 있는 경우는 1, 2, 4 뿐인데 왜 그런지를 탐구	· 논리적 · 대인관계 · 개인내	설계도 평가기준표
3	확장 하기	- 모듬별 상호 검토 - 모듬별로 변형한 놀이 발표	- 학생 상호 동료평가 실시	· 논리적 · 언어적	평가표
	정리 활동	- 수업내용 정리하기	- 다음 주에는 이미 배운 놀이들을 재구성해도 되지만 기존에 알고 있던 놀이 중에 재구성할 거리를 생각해 오도록 함.	· 논리적 · 개인내	



3. 1차시 활동

프레임	나온 수	만든 식	점수	
1	주사위 3개와 자유연산	1= $(6 \div 3) - 1$ 2= $(6 - 3) - 1$ 3= $(6 - 3) \times$ 4= $(6 - 3) + 1$ 5= 6= “더 이상 불가” 7=		
	처음 나온 세 수: (1, 3, 6)	$(6 \times 1) - 3$		
	스페어용 세 수: (2, 4, 5)	8= $(6 + 3) - 1$ 9= $(6 + 3) \times 1$ 10= $(6 + 3) + 1$ $(6 \times 1) + 3$	6= $(2 \times 5) - 4$ 7= $(4 + 5) - 2$	7 2
2	주사위 4개와 자유연산	1= $(6 - 4) - (2 - 1)$ 2= $(6 - 4) \times (2 - 1)$ 3= $(6 - 4) + (2 - 1)$ 4= $(6 - 4) \times (2 \times 1)$ 5= $(6 - 4) + (2 + 1)$ 6= $(6 - 4) \times (2 + 1)$ 7= $(6 + 4) - (2 + 1)$ 8= $(6 + 4) - (2 \times 1)$ 9= $(6 + 4) - (2 - 1)$ 10= $(6 + 4) \times (2 - 1)$		
	처음 나온 네 수: (1, 2, 4, 6)			
	스페어용 네 수:		X	

표에서 만든 수식들처럼 두 수의 합, 차, 곱, 뺄만을 가지고 연산의 위치를 바꾸기만 해도 1부터 10까지의 수를 쉽게 만들 수 있습니다. 하지만 이는 학생들이 발견해야 할 것이지 가르칠 것은 아닙니다. 수를 조직하여 수식을 만드는 방법에 대한 감각은 단순히 계산만 잘 하는 것보다 더 중요합니다.

4. 숫자 볼링 게임(모둠별 대결) 하기

수업의 시간을 절약하기 위해 개별 게임보다는 4인 또는 6인 1조의 모둠별로 진행하여 다른 팀과 경쟁합니다. 주사위를 3개 던져 나온 수를 가지고 모듬원 중 어느 누구 한 명이라도 1부터 10까지의 수를 만들면 공용 기록지에 표시하고, 시간이 너무 많이 걸린다고 생각하면 스트라이크 또는 스페어처리를 못하더라도 다음 프레임으로 넘어갈 수 있습니다. 전체 게임 시간(40분)안에 더 많은 프레임으로 진행하거나 스트라이크 또는 스페어를 많이 하여 높은 점수를 얻는 팀이 이깁니다. 따라서 팀원들이 역할을 잘 분담하면서 시간을 단축할 필요가 있습니다.

※ 시간 점수: (수업시간에 따라 5프레임까지만 게임을 실시하거나 10프레임까지 끝나지 않아도 중간에서 종료할 수 있음) 각 프레임당 약 5분의 지정된 시간이 되면 게임 기록지를 정리하여 가장 빨리 제출한 팀 순으로 30, 20, 15, 10, 5, 3점의 시간 점수를 부여한다. 이런 시간 점수를 미리 공지하면 게임의 진행을 빨리 할 수 있고 대충 계산하더라도 시간 점수를 얻을지 더 꼼꼼히 계산하여 스페어나 스트라이크를 많이 할지를 모듬에서 스스로 판단할 수 있다.

※ 제출한 순서대로 게임 기록지를 다른 팀과 바꾸어 계산이 잘못된 곳이 있는지 상호 검토하도록 한다. 상대팀의 계산이 틀린 곳이 발견되면 바르게 고쳐주고, 건당 1점씩 상대팀에서 점수를 빼앗아 올 수 있다.

Think+

어떤 프레임에서 스페어로 표시했다가 나중에 한 식에서 계산이 잘못되었다고 발견되면 그 프레임에서의 누계는 9점이 아니라 뒷 프레임의 점수를 합산해 놓은 것까지 수정해야 한다. 따라서 하나의 계산이 잘못되면 많은 점수가 깎인다.

★ 모둠별 숫자볼링게임 기록지

모둠별 숫자볼링게임 방법		후사위 3개와 자유연산	후사위 4개와 자유연산	4개와 반드시 (×)포함	4개와 반드시 (÷)포함	4개와 반드시 (×, ÷)포 함	4개와 반드시 (+, -)포 함	자유연산 이외 표별로 정하기	시각이 부족하면 10표레이용으로 진행		후사위 3개와 자유연산
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
표 임	나 온 수	만 든 식				표 임	나 온 수	만 든 식			
1	후사위3 개와 자유연산	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=					2	후사위4 개와 자유연산	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=		
	나온 수										
3	후사위4 개와 (×)포함	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=					4	후사위4 개와 (÷)포함	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=		
5	4개와 반드시 (×, ÷) 포함	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=					6	4개와 반드시 (+, -) 포함	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=		
7	표별로 정하기	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=					8	표별로 정하기	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=		
9	표별로 정하기	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=					10	후사 위3 개와 자유연산	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=	1= 2= 3= 4= 5= 6= 7= 8= 9= 10=	



모둠별 점수판(종합표)

	후사위 사용 방법	3개와 자유연산	4개와 자유연 산	4개와 (×)포함	4개와 (÷)포함	4개와 (×, ÷)포 함	4개와 (+, -)포 함	자유연산 이외 표별로 정하기	시간이 부족하면 10프레임으로 진행	3개와 자유연산	종합평가						
											계산 시간 보너스	교과 검토점 수	종합 순위				
1표	프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
	득점																
	누계점수																
2표	프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
	득점																
	누계점수																
3표	프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
	득점																
	누계점수																
4표	프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
	득점																
	누계점수																
5표	프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
	득점																
	누계점수																
6표	프레임	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
	득점																
	누계점수																

[확인] 우승 팀과 꼴지 팀의 점수판을 비교해 보면서 고득점을 얻기 위한 방법(전략)을 추측해 봅시다.

숫자볼링 게임을 활용한 활동을 위해서는 아래의 내용을 고려하면서 이를 응용하여 진행할 수 있습니다.

교육활동 안내

Guide

수업 시간에 여유가 없을 때는 4~6인의 팀원들이 각자 만든 것을 모아 팀별로 완성하면 된다. 각 팀에게 숫자볼링게임 기록지를 한 장씩 더 복사해서 나누어 주고 개인이 만든 값들을 ‘모둠별 기록지’ 한 장에 모아서 제출하도록 한다.

숫자볼링 게임의 이해를 위해 개인적으로 연습해 본 값들을 팀별로 모아 1, 2프레임에 적는다.

세 수를 사용하면 스트라이크가 거의 나오지 않고 네 수를 사용하면 스트라이크가 너무 쉽게 나오므로 적당한 난이도를 유지하기 위해 3~6프레임에서는 한 두 개씩의 지정된 연산을 반드시 사용하도록 한다.

7~9번 프레임에서는 자유연산 이외에 팀별로 어떤 연산을 사용할지를 정하도록 하며 각 팀에서 생각해낸 방법이 다른 모둠에서 사용하지 않은 것이라면 10점의 보너스를 준다. 시간 내에 완성하려면 팀원들 간의 역할분담(팀웍)과 순발력이 필요하다.

각 모둠별 점수판(종합표) 틀을 칠판에 미리 적어놓고 학생들이 나와서 적도록 한다.

8~9번 프레임은 시간이 모자라면 건너뛰어도 무방하다. 이때는 8~9번 프레임은 없는 것으로 생각하고 8개 프레임 240점을 만점으로 계산하면 된다.

8~9번 프레임까지 하는 경우는 학생의 수준에 따라 거듭제곱이나 음수, 제곱근 또는 계승(!) 등 자신이 알고 있는 수의 계산 방법을 사용할 수 있지만, 반드시 다른 학생들에게 그 해법을 설명하고 동의를 얻도록 한다.

생각 더하기

Question

내가 잘못 계산한 한 곳이 어떤 영향을 줄까? 예를 들어, 한 프레임에서 스트라이크를 쳤다고 생각했는데 그 계산이 틀렸다면 점수 계산이 어떻게 변할까?

==> 아래 점수표는 2번 프레임에서 스트라이크를 쳤다고 했던 곳에 오류가 있어 9점으로 고치면서 22점의 점수차를 가져오게 된다.

1	2	3	4	5	
7				8	0
20	50	78	96	104	

→

1	2	3	4	5	
7	9			8	0
19	28	56	74	82	

주의: 계산이 한 곳이라도 틀리면 나중에 다른 팀과 교차 검토할 때 벌점을 받아 각 프레임별 점수뿐만 아니라 스페어나 스트라이크 처리가 안 되어 전체 점수가 급격히 무너질 수 있고 상대팀에게 보너스 점수를 줄 수 있음을 미리 경고해 둔다.



☺ □ 문제를 풀어 봅시다.

1. 정육면체 주사위 3개로 진행하는 숫자볼링게임에서 (시간의 제한이 없다고 할 때) 반드시 스트라이크를 칠 수 있는 세 수를 모두 구하시오.
2. 정육면체 주사위 4개로 진행하는 숫자볼링게임에서 (시간의 제한이 없다고 할 때) 반드시 스트라이크를 칠 수 있는 네 수를 모두 구하시오.

교육활동 안내

Guide

정육면체 주사위 3개 또는 4개를 사용하여 스트라이크를 칠 수 있는 수들을 찾아보도록 한다.
7~9프레임에서 자기 팀이 사용한 독특한 계산 방법이 무엇인지를 발표하고 그것이 어떤 점에서 유리한 지를 토론해 보도록 한다.
만약, 독특한 연산 방법을 사용하였다면 그것을 다른 학생들이 이해할 수 있도록 설명해 주어야 한다.

생각 더하기

Question

- 정육면체 3개를 사용하여 스트라이크를 칠 수 있는 경우는 1, 2, 4뿐이다. (1, 2)만으로 1, 2, 3까지 만들 수 있으므로 다음으로는 4가 필요하다. (1, 4)로는 3, 4, 5의 기본 수를 만들 수 있으므로 여기에 곱하기까지 사용하면 10까지 만들 수 있다. 일정한 간격으로 이루어진 수라야 덧셈과 뺄셈만으로 기본수를 만들 수 있기 때문이다. 만약 팔면체의 세 수를 사용한다면 1, 2, 4를 우선 택하고 이것으로 덧셈과 뺄셈만으로 7까지 빠짐없이 만들 수 있으므로 다음으로는 8을 택하는 것이 유리할 것이다.
- 정육면체 4개를 사용하여 스트라이크를 칠 수 있는 경우는 많이 있다. 이 경우 넷 중 둘을 적당히 조절하여 1, 2, 4의 세 수만 만들 수 있으면 되기 때문이다.

Think⁺

덧셈과 뺄셈만으로 7까지 빠짐없이 만들 수 있는 세 수는 무엇인가?

학습 정리

1. 숫자볼링게임을 통해 개인별로 효율적인 수식을 만들어 보는 활동을 하려면 프레임의 수를 줄여야 합니다. 이 때 숫자볼링게임에서 사칙계산(또는 자유연산)을 할 때 체계적으로 수를 분류하면서 분석, 종합하는 것이 유리함을 상기하고 기준에 따른 분류하면 좋다는 수학적 생각의 좋은 점을 강조할 필요가 있습니다.
2. 하지만 모둠별로 협동하면서 볼링의 고득점 전략인 연속인 스트라이크를 치기 위한 간편하면서도 독특한 계산법을 자유롭게 만들어 보는 ‘업그레이드 숫자볼링 게임’에 초점을 맞추어도 됩니다. 이 경우 모둠별 산출물을 평가한 후 다른 모둠을 통해 자기 모둠의 활동을 반성해 보는 것도 매우 유익할 것입니다.
3. 하나의 주제 활동을 마치고 나면 그 활동에서 익혔던 ‘What if ~ (not)?’ 전략을 사용하여 생활 속에서 여러 가지 게임의 규칙이나 조건을 바꾸어 새롭게 변형해 볼거리가 있는지 찾아보도록 합니다.



학습 평가

1. 숫자블링게임을 통한 수식 만들기 지도에서 나타날 수 있는 게임 변형 사례들 중 가장 부적절한 것을 하나 고르시오.

- ① 사례 1: 'What if~(not)' 전략에 따라 각 모듈별로 독특한 숫자블링 게임 방법을 만들도록 한 뒤 가장 재미있는 방법을 제안한 모듈을 선정하였다.
- ② 사례 2: 블링게임의 점수 계산법이 어려워서 각 프레임별로 주사위의 종류나 개수를 다르게 하면서 옳게 만든 식의 개수만으로 점수를 매기는 단순 계산법을 택했다.
- ③ 사례 3: 숫자블링게임의 핀의 개수는 중요하지 않으므로 15개의 핀을 사용할 수는 있지만 모든 프레임에서 동일하게 1부터 15까지의 수식을 만들 필요는 없으므로 두 프레임에서만 15개의 핀을 사용하도록 하되 그 두 프레임은 모듈별로 정하도록 했다.
- ④ 사례 4: 한 자리 자연수만 사용한 수식을 만들 필요는 없다고 하면서 2와 5가 나올 때를 예를 들어 설명하면서 두 자리 수인 25나 52, 소수인 2.5나 5.2도 사용할 수 있도록 했다.
- ⑤ 사례 5: 주사위의 개수를 더 많이 늘려보자는 제안이 있었지만 여분의 주사위가 더 없어서 숫자블링게임을 중단하고 똑같은 종류의 주사위 4개를 던져서 수를 얻는 방법과 두 개씩의 주사위를 두 번 던져서 수를 얻는 방법은 동등한지를 토론해 보았다.

2. 1부터 10까지의 수를 만드는 숫자블링게임에서 갑은 정팔면체 주사위 4개를 던져서 (1, 2, 4, 8)을 얻었고 을은 정육면체 주사위 3개를 이용하여 (1, 2, 4)를 얻었다. 다음 중 두 사람 중 누가 더 유리한지를 가장 옳게 판단한 경우는?

- ① 3개보다는 4개의 수를 자유자재로 사용할 수 있으므로 갑이 더 유리하다.
- ② 4개 중 일부만 사용하는 것이 아니라 모든 수를 다 사용해야 하므로 갑이 더 불리하다.
- ③ 주사위 3개를 이용하여 나온 (1, 2, 4)는 최상의 조합이므로 을이 확실히 유리하다.
- ④ 식 만들기 능력에 따라 승패가 결정되므로 주사위에서 어떤 수가 나왔는지는 게임의 유·불리에 영향을 주지 않는다.
- ⑤ 을의 경우 스트라이크를 칠 수 있는 경우의 수이지만 을이 식 만들기 능력이 뛰어나지 못하다면 반드시 더 유리하다고 할 수는 없다.

06차시: 매지믹서

학습 안내



◆사용할 수 있는 수: 1, 2, 4, 5, 6

◆만들어야 하는 수: 23

① $6 \times 5 - 4 - 2 - 1 = 23$

②

1, 2, 4, 5, 6을 사용하여 23을 만들 수 있는 방법은 많습니다. ①의 경우는 사칙계산만 사용하는 것이지만 ②는 거듭제곱, ③은 제곱근, ④는 계승(팩토리얼)까지 사용할 수 있음을 보여줍니다. 그 말은 순수하게 사칙계산만 사용해야 하는 것이 아니라 생각하기에 따라서는 수준별 독특한 방식으로 여러 가지 수식을 만들 수도 있음을 의미합니다. 그렇다면 2와 5를 낱알의 수가 아니라 두 자리값으로 활용하여 25 또는 52로도 사용한 $25 - (6 - 4) \times 1 = 23$ 이나 로그를 사용한 $(5 + 6) \times$

본 활동은 이스라엘의 대표적인 교구업체인 오르다(Orda)에서 나온 매지믹서(magimaixer)라는 사칙혼합계산용 교구입니다. '수를 섞어서 신기하고 다양한 식을 만드는 마법의 믹서기'라는 뜻으로 매직 믹서(magic mixer)인데 이를 간단히 줄여서 매지믹서라고 부르는 것입니다.

원래 이 제품을 소개하는 설명서에는 주변의 흰색 주사위에 나오는 5개의 수들을 더하거나 빼거나 곱하거나 나누어 두 검은색 주사위에 나오는 두 수의 합을 만들라고 되어있습니다. 하지만 '왜 더하기만 하지?', '왜 7개의 주사위뿐이지?', '왜 가운데만 십의 자리수지?', '왜 정육면체 주사위만 사용하지?' 등과 같이 제품의 속성에 대한 의문을 가지고 각각에 대해 'What if ~(not)' 전략을 적용해 봅시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해의 측면) 매지믹서의 활용법을 이해합니다.
2. (기능과 활동의 측면) 매지믹서에 나타난 수들에 사칙계산을 적용하여 빠르고 정확하게 식을 만들 수 있으며 매지믹서를 다양하게 변형하여 응용할 수 있습니다.
3. (수학적 사고의 측면) 빠르고 정확하게 수식을 효율적으로 만들기 위해서는 수감각을 활용하여 수를 조직적으로 구성할 수 있게 됩니다.
4. (태도와 의지의 측면) 매지믹서의 속성에 'What if ~(not)'의 전략을 적용하여 다양한 변형 매지믹서를 만들어 보려는 태도를 갖게 됩니다.



학습 내용

매지믹서의 사용법에 대해 알아보시다.

이 제품의 사용 설명서에는 ‘주변의 흰색 주사위에 나오는 5개의 수들을 더하거나 빼거나 곱하거나 나누어 두 검은색 주사위에 나오는 두 수의 합을 만들라.’는 간단한 설명과 함께 몇 가지의 가능한 수식이 적혀있습니다. 예를 들어, 흰색이 2, 4, 4, 5, 6이고 검은색이 40과 6일 때 7가지의 예시들이 적혀있습니다. ①의 경우는 사칙계산 중 더하기와 곱하기만 사용하는 것이지만 ②~⑤는 ()를 포함하는 혼합계산, ⑥은 제곱근, ⑦은 제곱근, ⑧은 계승(팩토리얼)까지 사용할 수 있음을 보여줍니다.

매지믹서는 단순히 계산연습만 익히기 위한 교구는 아닙니다. 모든 교구는 원래 그것을 사용하기 위한 목적이 있지만 이것을 어떻게 변형하여 활용하느냐에 따라 다양한 부가가치를 만들어 낼 수 있습니다.

1. 매지믹서의 사용법

매지믹서(magimaixer)는 이스라엘의 대표적인 교구업체인 오르다에서 개발하고 오르다코리아에서 단품으로 보급해 왔던 사칙혼합계산용 교구입니다. ‘수를 섞어서 신기하고 다양한 식을 만드는 마법의 믹서기’라는 뜻으로 원래는 매직 믹서(magic mixer)인데 이를 간단히 줄여서 매지믹서라고 부릅니다.

이 제품의 사용 설명서에는 “주변의 흰색 주사위에 나오는 5개의 수들을 더하거나 빼거나 곱하거나 나누어 두 검은색 주사위에 나오는 두 수의 합을 만들라.”는 간단한 설명과 함께 몇 가지의 가능한 수식이 적혀있습니다.

◆ 사용할 수 있는 수(흰색): 2, 4, 4, 5, 6

♠ 만들어야 하는 수(검정색): 46

- ① $4 \times 6 + 4 \times 5 + 2 = 46$
- ② $(5+6) \times 4 \times 4 - 2 = 46$
- ③ $(4 \times 5) \times (4 \div 2) + 6 = 46$
- ④ $(4 \times 5) \times (4 - 2) + 6 = 46$
- ⑤ $(4+4) \times 2 + 5 \times 6 = 46$
- ⑥ $\sqrt{4} \times \sqrt{4} \times 2 \times 5 + 6 = 46$
- ⑦ $2^6 - \sqrt{4} \times (5+4) = 46$
- ⑧ $4! + 5 \times 6 - 2 \times 4 = 46$



2, 4, 4, 5, 6을 사용하여 46을 만들 수 있는 방법은 많습니다. ①의 경우는 사칙계산 중 더하기와 곱하기만 사용하는 것이지만 ②~⑤는 ()를 포함하는 혼합계산, ⑥은 제곱근, ⑦은 제곱근, ⑧은 계승(팩토리얼)까지 사용할 수 있음을 보여줍니다.

매지믹서는 단순히 계산연습만 익히기 위한 교구는 아닙니다. 모든 교구는 원래 그것을 사용하기 위한 목적이 있지만 이것을 어떻게 변형하여 활용하느냐에 따라 다양한 부가가치를 만들어 낼 수 있습니다.

2. 매지믹서 연습하기

매지믹서를 이용하여 제한 시간 안에 다음을 완성하시오.

설명: 시계의 시작버튼을 누르면 매지믹서에 수가 나타납니다.

  수는 무작위로 나타나며 1차, 2차, 3차에 걸쳐 시도를 해 볼 수 있도록 해주세요.		
(1) 식을 빨리 만들기 (제한 시간 1분)	1차	내가 완성한 시간: ()초
	2차	내가 완성한 시간: ()초
	3차	내가 완성한 시간: ()초
(2) 식을 많이 만들기 (제한 시간 5분)	1차	내가 완성한 수식: ()개
	2차	내가 완성한 수식: ()개
	3차	내가 완성한 수식: ()개

위와 같은 모양의 3차칸에 7개의 정육면체 주사위가 임의로 나타나도록 한다. 가운데는 10부터 60까지, 둘레에는 1부터 6까지.('이곳을 누르라'는 지시와 깜빡이를 주고 초시계를 주어 초시계를 클릭하면 매지믹서가 나타나고 입력하는 값에 따라 아래의 음성과 그에 해당하는 반응이 나타난다.)

(1) 30초 이내에 만들면 “와우, 대단합니다.” 60초 이내는 “훌륭합니다.”, 1분 초과는 “좀 더 분발해야겠습니다.”

(2) 5분간 7개 이상이면 “와우, 대단합니다.”, 4~6개는 “훌륭합니다.”, 3개 이하는 “좀 더 분발해야겠습니다.”



학습 정리

1. 매지믹서(magimaixer)는 이스라엘의 교구업체인 오르다(Orda)에서 단품으로 개발한 사칙혼합계산용 교구입니다. ‘수를 섞어서 신기하고 다양한 식을 만드는 마법의 믹서기’라는 뜻으로 매직 믹서(magic mixer)라고 해야 하는데 이를 간단히 줄여서 매지믹서라고 부르는 것입니다.
2. 원래 이 제품은 5개의 흰색 주사위에 나오는 수들을 더하거나 빼거나 곱하거나 나누어 2개의 검은색 주사위에 나오는 두 수의 합을 만드는 것입니다. 하지만 ‘왜 더하기만 하지?’, ‘왜 7개의 주사위뿐이지?’, ‘왜 가운데만 십의 자리수지?’, ‘왜 정육면체 주사위만 사용하지?’ 등과 같이 제품의 속성에 대한 의문을 가지고 각각에 대해 ‘What if~(not)’전략을 적용하여 새롭고 발전적인 활용법을 만들 수 있습니다.
3. 식을 만들 때 사칙계산 중 손 쉬운 더하기나 빼기, 곱하기 중 일부만 사용하지 않고 게임자의 지식 수준에 따라 괄호를 사용한 혼합계산과 거듭제곱이나 제곱근, 계승(팩토리얼)까지 사용할 수도 있습니다. 정하기에 따라서는 두개의 수를 사용하여 두 자리수를 만들거나 로그, 조합, 미적분 등의 기호를 사용할 수도 있습니다.
4. 이처럼 매지믹서는 단순히 계산연습만 익히기 위한 교구는 아닙니다. 모든 교구는 원래 그것을 사용하기 위한 목적이 있지만 이것을 어떻게 변형하여 활용하느냐에 따라 다양한 부가가치를 만들어 낼 수 있습니다.

학습 평가

1. 매지믹서에 대한 설명 중 가장 옳지 못한 것을 하나 고르시오.
 - ① 매지(magimaixer)는 ‘마법의 믹서기’라는 뜻으로 magic mixer의 줄임말이다.
 - ② 매지믹서는 모든 주사위를 사용하여야 하며, 특정한 두 주사위에 나타나는 수들의 합을 만들어야 한다.
 - ③ 매지믹서는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 자유롭게 이용하는 4칙 혼합계산 연습용 수학학습교구이다.
 - ④ ‘What if~(not)’전략에 따라 매지믹서 주사위의 모양이나 개수, 수식 계산방법 등을 다양하게 변형하여 활용할 수도 있다.
 - ⑤ 매지믹서는 계산값을 구하는 것보다 필요로 하는 값의 수식을 만들어 내어야 하므로 계산능력보다는 수 감각과 다양한 연산의 활용능력이 뛰어난 사람에게 유리하다.
2. 오른쪽 매지믹서에 나타나는 5개의 수(1, 2, 3, 4, 5)를 모두 사용하여 (20+3)을 만든 식이 잘못 된 것은?
 - ① $5 \times 4 + 3 \times (2-1) = 23$
 - ② $5 \times 3 + 4 \times 2 \times 1 = 23$
 - ③



07차시: 매지믹서를 활용한 수감각과 연산의 활용 지도

학습 안내

4명의 초등학교 5학년 정도의 학생들(A, B, C, D)이 종이와 연필을 들고 둘러앉아 있다. 그 중 A학생이 매지믹서를 오른손으로 잡고 왼 손바닥 위에 세 번 정도 부비면서 돌린 다음 책상 위에 탁 올려놓고는 흰색의 숫자를 작은 값부터 큰 소리로 “1, 2, 4, 5, 5”라고 읽는다. 그러면 옆에 있는 B학생은 ‘더하면 54’, C학생은 ‘빼면 46’, D학생은 ‘곱하면 200, 나누면 4분의 50’이라고 말하면서 각자 아래의 수식을 적는다.



$$B\text{학생: } 50+4 = 5 \times 5 \times 2 \times 1 + 4$$

$$C\text{학생: } 50-4 = (5 \times 2 \times 4) + 5 + 1$$

$$D\text{학생: } 50 \times 4 = (5 \times 4) \times (5 \times 2) \times 1$$

$$A\text{학생: } 50 \div 4 =$$

흰색 주사위뿐만 아니라 검은색 주사위 간에도 연산을 적용하여 자신이 생각하기에 유리한 값을 만들 수도 있습니다. 각 수들 간에 어떤 연산을 사용할 수 있는지는 그 학생의 학습 진도나 사고 수준뿐만 아니라 수와 연산에 대한 감각이 결정합니다. 수업의 진도에 맞추기 위해 특별히 제한된 연산만 사용하도록 요구할 수는 있지만 오히려 자신이 사용하는 연산의 종류를 무제한으로 열어둘 때 보다 유연하고 독창적인 사고가 드러나게 됩니다.

이상 네 명 학생들의 경우처럼 흰색 주사위뿐만 아니라 검은색 주사위 간에도 연산을 적용하여 자신이 생각하기에 유리한 값을 만들 수도 있습니다. 각 수들 간에 어떤 연산을 사용할 수 있는지는 그 학생의 학습 진도나 사고 수준뿐만 아니라 수와 연산에 대한 감각이 결정합니다. 수업의 진도에 맞추기 위해 특별히 제한된 연산만 사용하도록 요구할 수는 있지만 오히려 자신이 사용하는 연산의 종류를 무제한으로 열어둘 때 보다 유연하고 독창적인 사고가 드러나게 됩니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해의 측면) 매지믹서의 활용법을 이해합니다.
2. (기능과 활동의 측면) 매지믹서에 나타난 수들에 사칙계산을 적용하여 빠르고 정확하게 식을 만들 수 있으며 매지믹서를 다양하게 변형하여 응용할 수 있습니다.
3. (수학적 사고의 측면) 빠르고 정확하게 수식을 효율적으로 만들기 위해서는 수감각을 활용하여 수를 조직적으로 구성할 수 있게 됩니다.
4. (태도와 의지의 측면) 매지믹서의 속성에 ‘What if ~(not)’의 전략을 적용하여 다양한 변형 매지믹서를 만들어 보려는 태도를 갖게 됩니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

㉑. 자유로운 연산 사용하기

아무리 계산능력이 뛰어난 사람이라도 매지믹서에 나타나는 수들이 특수한 경우는 요구하는 식을 만들지 못할 수 있습니다. 예를 들어, 흰색은 5개가 모두 1이고 검은색은 60과 6이 나왔다면 1, 1, 1, 1, 1을 이용하여 66을 만들거란 쉽지 않습니다. 이처럼 수감각과 연산의 활용능력보다는 주사위가 나타나는 운에 의해 성공과 실패가 더 결정된다면 아쉬움이 남을 것입니다. 하지만 60과 6에도 자유로운 연산을 사용하여 $60 \div 6 = 10$ 을 만들 수 있다고 한다면 두 자리 수를 활용하여 $11 - (1 \times 1) = 10$ 을 만드는 학생도 나올 수 있을 것입니다.

다음의 매지믹서에 대해 검은색 주사위에도 연산의 종류나 방법을 제한하지 말고 여러 가지 식을 만들어 봅시다.



<답안으로 보여줄 수 있는 가능한 식들>

- ① $20 + 3 = (5 + 1) \times 4 - (3 \div 3), (4 - 1) \times (3 + 3) + 5$
- ② $20 - 3 = 5 \times 3 + (4 + 1 - 3),$

2. 'What if~(not)'전략에 따라 <매지믹서> 변형하기

<기본 매지믹서>

5개의 흰 주사위들에 사칙계산을 사용하여 2개의 검은색 주사위의 수를 합한 값을 만든다.

매지믹서 역시 'What if~(not)' 전략에 따라 던지는 주사위의 개수나 모양, 색깔, 연산의 종류, 수를 사용하는 방법 등을 수정 또는 변경할 수 있고 자신의 수준에 맞게 재구성할 수 있는 여지가 많아 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있는 Re-Creation 수학에 적합한 놀이입니다. 'What if~(not)' 전략에 따른 각 질문에 따라 가능한 해답을 먼저 생각해 봅시다.

그리고 나서 **(예시)** 아이콘을 눌러 가능한 답안을 확인해 봅시다.

(1) 검은색 주사위들 간에도 연산을 적용하면 안될까?

(예시) 당연히 가능합니다. 그러면 훨씬 다양한 식을 많이 만들 수 있습니다. 하지만 검은색 주사위들 간에도 특정한 연산을 사용하도록 하기보다는 자유롭게 선택하여 사용하도록 하면 훨씬 더 유연하고 독창적인 생각을 이끌어 낼 수 있습니다.

(2) 사칙계산만 사용해야 하는가?

(예시) 사칙계산뿐만 아니라 다양한 연산을 자유롭게 사용해도 됩니다.

(3) 왜 정육면체 주사위만 사용하지? 정다면체 주사위를 사용해도 될 텐데!

(예시) 이것은 아주 자연스런 질문이며 당연합니다. 가운데에만 정팔면체 주사위를 두어 80까지의 수를 사용할 수 있도록 할 뿐만 아니라 주위의 주사위들도 모두 정다면체로 바꿀 수 있습니다. 가운데에 가장 큰 정20면체 주사위를 두고 그 둘레에 다양한 정다면체 주사위를 배치해도 됩니다.

(4) 검은색 주사위를 3개 사용해도 될까?

(예시) 검은색 주사위를 가운데 하나 놓고 2개를 이웃하게 배치하는 것보다 맞은편에 놓고 검은색의 양쪽에 흰색 주사위를 2개씩 배치해도 됩니다.

(5) 왜 7개의 주사위만 사용하지? 주사위의 개수를 조절한다면?

(예시) 주사위의 개수를 늘린다는 것은 정육형배열이 아닌 팔각형이나 입체의 배열도 가능하다는 뜻입니다. 정육면체나 정팔면체의 각 꼭지점에 주사위를 둘 수도 있습니다.

(6) 연산의 개수를 제한하거나 특정한 연산을 반드시 사용하도록 할 수도 있을까?

(예시) 연산을 자유롭게 사용하는 것도 좋지만 때로는 사칙연산 부호를 반드시 한번씩은 사용하도록 하거나 검은색에 사용한 연산은 흰색에 사용할 수 없다는 조건을 둘 수도 있습니다.

(7) ‘행운’의 보너스 찬스는 어떤 경우로 정할까?

(예시) 6개가 모두 같은 (1,1,1,1,1,1)이 나올 확률은 매우 희박하지만 그것을 가지고 어떤 수식을 만들기는 매우 어렵습니다. 따라서 특별한 경우의 수가 나올 때 꼭박이 아닌 대박의 찬스로 수식을 만들지 않고 그냥 패스를 시킬 수도 있습니다. 그 외에 3 pairs(1,1, 2,2, 3,3), 2 triples(3,3,3, 4,4,4), 6연속 (1,2,3,4,5,6), 소수들만, 약수와 배수들끼리 등과 같이 특별한 수가 나올 때도 행운의 기회로 인정하면 게임에 흥미가 더해질 수 있습니다.



3. 변형 매지믹서 만들기

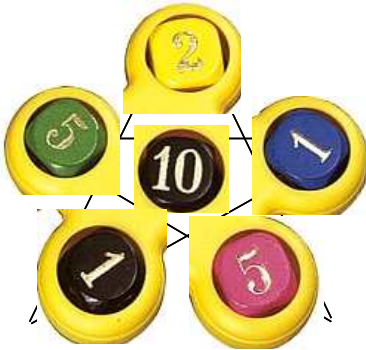
오르다 회사에서 나온 기존의 magimixer는 수의 연산과 혼합계산을 이용한 교구였는데 이를 응용하면 단어 만들기용 word magic mixer도 가능합니다. 하지만 우리는 언어나 과학 등의 다른 분야가 아니라 수리적인 관점에서 새로운 변형 매지믹서를 만들어 봅시다.



(1) 검은색 주사위는 모두 내부로 넣기

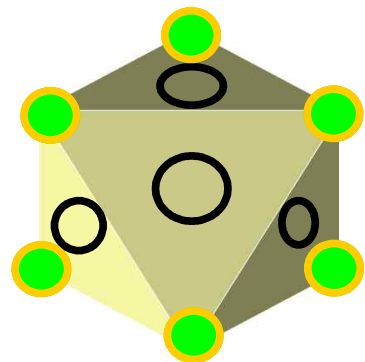


(2) 매지믹서의 모양을 오각형으로 바꾸기



(3) 정육면체 또는 정팔면체의 각 꼭지점과 면에 주사위를 배치한 입체형

- 꼭지점에 있는 세 수를 사용하여 각 면 위의 검은색 수 만들기
- 이웃하는 세 면의 검은색 수들을 이용하여 맨 위의 검은색 수 만들기
- 주사위 윷놀이와 숫자볼링게임에서도 사용할 수 있는 만능 주사위로 활용하기



학습 정리

1. 아무리 계산능력이 뛰어난 사람이라도 매지믹서에 나타나는 수들이 특수한 경우는 요구하는 식을 만들지 못할 수도 있습니다. 예를 들어, 흰색은 5개가 모두 1이고 검은색은 60과 6이 나왔다면 1, 1, 1, 1, 1을 이용하여 66을 만들기관 쉽지 않습니다. 이처럼 수감각과 연산의 활용능력보다는 주사위가 나타나는 운에 의해 성공과 실패가 더 결정된다면 아쉬움이 남을 것입니다. 하지만 60과 6에도 자유로운 연산을 사용하여 $60 \div 6 = 10$ 을 만들 수 있다고 한다면 두 자리 수를 활용하여 $11 - (1 \times 1 \times 1) = 10$ 을 만드는 학생도 나올 수 있을 것입니다.
2. 게임의 운영방법에 따라서는 매지믹서에서 특별한 경우의 수들이 나타나는 경우(예를 들어, 모두 같은 수가 나온 경우; 2 triples(3,3,3, 4,4,4); 3 pairs(1,1, 2,2, 3,3); 연속(1,2,3,4,5,6); 모두 홀수이거나 짝수, 소수들만 나오는 경우; 약수와 배수의 관계에 있는 수들만 나온 경우 등) 수식 만들기만 고집하기보다는 행운의 보너스로 처리하여 확률계산이나 흥미로운 요소로 활용하도록 하며 매지믹서를 주사위윷놀이나 슛볼링게임 등에 사용하는 만능 주사위로 활용해도 됩니다.
3. 매지믹서에 ‘What if ~(not)?’의 방법으로 주사위의 개수나 종류, 모양, 계산 방법 등을 변경하면서 게임자의 수준에 맞게 놀이를 재구성할 수도 있습니다. 매지믹서를 이용하여 수학을 Re-Creation해 보려는 의지적인 생각과 태도는 수감각을 익히고 수식을 만드는 지적인 능력이나 계산을 잘하는 기능적인 학습 못지 않게 중요한 부분입니다.



학습 평가

1. 매지믹서를 활용하여 지도할 수 있는 내용과 방법에 대한 설명 중 가장 옳지 못한 것을 하나 고르시오.

- ① 매지믹서로 혼합사칙계산을 하는 것보다는 다양한 식을 만드는 데 활용해야 한다.
- ② 학습자의 수준과 학습목표에 따라서는 사전에 정하지 않은 방식의 수식을 만드는 것을 제한할 필요가 있다.
- ③ 사용하는 연산과 수식은 특정한 경우로 제한하기보다는 자유롭게 사용하도록 허용하여 보다 유연하고 독특한 사고를 발휘하도록 한다.
- ④ 계산능력이 뛰어난 사람은 매지믹서에 어떤 주사위가 나타나더라도 모든 식을 만들 수 있으므로 충분한 시간을 주어야 한다.
- ⑤ 게임의 운영방법에 따라서는 특별한 경우의 수들이 나타나는 경우 수식 만들기만 고집하기보다는 행운의 보너스로 처리하여 확률계산이나 흥미로운 요소로 활용하도록 한다.

2. 아래의 매지믹서에 주어진 5개의 수(1, 2, 4, 5, 5)와 2개의 검은색 주사위에 나타난 수 (5, 10)을 이용하여 각각의 수식에 사칙계산의 부호(+, -, ×, ÷)를 한번씩은 반드시 사용하도록 제한하여 만든 식으로 옳은 것은?

- ① $10+5 = 5 \times 5 - (4+1) \times 2$
- ② $10-5 = 5 \times (4+2-5) \div 1$
- ③ $10 \times 5 = (5+4+2-1) \times 5$
- ④ $10 \div 5 =$



08차시: 루미큐브

학습 안내

루미큐브(Rummikub)는 세계적으로 인기 있는 보드게임의 일종으로 자신이 가지고 있는 조각 타일을 정해진 규칙에 맞게 정렬하여 가장 빨리 덜어내는 사람이 이기는 게임입니다. 규칙은 같은 색의 연속되는 수 배열(7-8-9) 또는 다른 색이지만 동일한 수를 짝짓는 배열(7-7-7)하는 것입니다. 이런 규칙에 따라 게임 참여자들은 자신의 타일과 바닥에 놓인 타일의 다양한 배열을 끊임없이 생각해야 합니다. 루미큐브의 규칙은 매우 단순하여 어린 초등학생부터 어른이 함께 참여할 수 있는 게임이면서도 수나 모양의 규칙적인 배열, 덧셈과 배수, 확률 등의 수학적 요소가 숨어있어 수학적 사고력 향상에도 유익한 게임입니다.



학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 루미큐브 속의 여러 가지 수학적 요소를 찾아 관련 문제를 해결 할 수 있습니다.
2. **(기능과 조작)** 루미큐브의 규칙을 활용하여 게임의 승패를 위한 전략을 세울 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 효율적이고 다양한 전략을 사용하여 문제를 해결하는 종합적인 판단과 사고력을 키울 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 규칙을 바꾸어 게임을 변형한 변형 루미큐브를 만들어 보려는 태도와 의지를 갖게 됩니다.



학습 내용

1. 루미큐브 (rummikub)란?

루미큐브는 1930년대 초 이스라엘 Ephraim Hertzano가 루미, 도미노, 체스의 장점들을 합쳐 개발한 보드게임의 일종입니다. 106개로 이루어진 조각들(실제 게임에서는 타일 또는 큐브라고 부름)을 가지고 각 사람이 14개씩 가져가서 자신의 받침대에 올려놓고 자신의 타일 조각을 게임판에 모두 가장 빨리 올려놓는(터는) 사람이 이기는 게임입니다. 게임 인원은 2~4명이며 각 조각에는 1부터 13까지의 수가 적혀있고 각각 4가지의 색깔이 두 쌍씩 있습니다. 숫자 타일은 104개이고 2개의 조커를 포함하여 총 106개의 타일이 한 세트입니다. 조커는 예외적인 규칙을 가지고 있어서 세트를 만들 때 어떤 상황이든 붙일 수 있습니다.



게임자는 제한 시간 안에 정해진 규칙에 따라 자신의 타일을 바닥에 올려놓게 되는데 처음에는 3개 이상의 타일로 등록을 해야 하며, 그 이후로는 자신의 타일만으로 3개 이상 올려놓거나 이미 올려놓은 자신 또는 다른 사람의 타일들에 연결하여 3개 이상 만들어 놓아도 됩니다. 받침대 위에 각자의 타일을 올려놓고 상대방에게 보여주지 않기 때문에 타인의 타일이 몇 개나 남았는지 알 수가 없습니다. 각자 올려놓을 수 있는 타일을 개수의 제한 없이 올려놓을 수 있기 때문에 상대방이 모든 타일을 올려놓기 전에 적절한 시기에 자신의 타일을 올려놓는 전략이 필요한 게임입니다.

게임은 실물게임뿐만 아니라 온라인 게임으로도 즐길 수 있습니다. 루미큐브는 1977년 미국에서 가장 잘 팔리는 게임으로 선정되었고 1991년에 세계 루미큐브 챔피언 대회(WRC-World Rummikub Championship)가 생겨나 3년에 한 번씩 대회를 치르고 있습니다.



1. 루미큐브 미니는 휴대와 보관에 편리한 소형 버전의 루미큐브입니다.
2. 전 세계인이 즐기는 Best Seller 이자 Steady Seller
3. 숫자 배열을 통한 숫자 감각 향상
4. 3년에 한번씩 세계 대회 (WRC) 개최
5. 1980년 독일 올해의 게임 상 수상
6. 1983년 네덜란드 올해의 게임 상 수상
7. 1990년 스페인 올해의 게임 상 수상
8. 1993년 폴란드 올해의 게임 상 수상

2. 루미큐브의 구성과 게임방법

(1) 구성

- 인원 : 2-4명
- 내용물:
 - 1에서 13까지의 4가지 색(검정, 오렌지, 파랑, 빨강)의 숫자타일 2세트 : 총 104개
 - 조커 2개(검정, 빨강)
 - 타일 받침대 4개



(2) 게임 방법 다음 동영상 다운하여 사용

<http://tvpot.daum.net/clip/ClipView.do?clipid=18052218>

(3) 용어정리

- 연속 : 색깔이 같은 타일의 숫자가 3개 이상 연속 될 때
- 그룹 : 타일의 색깔은 다르지만 같은 숫자를 가진 타일이 3개 또는 4개 일 때
- 세트 : 연속이나 그룹이 되는 타일
- 등록 : 자신이 가지고 있는 연속이나 그룹이 된 타일들을 바닥에 올려놓는 것을 의미하며 이 타일의 숫자의 합이 30 이상이 되어야 한다. 게임에서는 올린다는 표현을 쓰기도 한다. 등록 후에는 타일의 숫자의 합이 30이 넘지 않아도 세트가 되지만 하면 올려놓을 수 있습니다.
- 턴 : 다른 사람에게 순서를 넘기는 것을 말합니다. 턴의 수를 정해놓고 게임을 하면 타일을 모두 올려놓지 않더라도 모두에게 순서가 돌아간 후 남아있는 타일 속의 수를 합산하여 순위를 결정합니다.



3. 게임의 실제

(1)최초 등록하기: 최초 등록을 할 때에는 자신이 가진 타일로만 가능하며 다른 사람이 올려놓은 타일과 조합은 할 수는 없습니다. 등록 시에는 아래 조건들을 이용하여 숫자 합이 30 이상이 되어야 합니다.



조건	설명
그룹 (Group)	동일 숫자이면서 색상이 다른 타일 3개나 4개인 경우
연속(Run)	동일 색상의 연속되는 숫자 타일 3개 이상의 세트

(2)올려놓기 : 최초 등록 이후에는 숫자 합에 상관없이 아래 조건의 타일들을 올려놓을 수 있습니다.

조건	설명
그룹 (Group)	동일 숫자이면서 색상이 다른 타일 3개나 4개인 경우
연속(Run)	동일 색상의 연속되는 숫자 타일 3개 이상의 세트



*등록 시 주의 사항

- 숫자의 등록은 좌에서 우로만 등록이 가능합니다.
- 상대방이 등록해 놓은 타일이라고 해도 최소 조합의 조건만 무너뜨리지 않으면 나에게 유리하게 마음껏 조합을 변경시킬 수 있습니다.
- 진정한 루미큐브의 재미는 다른 게임자가 이미 등록해 놓은 조합을 이용해서 자신의 타일을 최대한 많이 올려놓는 것입니다. 루미큐브는 여기에서 승부가 갈리게 됩니다.

(3)붙이기

붙이기는 최초 등록을 한 유저만 이용 가능하며 테이블에 놓여있는 타일 조합에 자신의 타일을 붙이는 것을 말합니다.

그룹(Group)의 경우 테이블에 놓여있는 타일 외 다른 색상을 소지한 경우 기존 타일에 소지한 타일을 붙일 수 있습니다. 연속(Run)의 경우 테이블에 놓여있는 타일과 연결되는 동일 타일을 소지한 경우 기존 타일에 소지한 타일을 붙일 수 있습니다.



(4)조커 사용

조커는 모든 타일을 대신할 수 있는 일종의 보너스 타일입니다. 숫자 하나가 빠져 조합이 어려울 경우 그 위치에 조커를 삽입하면 조합이 가능해지기 때문에 전략적으로 잘 사용할 수 있습니다. 조커 타일은 숫자 30과 동일하게 계산됩니다.

조커 사용예시

①그룹의 경우



②연속의 경우



③조커만 이용할 경우(조커의 개수 제한 시 불가능한 사례임)





(5) 승패의 결정과 점수 계산 방법

게임마다 게임자 중에 자신의 타일을 가장 빨리 올려놓는 사람이 승자가 되고 다른 사람들은 자신이 가지고 있는 타일들의 수를 합한 값만큼 감점하며 이 점수를 모두 승자가 가져갑니다. 정해진 횟수의 게임이 끝나면 각자의 점수를 합쳐 최종점수가 큰 사람이 우승입니다.

[점수 계산 예시]

	가	나	다	라
1Game	+ 24	-5	-16	-3
2Game	-6	-11	+ 22	-5
3Game	+ 32	-13	-2	+ 47
total	-14	-29	+ 4	+ 39

4. 승리 전략 세우기

(1) 받침대 위에 순서나 그룹으로 타일을 정렬하기

등록을 하지 못하면 게임에 참여할 수 없기 때문에 자신의 받침대에 계속해서 타일이 올려 집니다. 등록을 빨리하고 늦게 하는 것이 게임의 승패를 좌우하지는 않습니다. 이는 자기 순서에서 등록과 동시에 자신이 올릴 수 있는 타일을 모두 올릴 수 있기 때문입니다. 이렇게 되기 위해서는 자신의 받침대 안에서 등록할 타일과 올릴 타일을 정렬하는 일이 중요합니다. 그룹이나 연속의 조합을 빠르게 찾기 위해서는 등록과 마찬가지로 받침대 위의 타일을 연속 또는 그룹으로 분류하여 정렬하는 것이 중요합니다.



(2) 여분의 타일을 남겨두기

등록한 이후에 붙이기를 할 마땅한 타일이 없을 경우를 대비해 자신이 가진 타일 4개의 연속이나 그룹 중에 타일 3개만 올려놓고 네 번째 것을 가지고 있는 것이 유리할 수 있습니다. 그러면 다음 차례에 남은 네 번째 타일을 붙이기 하여 패널티를 받지 않을 수 있기 때문입니다.

(3) 놓여진 다른 타일 활용하기

이미 놓인 타일을 재배열하여 자신의 타일을 붙여 놓는 것은 난이도 높은 승리전략입니다. 이때 타일을 옮겨 붙여도 그룹과 연속의 모양이 유지되어야 합니다.

(4) 조커의 사용

조커는 전체 타일 중에서 2개밖에 없기 때문에 신중하게 사용해야 합니다. 받침대에 있는 조커는 게임의 승패에 아무런 영향을 미치지 못하지만 자신이 올린 조커는 다른 사람이 활용할 수도 있습니다. 그렇기 때문에 조커를 적절한 시기에 조합하여 올리는 것이 게임의 승패를 좌우합니다. 조커는 어떤 타일이라도 대신할 수 있는 장점이 있지만 턴이 종료되거나 누군가 “루미”를 성공시키는 경우에는 개당 "30"으로 취급되기 때문에 순위산정에서 매우 불리하게 적용됩니다.



= 숫자 "30"으로 취급

하지만 조커를 빨리 올려놓지 않고 계속 가지고 있는 것도 하나의 전략이 될 수도 있습니다. 결정적인 순간에 자신의 타일을 모두 동시에 등록할 수 있기 때문입니다. 하지만 이것은 크게 잃을 수 있는 위험이 있음을 명심해야 합니다.

(5) 여러 명이 게임을 할 때는 적은 점수로 지기

루미큐브는 게임의 수로 결정하기도 하고 여러 판의 종합 득점으로 우승을 가리기도 합니다. 종합 득점으로 우승자를 점수 여러 명이 게임을 할 때는 1등이 팀의 모든 점수를 가져가므로 승자와 패자의 점수는 차이가 큼니다. 당연히 이길 수 있는 전략을 세우되 승리를 확신하지 못하는 경우는 적은 점수로 지고 다음 판을 기대하는 것도 고도의 전략입니다. 무리하게 이기려다 큰 점수로 지지 말고 적게 지고 크게 이기는 것은 여러 명의 사람이 여러 판을 전제로 할 때의 좋은 전략이기도 합니다.

5. 루미큐브 체험하기

온라인 게임으로 루미큐브를 경험할 수 있습니다.

http://www.pmang.com/game_casual_top.nwz?ssn=38



- 게임에서는 수준에 따라서 방이 만들어져 있음
- 자신이 방을 만들 수도 있음
- 방을 만들 때 턴의 수와 조커의 수를 조절할 수 있음
- 턴의 수를 조절하여 게임 시간을 단축함



학습 정리

1. 루미큐브는 1930년 이스라엘에서 개발되어 매년 3년마다 '루미큐브 세계대회'가 열릴 정도로 유명한 보드게임입니다.
2. 루미큐브는 1부터 13까지의 숫자가 적힌 4가지 색깔의 타일 두 세트와 2개의 조커를 포함하여 모두 106개의 타일로 구성합니다.
3. 연속, 그룹, 등록, 붙이기 등의 용어와 연속 또는 그룹으로 3개 이상의 타일을 붙여 놓는 규칙이 있습니다.
4. 연속은 같은 색깔로만, 그룹은 다른 색깔로만 사용할 수 있습니다.
5. 자신의 턴에서 올려놓은 타일이 없으면 덤미에서 타일을 하나씩 가져갑니다.
6. 자신의 타일을 가장 먼저 모두 올려놓는 사람이 승리합니다.
7. 순위를 정할 때는 남아있는 타일 속의 숫자를 합산하여 낮은 점수 순으로 순위를 정합니다.
8. 루미큐브는 연속과 그룹 내의 수들을 간단히 계산해야 하는데 이는 단순히 덧셈만이 아닌 곱셈적 생각이 필요하므로 암산에도 도움이 됩니다.
9. 하지만 루미큐브는 승리를 위한 전략이 필요한 일종의 전략 게임입니다.
10. 상황에 따라서는 루미큐브의 규칙을 바꾼 변형된 루미큐브로 게임을 진행할 수 있습니다.



학습 평가

1. 다음 중 최초 등록시 올려놓을 수 있는 조합의 경우를 모두 고르시오.

- ①

11	12	13
----	----	----

 ②

13	11	10	12
----	----	----	----
- ③

7	7	7	7
---	---	---	---

 ④

10	☺	10
----	---	----
- ⑤

7	☺	9	10
---	---	---	----

2. 다음 보기의 설명에 알맞은 용어를 고르시오.

- (1)

11	12	13
----	----	----

 ① 연속 ② 그룹 ③ 세트 ④ 등록 ⑤ 더미
- (2)

1	1	1	1
---	---	---	---

 ① 연속 ② 그룹 ③ 세트 ④ 등록 ⑤ 루미

3. 아래와 같은 상황에서 진희가 취할 수 있는 루미큐브 활동은?

<사례> 진희는 타일을 계속 가져오기는 하지만 자신의 받침대에 10보다 큰 수가 별로 없다는 것에 낙심하다가 마침내 첫 번째 칸의 조커(☺)가 들어오자 다른 두 개의 타일을 포함하여 3개를 내려놓기 위해 어떤 조합으로 이 조커를 사용할지를 고민하고 있다.

☺	1	4	2	9	12	
3	7	10	6	5	6	

- ① 최초등록하기 ② 그룹 만들기 ③ 연속 만들기 ④ 모두 올려놓기(털기) ⑤ 경우의 수



MEMO

09차시: 루미큐브를 통한 조합과 경우의 수 지도

학습 안내

이번 시간에는 지난 시간에 익힌 루미큐브를 수업에 활용할 수 있도록 게임에 숨어있는 수학적 요소를 좀 더 생각해 보면서 이를 수업에 활용할 수 있는 방법과 'What if (not)?'의 전략을 사용하여 새로운 루미큐브를 만들어 보고자 합니다. 본 차시에 나오는 예시 문제들에 대해서도 교사가 숫자나 타일 수, 규칙 등을 바꾸어 새로운 문제로 활용할 수 있어야 합니다. 이를 통해 학습자들에게 변형 루미큐브를 만들어 보려는 의지와 함께 그 속에 들어있는 수학의 원리를 파악하려는 태도가 생겨나기를 기대합니다.



학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 루미큐브 속의 여러 가지 수학적 요소를 찾아 관련 문제를 해결 할 수 있습니다.
2. **(기능과 조작)** 루미큐브의 규칙을 활용하여 게임의 승패를 위한 전략을 세울 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 효율적이고 다양한 전략을 사용하여 문제를 해결하는 종합적인 판단과 사고력을 키울 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 규칙을 바꾸어 게임을 변형한 변형 루미큐브를 만들어 보려는 태도와 의지를 갖게 됩니다.
5. **(학습지도면)** 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 변형을 위한 루미큐브 다시 보기

브라운과 월터가 제안한 속성바꾸기(What if not?) 전략에 따라 변형해 보고자 합니다. 브라운과 월터는 체계적으로 문제를 만드는 방법 4단계로 '① 속성 열거하기 ② 속성을 부정하기 ③ 변경된 속성에 관련된 의문을 제기하기 ④ 의문점을 분석하기'를 제안했습니다. 기본적인 속성을 열거하는 것이 가장 우선이므로 변형루미큐브를 만들기 위해서는 우선 기본 규칙을 재확인해 봅시다.

1) 구성

- 1부터 13까지 4가지 색깔의 타일 두 세트, 조커 2개, 받침대 4개, 1분 모래 시계

2) 규칙

- ① 최초 등록 : 연속 또는 그룹으로 30이상의 수를 만들어 올려놓는 것을 말함
 - ② 올리기 : 자신이 가지고 있는 타일을 게임판에 올려놓는 것을 말함
 - ③ 붙이기 : 이미 올린 타일에 자신의 타일을 이어 붙이거나 옮겨 붙이는 것을 말함
 - ④ 승자 정하기 : 받침대에 가지고 있는 타일을 모두 올려놓는 사람이 승자, 이후 순위는
 - ⑤ 남은 타일 속의 수를 모두 합해서 점수가 낮은 순으로 순위가 결정됨
- 조커 : 2개의 조커는 어떤 숫자나 색깔도 대신 할 수 있음

3) 승패 결정

- 순위결정법: 자신의 모든 타일을 가장 빨리 올려놓는 사람이 1위이며 타일에 적힌 수의 합이 적은 순으로 순위를 결정
- 1위 결정법: 1위를 제외한 모든 사람들의 타일에 적힌 수들의 합을 1위가 모두 가져감

2. 루미큐브 (rummikub) 속의 수학적 요소

- 1) 계산 : 사칙계산 중 덧셈과 곱셈이 가장 많이 활용 됩니다. 숫자 타일은 11부터 13까지이기 때문에 두 타일의 수만 더해서는 30이상의 수를 만들 수 없습니다. 똑같은 수(연속) 또는 같은 수(그룹)는 단순히 덧셈만 하는 것이 아니라 중간값을 이용하여 곱하기를 하면 빠르고 편리하게 계산할 수 있습니다. 게임이 종료된 후에 남은 타일들의 합을 계산할 때도 10씩 묶어세기를 하면 계산이 편리합니다.
- 2) 경우의 수 : 30이상의 수를 만들어 최초 등록을 하거나 최초 등록이후에 새롭게 등록, 또는 재배열할 수 있는 여러 가지 경우의 수를 생각해야만 합니다. 루미큐브에서는 경우의 수를 잘 활용해야만 승리할 수 있습니다.
- 3) 확률 : 타일을 붙일 수 있는 경우와 그렇지 못한 경우 이미 나온 타일과 더미에 남아있을 타일, 상대방이 가지고 있을 것 같은 타일을 예측하면서 내가 올려놓는 것이 유리할지, 내가 올려놓은 것을 다른 사람이 활용하여 게임이 종료될지 여러 가지의 경우를 따지되 확률적인 판단을 해야만 합니다. 특히 색과 수가 모두 같은 경우(더블)는 매우 불리합니다.

4) 문제 해결 전략 : 루미큐브에서 승자가 되기 위해서 사용되는 전략은 대표적으로 예상하기, 규칙 찾기, 거꾸로 생각하기 등이 있습니다.

- ① 예상하기 : 받침대에서 올릴 수 있는 타일과 그렇지 못한 타일을 구분하여 정렬하고 올릴 수 없는 타일을 올리기 위한 경우를 예상하는 전략입니다. 이 경우 바닥에 있는 타일을 옮겨 붙이거나 패널티로 받은 타일을 이용할 수 있습니다. 미리 예상하여 준비하지 않으면 게임을 효과적으로 풀어나갈 수 없습니다.
- ② 규칙 찾기 : 루미큐브에서의 규칙은 간단하지만 조건에 맞게 타일을 배열할 때는 이 간단한 조건이 장애물이 되기도 합니다. 자신이 정렬한 타일에서 루미큐브의 규칙에 맞는 타일로 정렬하는 것이 승리 전략이 될 수 있습니다.
- ③ 거꾸로 생각하기 : 이것은 연산에서 역산을 하는 경우에 해당되기도 하고 상대방의 타일을 읽을 때 사용되기도 합니다. 자신의 타일과 이미 놓인 타일을 살펴보고 더 나올 수 있는 타일과 그렇지 않은 타일을 생각하여 문제를 해결 하는 전략입니다.

3. 루미큐브 게임의 단계별 활용에서의 수학 문제

1) 등록하기

등록을 하려면 있는 타일을 3개를 합산하여 30이상의 수를 만들어야 한다. 조커를 사용하면 이 경우가 예외가 되기도 하지만 있는 타일 중 30 이상이 되는 경우를 빨리 계산하는 것이 승리전략이 될 수 있다. 학교 수업에서는 경우의 수와 연산 훈련으로 활용할 수 있습니다.

문제 1. 다음 그림에서 타일을 내릴 수 있는 경우를 모두 찾으시오.

☺	13	9	3	10	9	5
10	6	7	7	12	3	9

(정답) 빠트리지 않고 중복되지 않게 모든 경우의 수를 찾으려면 일정한 기준이 필요합니다. 우선 그룹과 연속으로 구분한 다음, 개수로 다시 나눕니다. 그리고 나서 ☺를 사용하는 경우 다른 경우는 고정시키고 그 조커가 들어갈 수 있는 위치만 바꾸면서 찾아갑니다.

(1) 그룹(다른 색깔)의 경우

-3개 사용:(10, 10, ☺), (9, 9, 9), (☺, 9, 9), (9, ☺, 9), (9, 9, ☺), (7, 7 ☺)

-4개 사용:(9, 9, 9, ☺)

(2) 연속(같은 색깔)의 경우

-3개 사용:(7, ☺, 9), (☺, 9, 10), (9, 10, ☺), (7, ☺, 9)

-4개 사용:(7, ☺, 9, 10)



문제 2. 위 문제 1의 답 중에서 최초 등록을 할 수 있는 경우 수는 몇 가지인가?

(정답)(최초 등록은 합이 30이상이어야 하므로 아래의 4가지임)

(10, 10, ☺), (9, 9, 9, ☺), (9, 10, ☺), (7, ☺, 9, 10)

2) 세트 만들기

자기 순서가 오면 자신이 가지고 있는 타일 중 올려놓을 수 있는 타일은 모두 내릴 수 있습니다. 같은 색의 연속되는 수(연속) 또는 다른 색의 같은 수(그룹)를 만들 수 있는 경우의 수는 자신이 가지고 있는 타일과 게임판에 이미 올려놓은 타일에 따라 달라 집니다. 자신의 받침대에 있는 타일 중 연속과 그룹을 찾아 올리기도 하지만, 이미 올려 놓은 타일들을 관찰하여 자신의 받침대에 있는 타일을 그냥 붙여 놓을 수도 있고 게임 판에 이미 올려놓은 타일들을 흩어서 재배열할 수도 있습니다.

(4 - 5) 아래 <보기>와 같이 받침대 위에 놓인 타일과 게임판에 올려진(게임자들이 올려 놓은) 타일의 조합을 보면서 물음에 답하시오.

< 보 기>

6	7	7	2	3	7	8
1	2	10	6	9		

< 게임자 A의 받침대 >

< 게임판에 올려놓은 타일의 조합 >

1	1	1	6	6	6
7	8	9	11	12	13

문제 3. 게임자 A가 자신의 타일을 그냥 붙여놓을 수 있는 경우를 모두 찾으시오.

1	1	1	1	6	6	6	6
6	7	8	9	10	11	12	13

문제4. 게임자 A가 게임 판의 타일을 재배열하여 올려놓을 수 있는 경우를 모두 찾으시오.

1	1	1	1	2	3	
6	6	6	6	7	8	9
6	6	6	6	7	8	

3) 조커 사용하기

조커는 어떤 색깔이나 수도 대신 할 수 있습니다. 조커를 전략적으로 사용해야 승리를 할 수 있습니다. 자신이 가지고 있는 조커뿐만 아니라 이미 올려놓은 조커를 적절하게 옮겨 붙여야 승리 할 수 있습니다.

문제5. 다음 그림에서 조커를 사용하여 타일을 올려놓으려는 <게임자 B>는 최대 몇 개의 타일을 올려놓을 수 있는지 구하시오.

☺					10	11
1	2	7	8		6	6

< 게임자 B의 받침대 >

< 게임판에 올려놓은 타일의 조합 >

1	☺	3	4	6	6	6	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

(정답) 최대 8개

1. **파란색 2**(1개)를 조커 자리에 올려놓으면서

1	2	3	4
---	---	---	---
 2. **빨간색 10, 11**(2개)를 조커와 함께

10	11	☺
----	----	---

 (연속)
 3. **주황 6**을 올려 (1개) 기존의 6그룹을 대체하고

6	6	6
---	---	---
 4. 떼어온 **파란색 6**과 함께 **7, 8** (2개)를 붙여

6	7	8
---	---	---

 (연속)
 5. 받침대에서

6	☺	8	9	10
---	---	---	---	----

 (연속)에 붙인다. (2개)
- 결국 8개를 올려놓고 **파란색 1**만 남게 된다.

4) 모두 내릴 수 있는 전략 세우기

게임에서 승리하려면 받침대에 있는 타일을 모두 올려놓아야 합니다. 최소의 턴으로 모두 내리려면 자신의 타일을 모두 내릴 수 있는 경우의 수를 파악하는 것이 중요합니다. 자신의 받침대에 있는 타일을 모두 내리려면 최소한 어떤 타일이 더 필요한지 파악합니다.



문제 7. <게임자 D>가 자신의 타일을 모두 올려놓을 수 있을지 없을지를 판단하시오.

8	9		1	2	3	7
4	5	6	8			😊

< 게임자 D의 받침대 >

< 게임판에 올려놓은 타일의 조합 >

7	7	7	😊	10	11	2	3	4
---	---	---	---	----	----	---	---	---

(정답) 가능하다.

1.

1	2	3
---	---	---

 (연속)

4	5	6
---	---	---

 (연속)

2. 조커😊 자리를 검은색 9로 대체

9	10	11
---	----	----

 (연속)

3.

8	8	😊
---	---	---

 (그룹)

4. 남은 파란색 7을 기존 그룹에 붙임.

7	7	7	7
---	---	---	---

 (그룹)

5. 타일의 점수 계산하기 : 자신이 가지고 있는 모든 타일의 합을 빠르고 정확하게 계산합니다.

문제 8. 아래의 각 경우에 남은 타일들의 합을 계산하시오.

①

[해설] 올려놓지 못한 조커는 30점으로 계산하므로 모두 48점입니다.

②

[해설] 10씩 묶어서 계산하면 편리합니다. 따라서 뒤에서부터 조커(30), (8+12), (7+13), (8+9)를 계산하면 87점입니다.

③

[해설] 수 배열표에서 같은 색깔들끼리 또는 같은 수들끼리 먼저 계산해서 각각 합해도 됩니다. 하지만 계산하기 편리한 수들끼리 조합하는 것이 더 편리합니다.

4. 변형 루미큐브를 만들기 위한 ‘What if (not)?’전략

학습자들은 루미큐브를 직접 체험하면서 단순한 재미보다는 루미큐브 속에 들어있는 수학적 요소와 원리를 감각적으로 체득해야 합니다. 하지만 수준높은 학습자라면 그보다 한 단계 더 발전하여 변형된 루미큐브나 새로운 문제를 만들어 볼 수 있는 기회를 제공할 필요가 있습니다. 여기에 필요한 것이 ‘What if (not)?’이라는 전략입니다.

< What if (not)? 전략을 활용한 새로운 루미큐브 만들기 예시 >

<0단계> 출발점 선택	1부터 13까지의 13종, 4가지 색깔, 2세트 $13 \times 4 \times 2 = 104$개의 숫자 타일과 2개의 조커가 있다. 2~4명이 게임을 한다. 각자 14개씩의 타일을 가져간다. 가장 높은 수를 뽑은 사람부터 시작하여 오른쪽으로 돌아간다.
<1단계> 속성나열	최초 등록할 수 있는 최소 합은 30이다. (그룹)등록을 하려면 같은 수(다른 색) 3개이상의 타일이 있어야 한다. (연속)등록을 하려면 같은 색 3개의 타일이 연속이 되어야 한다. 기존의 타일 더미에 붙이거나 재배열 할 수 있다. 자기 턴에서 등록하지 못하면 더미에서 타일을 하나씩 가져간다. 자신의 타일을 가장 빨리 올려놓는 사람이 이긴다. 숫자 1은 항상 가장 낮은 숫자이고 숫자 13뒤에 붙일 수 없다.
<2단계> 속성부정하기 What if (not)?	왜 수는 하필 13까지이고 처음에 14개의 조각타일을 가져가는가? 조각 타일의 개수를 더 늘리거나 줄일 수는 없을까? 단순 합이 아니라 다른 방법을 써도 될까? 일렬로만 배열해야 할까? 타일에 숫자만 사용하지 않는다면? 자기 턴에서 등록하지 못하면 더미에서 타일을 하나씩 가져간다.
<3단계> 의문제기와 문제설정	연속의 종류에 연속인 특정 수(홀수, 짝수, 소수 등)도 허용하기 그룹의 종류에 특별한 성질을 갖는 수(약수와 배수 등)도 허용하기 한 사람이 가져가는 타일의 개수를 3개씩 특정한 수를 조커로 추가하기 조커를 올려놓지 않고 승리하는 경우는 상대방 점수를 조커의 개수만큼 2배씩 계산 숫자대신 알파벳으로 영어 단어 만들기 숫자 1을 포커에서처럼 A로 생각하여 숫자 13뒤에도 붙이기 자기 타일에 나온 수들을 모두 사용하여 777이 되는 수식 만들기

여기서 2단계의 속성부정과 3단계의 의문제기 및 문제설정의 가장 큰 차이는 대안이 있느냐 없느냐로 구분할 수 있습니다. 즉, 속성을 부정하여 단순히 의문을 제기하는 것보다 그렇게 부정한 속성에 대한 구체적인 대안까지 제시하는 경우를 말합니다.



5. 루미큐브 (rummikub) 게임규칙 바꾸어 새로운 게임 만들기 (2)

앞의 경우처럼 What - If - Not 전략을 사용하여 변형 루미큐브를 직접 만들어봅시다. 교사는 직접 구체적인 게임을 설계해 보는 것이 가능하지만 학습자의 경우는 전략을 세우고 대략적인 게임설계 후 토론을 하면서 게임의 문제점을 해결해나가는 활동을 하는 것으로 학습에 활용하는 것이 좋다.

단계	물음	선택한 결과
<0단계> 출발점 선택	기존의 루미큐브 구성물을 그대로 사용할까?	1부터 10까지의 수만 사용하고 조커를 4개로 늘린다.
<1단계> 속성나열	30이상의 연속 또는 그룹을 사용하여 올려놓는다.	2개를 사용할 때 최대 20이므로 21 이상만 되어도 올려놓을 수 있도록 한다. 이때 조커는 개당 20점이다.
<2단계> 속성부정하기 What if (not)?	기존의 타일 모양이나 색깔을 바꾸어도 될까?	타일의 사이즈는 상관없다. 색깔도 4가지로 제한할 필요는 없다. 초록 색이나 보라색으로 좀 더 colorful하게 꾸며보자.
<3단계> 의문제기와 문제설정	일렬로만 올려야 한다는 원칙이 있었나? 크로스방향으로도 올려놓을 수 있을텐데....	가로 또는 세로 방향 즉, 크로스로 올려놓을 수 있도록 한다.

학습 정리

1. 루미큐브에 들어있는 수학적 요소로는 연산과 계열, 조합, 확률적 판단, 그리고 예상하기, 규칙 찾기, 거꾸로 생각하기 등의 문제해결 전략이 있지만 그보다는 이미 나온 어떤 패에서 상대방이 반응을 보였거나 보이지 않았는지를 기억하는 기억력, 상대방의 수나 심리를 파악하는 판단력 등의 종합적인 능력이 필요합니다.
2. 루미큐브의 구성 요소와 사용 규칙, 승패 방법 등에 ‘What if (not)’의 전략을 사용하면서 새로운 변형 루미큐브를 만들 수 있습니다. 학습자들이 제안한 새로운 게임을 함께 수행해 보면서 토론을 거쳐 수학적으로도 의미가 있고 재미있는 게임을 만들어 보기를 기대합니다. 이때 사용할 수 있는 한 가지 방법이 ‘What if (not)?’이라는 전략입니다.
3. ‘What if (not)?’의 각 단계별에서 제기할 수 있는 내용들의 일부는 다음과 같습니다만 더 많은 사례들이 있을 것입니다.

<0단계> 출발점 선택	1부터 13까지의 13종, 4가지 색깔, 2세트 $13 \times 4 \times 2 = 104$ 개의 숫자 타일과 2개의 조커가 있다. 2~4명이 게임을 한다. 각자 14개씩의 타일을 가져간다. 가장 높은 수를 뽑은 사람부터 시작하여 오른쪽으로 돌아간다.
<1단계> 속성나열	최소 등록할 수 있는 최소 합은 30이다. (그룹)등록을 하려면 같은 수(다른 색) 3개이상의 타일이 있어야 한다. (연속)등록을 하려면 같은 색 3개의 타일이 연속이 되어야 한다. 기존의 타일 더미에 붙이거나 재배열 할 수 있다. 자기 턴에서 등록하지 못하면 더미에서 타일을 하나씩 가져간다. 자신의 타일을 가장 빨리 올려놓는 사람이 이긴다. 숫자 1은 항상 가장 낮은 숫자이고 숫자 13뒤에 붙일 수 없다.
<2단계> 속성부정하기 What if (not)?	왜 수는 하필 13까지이고 처음에 14개의 조각타일을 가져가는가? 조각 타일의 개수를 더 늘리거나 줄일 수는 없을까? 단순 합이 아니라 다른 방법을 써도 될까? 일렬로만 배열해야 할까? 타일에 숫자만 사용하지 않는다면? 자기 턴에서 등록하지 못하면 더미에서 타일을 하나씩 가져간다.
<3단계> 의문제기와 문제설정	연속의 종류에 연속인 특정 수(홀수, 짝수, 소수 등)도 허용하기 그룹의 종류에 특별한 성질을 갖는 수(약수와 배수 등)도 허용하기 한 사람이 가져가는 타일의 개수를 3개씩 특정한 수를 조커로 추가하기 조커를 올려놓지 않고 승리하는 경우는 상대방 점수를 조커의 개수만큼 2배씩 계산 숫자대신 알파벳으로 영어 단어 만들기 숫자 1을 포커에서처럼 A로 생각하여 숫자 13뒤에도 붙이기 자기 타일에 나온 수들을 모두 사용하여 777이 되는 수식 만들기



학습 평가

1. 다음 그림의 타일을 가지고 있는 사람이 처음 등록할 때 사용할 수 있는 조합의 경우는 모두 몇 가지인지 구하시오.

☺	11	1	2	11	3	4
5	6	8	6	12	10	9

① 1가지

② 2가지

③ 3가지

④ 4가지

⑤ 5가지

2. 다음 중 일반인들이 기존의 루미큐브를 변형하여 사용하고자 할 때 가장 불편하거나 부적합한 것은?

- ① 숫자 타일을 1부터 15까지 더 늘려서 사용한다.
- ② 타일의 일부를 빼 놓고 그 타일들이 무엇인지를 모른 상태에서 게임을 시작한다.
- ③ 원래의 조커는 없애고 숫자 타일 중 13을 조커로 사용하되 같은 색깔에서만 사용한다.
- ④ 받침대가 4개이므로 두 사람이 게임을 할 때 각자 2개의 받침대를 사용하여 4인 경기자가 게임하는 것처럼 한다.
- ⑤ 연속인 수나 색이 다른 같은 수를 조합하듯이 합이 30이상이면서 약수와 배수의 관계가 되는 수들끼리는 조합을 허용하도록 한다.

3. 'What if (not)?' 전략 중 다음 <보기>의 문장이 해당하는 가장 적합한 단계는?

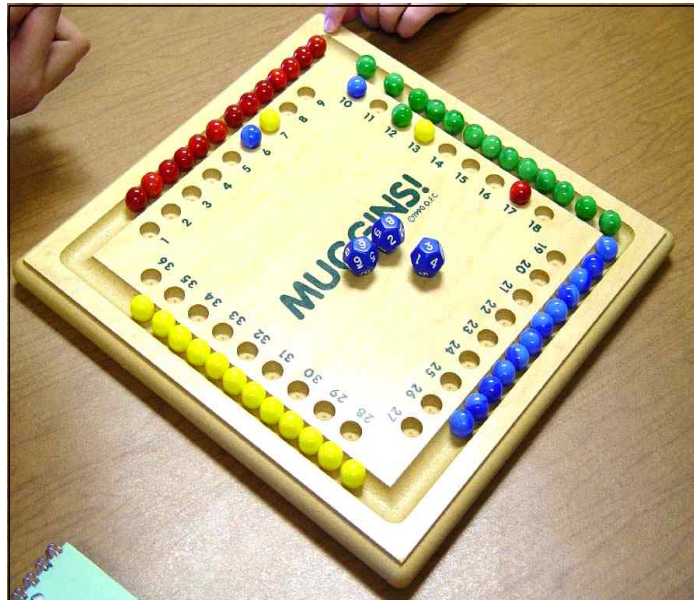
<보기>

왜 조커는 2개뿐일까? 두 명이 게임을 할 때 각자 숫자를 하나씩 뽑아 그 수도 조커로 사용하자. 단, 숫자 조커는 자신과 색깔이 같은 타일이 포함되어 있을 때만 사용할 수 있다.

- ① 출발점 선택 ② 속성 열거하기 ③ 속성 부정하기 ④ 의문제기 ⑤ 문제 설정

10차시: 머긴스 게임

학습 안내



머긴스게임은 2~4팀이 즐길 수 있는 흥미진진한 사칙계산 게임으로 다양한 수학적 사고력을 필요로 하는 교육적 가치를 지니고 있습니다. 머긴스(MUGGINS)는 '바보'라는 뜻인데, 한 사람이 잘못 계산하여 내려놓은 것을 발견하고 다른 사람이 그렇게 부르면서 붙여진 이름입니다. 게임 내용에서 수학적 지식과 재능을 발휘할 수 있어서 사칙연산에 관한 실력뿐만 아니라, 논리적 판단과 기억력, 확률과 문제해결의 전략, 창의성도 길러 줄 것입니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) 머긴스 게임의 구성요소와 게임 방법을 이해할 수 있습니다.
2. (기능과 활동) 3~4개의 자연수를 이용한 자유로운 사칙계산을 할 수 있습니다.
3. (수학적 사고) 점수의 합계를 높이기 위해 연속적으로 위치하는 수를 선점하는 전략과 적절한 속임수도 사용하되 상대방의 속임수는 잘 간파할 수 있습니다.
4. (태도와 의지) 기존의 게임을 활용하여 새로운 게임을 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.



학습 내용

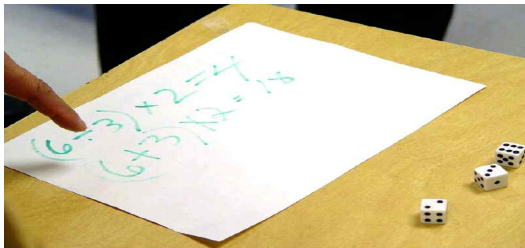
1. 머긴스 게임 이해하기

<기본 게임 방법>

- 1) 36 색 구슬(또는 큐브)을 가져옵니다.

게임자 그룹 수	각 게임자가 가지는 구슬의 수 (색깔은 개인/팀별로 다르게)	팀 구성
2그룹	20개	2명이 한 그룹을 이룰 수도 있는데 이럴 경우는 개인이 번갈아가면서 게임을 진행합니다.
3그룹	17개	
4그룹	15개	

- 2) 자신의 순번에서 3개의 주사위를 동시에 굴려 세 수를 얻습니다.
3) 그 세 수에 사칙계산을 자유롭게 사용하여 머긴스 판에 비어있는 1 36까지의 홈에 해당하는 수를 하나 만들면 자신의 색깔 구슬을 놓을 수 있습니다.



- 4) 수를 만드는 시간의 제한(예를 들어, 2분)을 둘 수 있고 시간이 지나면 다음 사람으로 차례가 넘어갑니다.
5) 상대방이 잘못 계산하여 놓은 경우는 이를 발견한 사람이 상대방의 구슬을 빼내고 자신의 구슬을 놓을 수 있습니다.
6) 머긴스 게임판의 홈에 놓은 구슬 한 개당 1점이 주며, 구슬이 연속될 경우는 아래와 같은 추가 점수가 주어집니다.

연속된 구슬의 개수	추가 점수	득점	비고
1개	0점	1점	1 36까지를 하나의 원으로 보고, 각 코너 부분도 연속된 것으로 봅니다.
2개	2점	4점	
3개	5점	8점	
4개	7점	11점	
5개 이상	10점	15점	

- 7) 주사위를 던져서 나온 수를 놓을 수 있는 빈 공간이 더 이상 없다고 판단하면 게임을 종료하고 선언할 수 있습니다. 그러나 “더 이상 경기할 수 없다.”고 선언하자마자 다른 사람이 구슬을 놓을 수 있는 공간을 발견하면 “머긴스”라고 말하면서 그 수를 말하고 그곳에 자신의 색깔 구슬을 놓습니다.

게임이 종료되는 경우	1. 36개의 자리가 빈 곳 없이 다 채워졌을 경우
	2. 한 사람이 구슬을 다 사용했을 경우
	3. 연속하여 구슬을 놓을 수 없는 경우

- 8) “머긴스”는 반드시 다음 차례의 사람이 주사위를 잡기 전에 선언해야 하며, “머긴스”가 나타나지 않으면 계속해서 정상적인 순서로 게임을 진행합니다.
9) 머긴스 게임에서 좋은 점수를 얻기 위해서는, 자신의 구슬을 연이어 놓거나 상대방의 구슬이 연이어지지 않도록 막으면서 최종적으로 가장 높은 점수를 얻은 사람이 승리하게 됩니다.

Think+ 추가 점수의 기준을 조정하여 득점 계산을 좀 더 쉽게 하는 방법은?

2. 머긴스 게임의 보너스 규칙들

상대방 구슬 콜라내기 (범핑, BUMPING)	주사위를 굴려 똑같은 숫자 3개(트리플)가 나오면 상대방의 구슬을 하나를 제거할 수 있습니다.
속임수 (브러핑, BLUFFING)	게임 참가자의 주의를 집중시키기 위하여 속임수(bluffing) 사용이 가능합니다. 주사위를 던진 후 계산 결과를 고의로 틀리게 하여 자신이 유리한 곳에 구슬을 놓을 수 있습니다. 즉 각각의 주사위 숫자를 계산하여 나올 수 없는 숫자의 위치에 자신의 구슬을 놓고, 다음 사람이 주사위를 잡을 때까지 아무도 이의를 제기하지 않는다면 그냥 넘어가게 됩니다. 상대방이 속임수를 쓴 것 같다고 생각하여 계산 결과를 설명하라고 요구했을 때 제대로 설명을 하지 못하면 방금 놓은 그 구슬을 빼내고 이의를 제기한 사람은 속임수를 쓴 사람의 구슬 하나를 빼낼 수 있습니다. 만약 이의를 제기했으나 속임수를 쓰지 않았음이 밝혀지면 게임자는 이의를 제기한 사람의 구슬을 하나 빼낼 수 있습니다. 그 다음 계속해서 정상적인 순서로 게임을 진행합니다.

3. 머긴스 게임을 위한 연습 사이트

<http://www.mugginsmath.com/muggins.asp>

4. 머긴스 게임하기



<머긴스 게임 말판>





5. 머긴스 게임 활동 기록지

계산 값	나온 주사위의 눈	내가 만든 식	계산 값	나온 주사위의 눈	내가 만든 식
1			19		
2			20		
3			21		
4			22		
5			23		
6			24		
7			25		
8			26		
9			27		
10			28		
11			29		
12			30		
13			31		
14			32		
15			33		
16			34		
17			35		
18			36		

6. 머긴스 게임 재구성 사례

머긴스(MUGGINS) 게임은 1~4명이 즐길 수 있는 흥미진진한 사칙계산 게임으로 논리적 판단과 기억력, 확률과 문제해결의 전략, 창의성을 길러 주며 수학적 사고력을 필요로 하는 교육적 가치를 지니고 있으며 원래의 게임 규칙을 변경하여 새로운 게임을 만들 수도 있습니다. 아래는 재구성한 한 가지 사례입니다. 규칙을 추가 또는 변경해 봅시다.

1. 준비물: 말판, 주사위, 큐브

2. 한 명(또는 두 명)씩 2~4그룹을 만들어 각 그룹이 36개의 색 구슬(또는 큐브)을 똑같이 나누어 가져가고, 각 그룹별로 자신의 순번에서 3개(또는 4개)의 정육면체(또는 정팔면체) 주사위를 동시에 던져 세 수에 사칙계산을 자유롭게 사용하여 **1부터 36까지**의 칸 중에 원하는 수의 값이 나오는 수식을 제한 시간(30초) 안에 만들면 그 칸에 자신의 색 큐브를 놓을 수 있음.

3. 연속된 구슬의 개수에 따른 득점(조정된 값)

연속된 구슬의 개수	득점
1개	1점
2개	3점
3개	7점
4개	15점
5개 이상	31점

4. 특별 규칙

상대방 구슬 골라내기 (범핑, BUMPING)	모든 주사위에 똑같은 수가 나올 때는 상대팀이 이미 놓은 칸이라 할지라도 그 칸에 해당하는 수를 만들면 우리 팀의 큐브로 대체할 수 있음.
속임수 (브러핑, BLUFFING)	전략에 따라 속임수를 써도 되지만 상대방에게 속임수가 발각되면 바르게 이의제기를 한 팀이 상대방의 구슬을 하나씩 빼내어 버림. 잘못된 이의제기를 하면 반대로 역공을 당할 수 있음.
상대가 놓친 것 찾아내기 (머긴스, Muggins)	제한 시간(30초) 안에 상대팀이 못 찾고 넘길 때는 가장 먼저 '머긴스'라고 외친 팀이 그 수를 찾아 자신의 색 큐브를 놓을 수 있음.

5. 게임의 종료

1. 36개의 자리가 빈 곳 없이 다 채워졌을 경우
2. 한 그룹이 큐브를 다 사용했을 경우
3. 연속하여 큐브를 놓을 수 없는 경우

6. 게임의 승자: 큐브로 얻은 총점이 가장 높은 그룹



학습 평가

1. 머긴스 게임에 대한 아래의 설명들 중 가장 잘못 된 것을 고르시오.

- ① 머긴스 게임은 4명이 즐길 수 있는 흥미진진한 사칙계산 게임이다.
- ② 머긴스 게임에서는 계산능력과 전략적 사고도 필요하지만 때로는 운도 필요하다.
- ③ 머긴스 게임은 상대방의 실수를 나의 행운으로 반전시키고 때로는 위장전술을 펼칠 수 있다는 것이 매력이다.
- ④ 머긴스는 '바보'라는 뜻으로 상대방이 계산하지 못한 것을 찾아낸 사람이 그 수를 차지할 수 있다.
- ⑤ 머긴스 게임은 논리적 판단, 기억력, 문제해결의 전략, 창의성 등을 길러 줄 수 있는 유익한 게임이지만 수학적으로는 사칙계산 능력을 기르기 위해 사용하는 학습용 게임이다.

2. 다음 중 ()의 세 수를 이용하여 머긴스 등식을 만들 수 없는 것을 모두 고르시오.

- ① (2,4,5)=28 ② (5,3,2)=14 ③ (6,4,3)=8 ④ (4,4,3)=12 ⑤ (5,4,3)=8

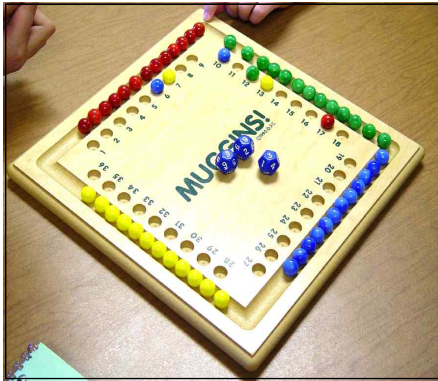
3. 머긴스 게임에서는 연속된 구슬을 많이 만드는 것이 유리합니다. 아래의 득점 방식에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

연속된 구슬의 개수	득점
1개	1점
2개	3점
3개	7점
4개	15점
5개 이상	31점

- ① 연속된 구슬의 개수에 따라 비례적으로 점수를 매겼다.
- ② 연속된 구슬의 개수에 따라 계차를 일정하게 늘려주었다.
- ③ 연속된 구슬의 개수 (n)에 따라 $2^n - 1$ 점씩 준 것이다.
- ④ 연속된 구슬이 많을수록 높은 점수를 주지만 특별한 규칙은 없다.
- ⑤ 연속된 구슬을 놓을 확률도 고려하여 적당한 차이를 벌려 놓았다.

11차시: 머긴스게임을 통한 수학보드게임 개발 지도

학습 안내



앞으로도 새로운 게임들을 더 다루겠지만 이쯤에서 그 동안 살펴본 주사위 윷놀이, 숫자볼링게임, 매지믹서, 루미큐브, 머긴스 게임 등의 다양한 수학 보드 게임을 되돌아보면서 한 단계 마무리를 지으려고 합니다. 기존의 게임들은 행운도 어느 정도 필요하지만 대부분은 수를 이용한 계산과 식 만들기, 다양한 조합, 그리고 경우의 수와 확률적인 사고를 바탕으로 승리를 위해서는 종합적인 판단과 수학적 사고력이 필요한 것들이었습니다.

수학 보드게임 개발을 위해서는 결국 (1)수학적인 내용 (2)수학적 창의성, (3)수학적인 안목과 태도라는 수학 영재성의 3가지 요소를 골고루 잘 발휘해야 함을 알 수 있습니다. Recreation 활동을 통한 Re-Creation 수학이라는 목표를 명심한다면 일반적인 활동의 즐거움뿐만 아니라 수학적 내용 요소에 주목하면서 수학적으로 생각하고 활동하는 즐거움을 느끼게 됩니다. 그러면서 기존의 게임을 활용하여 새로운 게임을 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.

유능한 교사는 자신의 지식을 가르치기보다 'What if (not)?'이라는 기법을 활용하여 학생의 내면에 잠재되어있는 창조적 잠재성을 일깨워 재발명, 재창조로 안내하여야 합니다. 네덜란드의 수학교육자인 프로이텐탈(H. Freudenthal)가 제안한 '안내된 재발명의 방법(guided re-invention)'에 견주어 우리는 이것을 '안내된 재창조의 방법(guided re-creation)'이라고 부를 수 있기를 기대해 봅니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) 수학 보드게임에 필요한 구성요소와 게임 방법을 구상할 수 있습니다.
2. (기능과 활동) 새로운 보드게임을 만들 수 있습니다.
3. (수학적 사고) 수학보드 게임이라는 목표를 명심한다면 일반적인 활동의 즐거움뿐만 아니라 수학적 내용 요소에 주목하면서 수학적으로 생각하고 활동하는 즐거움을 느끼게 됩니다.
4. (태도와 의지) 기존의 게임을 활용하여 새로운 게임을 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 반성과 계획

지난 차시들에서 실시한 주사위 윷놀이나 숫자볼링게임, 매지믹서, 루미큐브 등을 회상하면서 이제는 자신만의 새로운 수학보드게임을 만들어 봅시다.

교육활동 안내

Guide

- 1) 머긴스 게임을 하려는 모둠이 있다면 머긴스 게임의 용어들과 게임 방법을 설명하고 그 게임을 2-3회 정도 직접 해보도록 합니다. 그러면서 기존의 머긴스 게임 규칙 중 적절하지 못하다거나 더 필요하다고 생각한 규칙, 또는 바꾸어 보면 더 좋겠다고 느낀 점이 있으면 아래에 적고, 친구들과 토론하면서 새로운 규칙으로 게임을 해 봅시다.
- 2) 업그레이드를 위한 소재로 주사위 윷놀이, 숫자볼링게임, 매지믹서, 루미큐브 또는 매지믹서 중 하나를 모둠별로 선택하도록 합니다.

생각 더하기

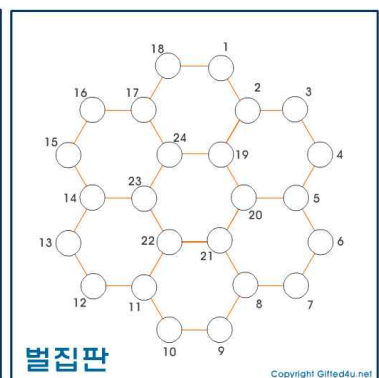
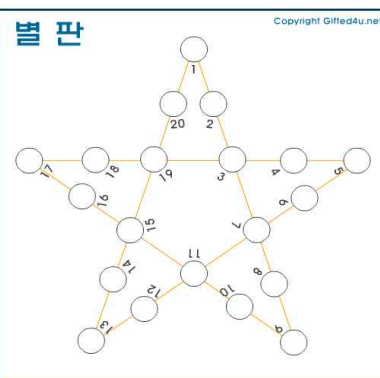
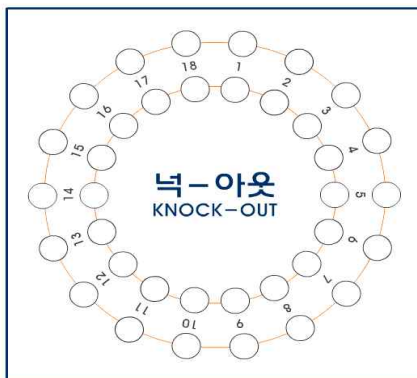
Question

- ▶ 그 활동(소재)를 택한 이유는 무엇인가?
- ▶ 그 활동(소재)을 업그레이드 한다고 할 때 산출물 평가기준에서 우리 모둠이 가장 중점을 둔 항목은 무엇인가?

Think+ 각 모둠의 작품에서 가장 핵심적인 부분은 무엇이며 작품명을 무엇이라고 지을 것인가?

2. 산출물 수행하기

기존의 게임과 형태는 유사하지만 다른 규칙이나 방법으로 진행하는 게임을 만들어도 좋고, 보드판의 모양만 바꾸어도 되며, 형태와 방법이 전혀 다른 게임을 만들어도 좋습니다. 둘씩 또는 모둠별로 활동하여도 좋습니다. 아래의 활동판은 머긴스게임을 변형할 수 있는 놀이판의 예시입니다.



정보 더하기

Information

인터넷 사이트: Muggins Math Product Store, <http://www.mugginsmath.com/>

머긴스 게임 및 여러 가지 게임과 관련한 다양한 게임판을 소개

3. 산출물 평가하기

▣ 다른 모둠이 업그레이드 하거나 새롭게 만든 수학보드 게임을 상호 평가한다.

다른 친구들이 만든 보드 게임을 평가해 봅시다.

[아래의 평가 내용을 수정하거나 추가할 수도 있습니다.]

모둠	평 가 내 용							좋은 점/ 아쉬운 점
	내용	독창성	흥미	협동, 시간	발표력	그외	총 점	
	수학적인 내용을 포함한 아이디어임	아이디어가신 선하고 독창적임.	재미가 있음	협동심을 발휘하여 완료 시간을 지킴	이해하기 쉽게 발표함	추가할 평가 항목:		
	5	5점	5점	5점	5점			
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								



4. 자기 반성 및 수정

❑ 다른 모둠의 산출물을 평가해 보면서 우리 모둠의 산출물에 참고하거나 산출물을 수정해야 할 부분은 무엇인지 반드시 검토해 보아야 합니다.

❑ 모든 아이디어는 계속 다듬어져야 합니다. 즉, 우리가 만들었던 주사위 윷놀이, 매지믹서, 숫자볼링 게임, 루미큐브, 머긴스 게임 역시 좀 더 개선할 점이 많습니다. 다른 모둠의 작품에 대한 감상과 평가, 반성은 자신이 만든 게임에 중요한 아이디어를 제공해 줄 수 있습니다. 그리고 ‘What if?’ 또는 ‘What if~not?’ 전략을 사용하여 생활 속에서 여러 가지 게임의 규칙이나 조건을 바꾸어 새롭게 변형해 볼거리가 있는지 찾아봅시다.

Think+ 각 모둠의 작품에서 가장 핵심적인 부분은 무엇이며 작품명을 무엇이라고 지을 것인가?

학습 평가

1. 이번 주제에서 배운 핵심 내용이나 느낀 점을 3가지만 적어 봅시다.

- (1)
- (2)
- (3)

2. 다음은 ‘머긴스게임을 활용한 수학 보드게임 만들기 지도’에 대한 학습목표 달성 여부를 확인하기 위한 자기평가표입니다. 각 평가 요소에 대한 자신의 성취도를 그 달성 정도에 따라 ‘상’/‘중’/‘하’의 적당한 칸에 ‘✓’표시를 하시오. 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 봅시다.

평가요소	자기평가		
	상	중	하
(1)머긴스 게임의 놀이 방법과 점수 계산법을 바르게 이해하였다.			
(2)주사위를 던져 나온 눈들을 이용한 혼합계산을 바르게 하면서 높은 점수를 얻기 위한 확률(가능성)도 고려하였다.			
(3)새로운 게임을 만들 때 ‘what if?’/ ‘what if ~not?’의 방법을 적용해 보려고 하였다.			
(4)생활 속의 놀이에 들어있는 수학적인 사실이나 규칙을 변형하여 수학적인 재창조(Re-Creation)를 해 보려는 마음가짐과 자신감, 욕구가 생겼다.			
(5)수학보드게임을 만들고 평가하는 지도 방법을 알고 응용할 수 있게 되었다.			
원인분석			

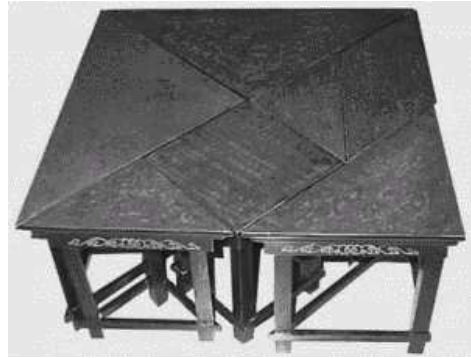
12차시: 탱그램(칠교판)

학습 안내



아파트 실내 디자인 예시

<http://www.apartmenttherapy.com/images/ny/tangram2.jpg>



탱그램 책상(19세기, 중국)

<http://www.members.aol.com/sth777/p1.gif>

탱그램은 7조각으로 이루어진 직소우(jigsaw) 즉, 끼워 맞추어 본래의 그림을 만드는 장난감 퍼즐의 한 종류입니다. 우리나라에서는 전통적으로 '칠교놀이'라는 이름으로 전해 오고 있었습니다. 오늘날의 보드게임판 처럼 손님이 잠시 머물면서 즐긴다고 해서 '유객판(留客板)'이라고도 하고, 여러 가지 지혜를 짜내서 갖가지 모양을 만들므로 '지혜의 판'이라고도 합니다.

19세기 중국에서는 탱그램 조각으로 이루어진 책상도 있었습니다. 유럽에서는 Williams라는 사람이 1820년에 발간한 <유클리드에 관한 새로운 수학적 시도>라는 책에서 수학 공부에 탱그램 퍼즐을 활용할 것을 제안하고 있습니다. 그 후 20세기에는 탱그램이 유아에서부터 성인에 이르기까지 전 세계인들의 사랑을 받고 있는데 최근에는 생활 디자인의 소재로도 자주 활용되고 있습니다.

이제 우리는 탱그램에는 어떤 수학적 의미와 창의적인 즐거움이 있는 지 살펴보면 서, 각자의 수준에서 문제와 퍼즐에 도전하고 또 새로운 문제/새로운 퍼즐도 만들어 봅시다. 다만, 만드는 모양은 반드시 수학적인 도형이어야 합니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) 탱그램의 구성 원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. (기능과 조작) 탱그램을 활용하여 여러 가지 모양의 다각형을 만들 수 있습니다.
3. (수학적 사고) 도형과 관련된 수학적 개념을 발견하는 동안 수학적으로 추론하여 문제를 해결할 수도 있습니다.
4. (태도와 의지) 탱그램 퍼즐을 다루면서 여러 수학적 성질을 스스로 찾아보고 이유를 따져 물어보려는 의지를 갖게 됩니다.



학습 내용

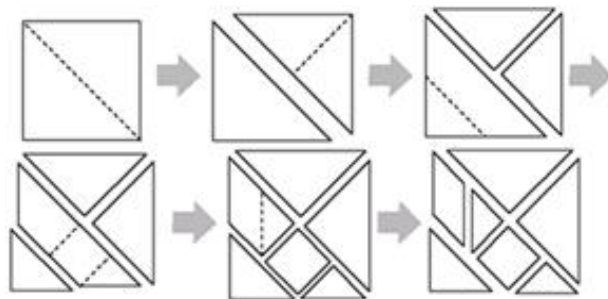
1. 탱그램의 용어와 역사

탱그램(Tangram, 칠교판)은 7조각으로 이루어진 직소우(jigsaw, 끼워 맞추어 본래의 그림을 만드는 장난감) 퍼즐의 한 종류입니다. 우리나라에서는 전통적으로 7조각으로 이루어졌다고 하여 ‘칠교놀이’라는 이름으로 전해 오고 있었습니다. 오늘날의 보드게임판 처럼 손님이 잠시 머물면서 즐긴다고 해서 ‘유객판(留客板)’이라고도 하고, 여러 가지 지혜를 짜내서 갖가지 모양을 만들므로 ‘지혜의 판(Board of Wisdom)’이라고도 합니다. 최근에는 초등학교 교과서에 ‘도형판’이라는 이름으로 소개되기도 하고 생활 속의 디자인으로 다양하게 활용되기도 합니다.([그림 1])

탱그램의 역사는 아주 오래되어, 중국에서는 4천년 전부터 즐겨왔다고 합니다. 미국의 퍼즐 전문가인 Samuel Loyd에 의하면, 기원전 20C에 중국의 탄이라는 사람이 탱그램에 관한 7권의 책을 편찬했는데 각 권에는 각각 1000개의 모형을 수록하고 있다고 합니다. 현재 알려진 바에 따르면 1780년대에 탱그램을 풀고 있는 두 명의 중국 여인을 그린 목판화가 발견되었고, 탱그램 문제들을 다루고 있는 가장 오래된 출판물은 1813년 중국에서 발간된 것입니다. 19세기 중국에서 [그림 2]와 같은 칠교판 모양의 정사각형 탁자가 사용되기도 했다고 합니다.

유럽에서는 윌리엄스라는 사람이 1820년에 발간한 <유클리드에 관한 새로운 수학적 시도>라는 책에서 수학 공부에 탱그램 퍼즐을 활용할 것을 제안하고 있습니다. 그 후 20세기에는 탱그램이 유아에서부터 성인에 이르기까지 전 세계인들의 사랑을 받고 있습니다.

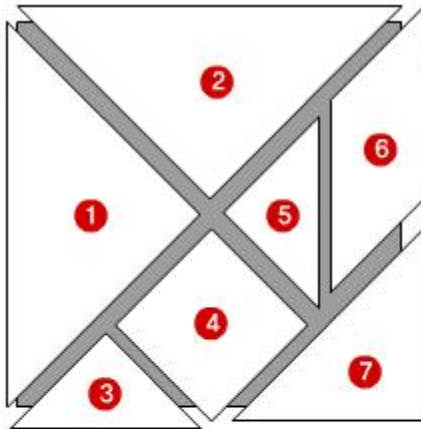
(참고: <http://archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang1.html>)



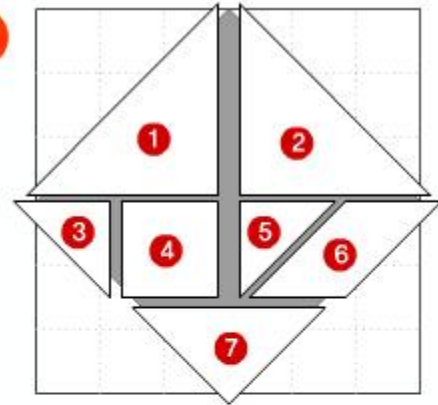
[그림1] 서울 5호선 김포공항 역

2. 7조각으로 자르기

방법 1



방법 2

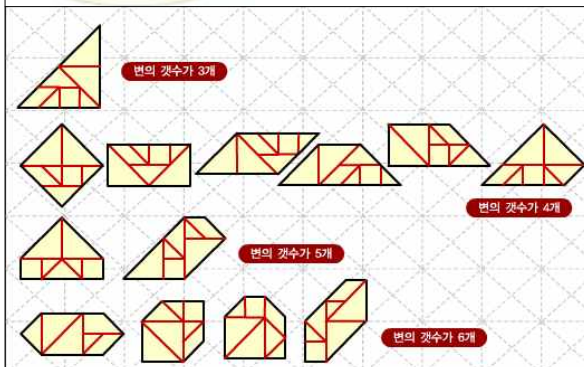


· 자르는 순서

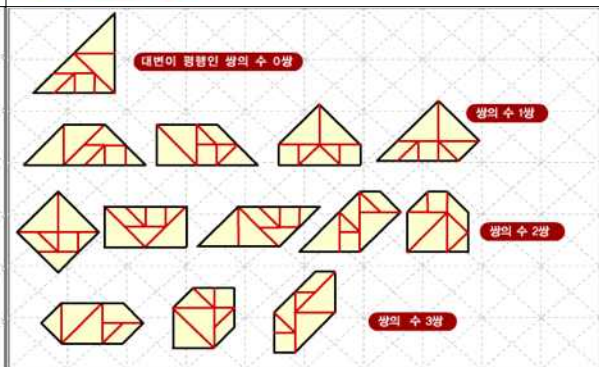
- (1) 정사각형에서 가운데 긴 대각선을 긋는다.
- (2) 큰 직각삼각형의 두 변의 중점을 연결하면 대각선과 평행하면서 ⑦번 조각이 분리된다.
- (3) 다른 대각선을 그리면서 (2)의 선분에서 멈추면 ①, ②조각이 분리된다.
- (4) ①의 밑변을 이등분하는 점과 ⑦ 조각의 꼭지점을 연결하면 ③, ④조각이 분리된다.
- (5) ②의 밑변을 이등분하는 점과 ⑦ 조각의 꼭지점을 연결하면 ⑤, ⑥조각이 분리된다.

3. 공통점 찾기

같은 다각형끼리 모으기

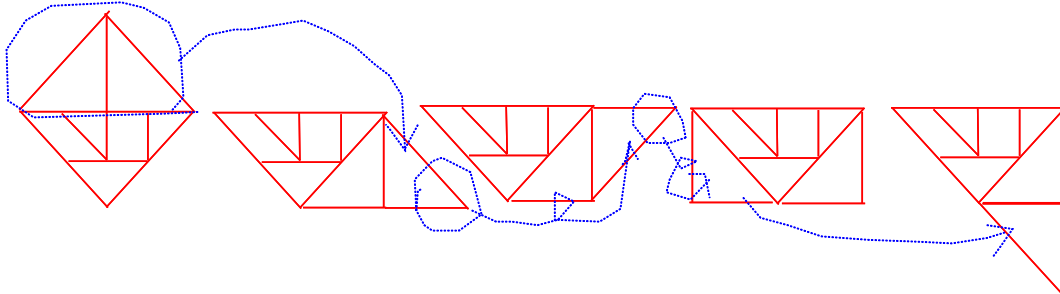


평행선 쌍의 수가 같은 것끼리 모으기





4. 등적 변형: 아래의 모양과 같이 7조각을 모두 사용하여 어떤 한 도형을 만든 상태에서, 일부 조각의 위치를 옮겨가면서 새로운 다각형을 만들어 봅시다. 그러면 여러 가지 모양을 더 빨리 쉽게 만들 수 있습니다.



5. 탱그램 게임

<게임 규칙>

- ① 한 변의 길이가 1이고 넓이가 8인 정사각형 탱그램이 있다.
- ② 탱그램 7조각들 중 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 블록다각형을 만든다.
- ③ 자신이 완성한 블록다각형 하나에서 얻을 수 있는 넓이점수와 둘레 점수는 각각 다음과 같으며 점수는 이 둘의 합으로 계산한다.(주의: 오목한 다각형은 0점)

점수=(완성한 블록 다각형 하나에서) 넓이점수 + 둘레점수

넓이점수=(블록다각형의 변의 수)×(다각형의 넓이)×(사용한 조각의 개수)

둘레점수=(완성한 블록다각형의 바깥 둘레의 길이)

- ④ 15분 동안 만든 모든 블록 다각형들의 점수 합계가 높은 사람이 이긴다.(최대 5개까지만 허용)

6. 도형만들기 점수판

내가 완성한 도형의 모양	넓이 점수			둘레 점수		넓이+둘레	넓이/둘레
	0.5	1	2	1	$\sqrt{2}$		
	2	3	2	8	4	21.6	0.59
	8			13.6			
	1	3	2	3	6	18.9	0.66
	7.5			11.4			
	2	3	2	6	4	19.6	0.69
	8			11.6			
	2	3	2	3	6	19.4	0.70
	8			11.4			
	2	3	2	8	2	18.8	0.74
	8			10.8			
평균	7.9			11.76		19.66	0.67

학습 정리

1. 탱그램(칠교판)은 큰 정사각형을 7조각으로 잘라서 만든 조각퍼즐이다. 각 조각들의 각도는 모두 45도의 배수들뿐이며, 변의 길이는 1과 $\sqrt{2}$ 의 배수로만 이루어져 있어서 조각들의 각 변을 서로 이어맞추어 다양한 도형을 만들기에 유용하다.
2. 탱그램 조각들을 다루는 동안 밀기(평행이동), 돌리기(회전이동), 뒤집기(대칭이동)의 기능을 익히고 조작활동을 통해 도형에 대한 공간감을 기르며 도형의 성질을 탐구할 수 있게 된다.
3. 탱그램 조각들을 가지고 단순히 모양이나 형상을 만들고 이름을 붙여보는 유아식 놀이에 그치지 않고 보다 다양한 수학적 도형 탐구(페러독스, 볼록 다각형 만들기 등)하는 동안 수학적 생각을 유발하고 왜 그런지 이유를 따져 물어보려는 태도를 형성하기에도 유용한 소재가 많다.

4. 참고문헌/참고사이트

특허청(2009). **발명으로의 물입 2.0.**(중급) 학생용.

박교식(2009). 다시보기 시리즈 6. **탱그램 다시보기.** 수학사랑.



<http://www.apartmenttherapy.com/uimages/ny/tangram2.jpg>
아파트 내부 장식 디자인

<http://www.archimedes-lab.org/workshoptangram4.html> 아르키메데스 실험실(탱그램 페러독스)

**학습 평가**

1. 탱그램의 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 다른 크기의 삼각형은 모두 몇 가지입니까?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 탱그램의 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 다른 크기의 정사각형은 모두 몇 가지입니까?

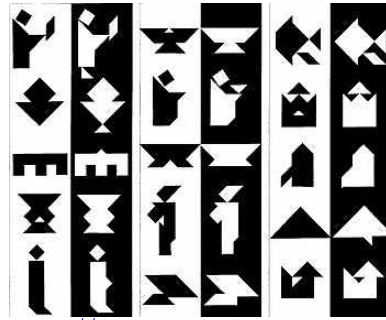
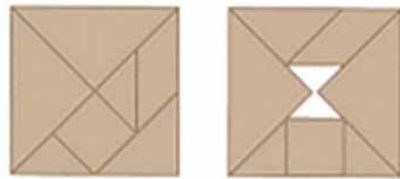
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 탱그램 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 블록 다각형은 모두 몇 가지입니까?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

13차시: 탱그램을 통한 다각형 탐구 지도

학습 안내



<http://www.archimedes-lab.org/workshoptangram4.html>

탱그램 각 조각들의 각도는 모두 45도의 배수들뿐이며, 변의 길이는 1과 $\sqrt{2}$ 의 배수로만 이루어져 있어서 각 변을 서로 이어맞추어 다양한 도형을 만들기에 유용합니다. 탱그램 조각들을 다루는 동안 밀기(평행이동), 돌리기(회전이동), 뒤집기(대칭이동)의 기능을 익히고 조작활동을 통해 도형에 대한 공간감각을 기르며 도형의 성질을 탐구할 수 있습니다. 그러나 수학영재들을 위해서는 탱그램 조각들을 가지고 단순히 모양이나 형상을 만들고 이름을 붙여보는 유아용 창의 놀이에 그치지 않고 탱그램의 패러독스를 해결하거나 다양한 블록 다각형 만들어 보는 동안 다양한 수학적 성질을 탐구하고 왜 그런지 이유를 따져 물어보는 등 수학적 사고와 태도를 길러 주어야 합니다. 그렇다면 이를 어떻게 지도할 수 있을지 알아보시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

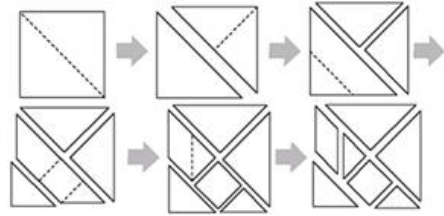
1. **(지식과 이해)** 탱그램의 구성 원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. **(기능과 조작)** 탱그램을 활용하여 여러 가지 모양의 다각형을 만들 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 도형과 관련된 수학적 개념을 발견하는 동안 수학적으로 추론하여 문제를 해결할 수도 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 탱그램 퍼즐을 다루면서 여러 수학적 성질을 스스로 찾아보고 이유를 따져 물어보려는 의지를 갖게 됩니다.
5. **(학습지도의 측면)** 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



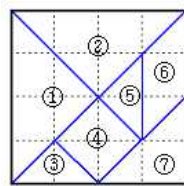
학습 내용

1. 탱그램 조각의 원리와 성질

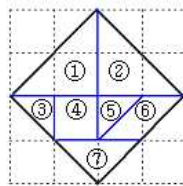
탱그램은 큰 직각이등변삼각형 2개와 중간 크기의 직각이등변삼각형 1개, 작은 직각이등변삼각형 2개, 정사각형 1개, 평행사변형 1개, 총 7개의 조각들로 구성되어 있습니다. 그런데 이 조각들을 자르는 방법을 달리하면 오른쪽 그림보다 더 적은 횟수로 7조각을 만들 수 있습니다.



2. 작은 정사각형의 변의 길이가 1cm인 아래의 칸에 다음 두 가지 방법으로 탱그램을 직접 그려봅시다.

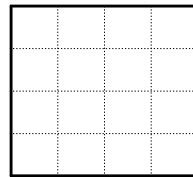


(방법 1)

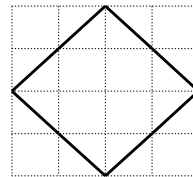


(방법 2)

칠교판을 그리는 방법



(방법 1)



(방법 2)

[그리기 연습] 왼쪽의 그림과는 다른 배치로 이곳에 그려보세요.

3. 위의 (방법 2)로 그린 각 조각들에 나타나는 각도와 변의 길이, 넓이를 비교하여 봅시다.

정보 더하기

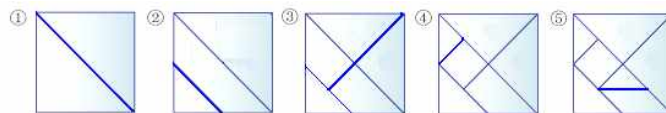
Information

(방법2)로 그린 탱그램 7조각들의 각도, 변의 길이, 넓이

번호	조각 이름	조각들의 각도 (단위 °)	변의 길이 (단위 cm)	넓이 (단위 cm ²)
①, ②	직각이등변삼각형	45°, 45°, 90°	2, 2, 2	2
③, ⑤	직각이등변삼각형	45°, 45°, 90°	1, 1,	
④	정사각형	90°, 90°, 90°, 90°	1, 1, 1, 1	1
⑥	평행사변형	45°, 135°, 45°, 135°	1,	1
⑦	직각이등변삼각형	45°, 45°, 90°		1
총합		45도의 배수들뿐임.	1,	전체넓이는 8

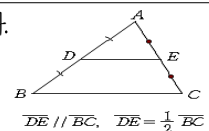
활동 더하기

가위나 칼을 최소한으로 사용하여 7조각으로 자르려고 할 때 자르는 최소횟수와 순서는?



중점연결정리, 삼각형의 한 변과 나머지 두 변의 중점에 관한 기하학 정리로서 다음이 성립한다.

즉, 삼각형 ABC에서 AB와 AC의 중점을 각각 D, E라 하면 DE와 BC 평행이고 $DE = \frac{1}{2} BC$ 이다.

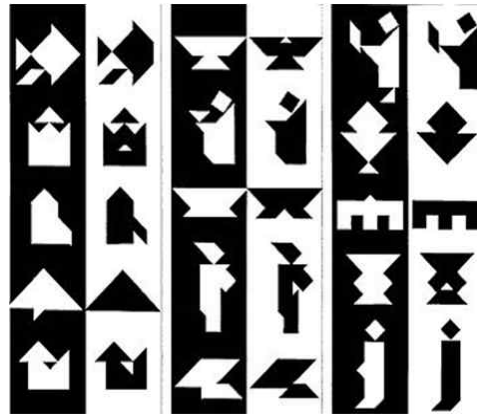


Think⁺

탱그램을 그리는 동안 ‘삼각형의 중점연결정리’를 확인하였는가?

4. 탱그램 패러독스

탱그램 조각 퍼즐을 이용하여 아래의 모양을 만들었습니다. 각 그림들은 탱그램 7조각을 모두 사용하였는데도 오른쪽 그림들은 어떤 한 조각이 빠진 것처럼 보입니다.



(출처) <http://www.archimedes-lab.org/works/optangram4.html>

1. 위의 그림들 중 한 쌍을 택하여 탱그램 조각들로 직접 만들어 보시오.

해설

▶ 탱그램 패러독스(사용한 조각의 수와 전체적인 모양은 같지만 조금씩 다른 모양이 생겨 넓이가 달라 보이는 현상)의 원인은 길이와 넓이의 차이에 따른 착시효과이다.

2. 아래의 두 직사각형은 각각 똑같은 7조각을 모두 사용하여 만든 것입니다. 그런데 오른쪽 그림은 가운데 부분이 비어있습니다. 왜 그런지 그 이유를 설명해 보세요.



2번 해설

Information



왼쪽 그림이 한 변의 길이가 4인 정사각형이라면 오른쪽 그림은 세로는 4, 가로는 $3\sqrt{2}$ 인 직사각형이다.

Think+ 탱그램 패러독스가 발생하는 원인이 무엇인가?



5. 탱그램 게임 학습(개인용)

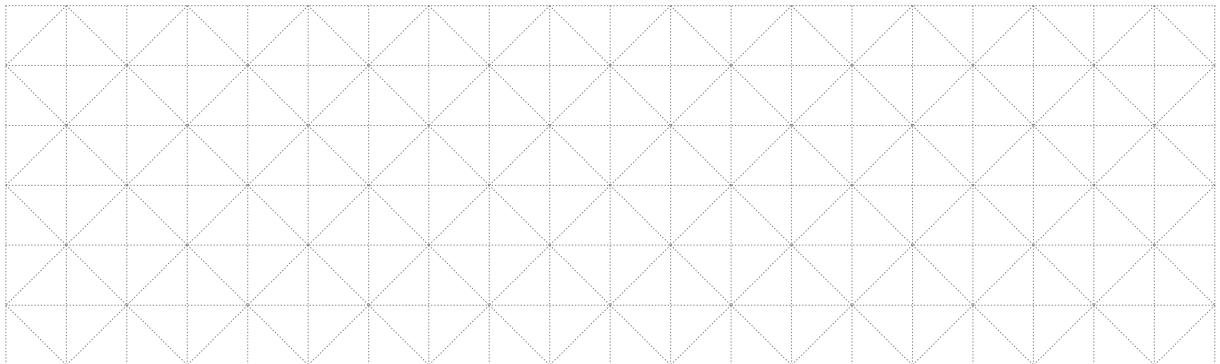
다음의 규칙에 따라 여러 가지 블록 다각형을 만들고 아래의 각 물음에 답하시오.

<게임 규칙>

- ① (방법 2)로 그린 칠교판에서 가장 작은 정사각형의 크기를 **1**이라 함시다.
- ② 탱그램 7조각들 중 일부 또는 전부를 사용하여 블록다각형을 그려봅시다. 이때 그 다각형 안에 놓인 각 조각들의 테두리까지 그려주어야 합니다.
- ④ 자신이 만든 각 블록다각형에서 얻을 수 있는 점수는 다음과 같습니다.

$$\text{점수} = (\text{블록다각형의 변의 수}) \times (\text{다각형의 넓이}) \times (\text{사용한 조각의 개수})$$

- ⑤ 한 도형으로 최대 점수를 얻은 사람에게는 그 도형의 변의 수만큼 보너스 점수를 얻습니다.
- ⑥ 정해진 시간(예, 15분) 안에 많은 점수를 얻은 사람이 이깁니다.



1. 하나의 블록 다각형에서 내가 얻은 최대 점수는 몇 점입니까?
2. 하나의 블록 다각형에서 얻을 수 있는 최대 점수는 몇 점일까요?
3. 칠각형을 만들 수 있나요? 팔각형은? 왜 그렇게 생각합니까?
4. 하나의 다각형에서 둘레가 가장 긴 도형은 어떤 것입니까?

해설

▶ 블록다각형 만들기의 넓이 점수를 극대화하기 위해서는 넓이점수의 식[(블록다각형의 변의 수)×(다각형의 넓이)×(사용한 조각의 개수)]을 살펴서 7조각을 모두 사용하면서 변의 개수가 많은 다각형을 만들어야 함을 스스로 느끼도록 한다. 그러려면 모든 조각을 사용하면서 변의 수를 많게 하여야 한다. 즉, 7조각(넓이 8)을 모두 사용하여 육각형을 만들면 $6 \times 8 \times 7 = 336$ 점이 최대임을 확인할 수 있다. 그렇다면 칠각형을 만들 수 있는지를 추가로 확인해 보아야 한다. 6조각으로 칠각형()을 만들 수는 있다. 하지만 7조각을 모두 사용하여 칠각형을 만들 수는 없다.(이에 대한 증명은 나중에.....)

교사는 “탱그램을 이용한 다각형을 만들어 갈 때 각 조각들의 변의 길이와 각도를 고려하고 있는가?”를 질문해 주어야 한다.

Think+

7조각을 모두 사용한 육각형에서 코너 부분의 작은 한 조각을 떼어내서 변을 늘리면 6조각으로 칠각형을 만들 수 있지 않을까?

모둠 활동지

_____조

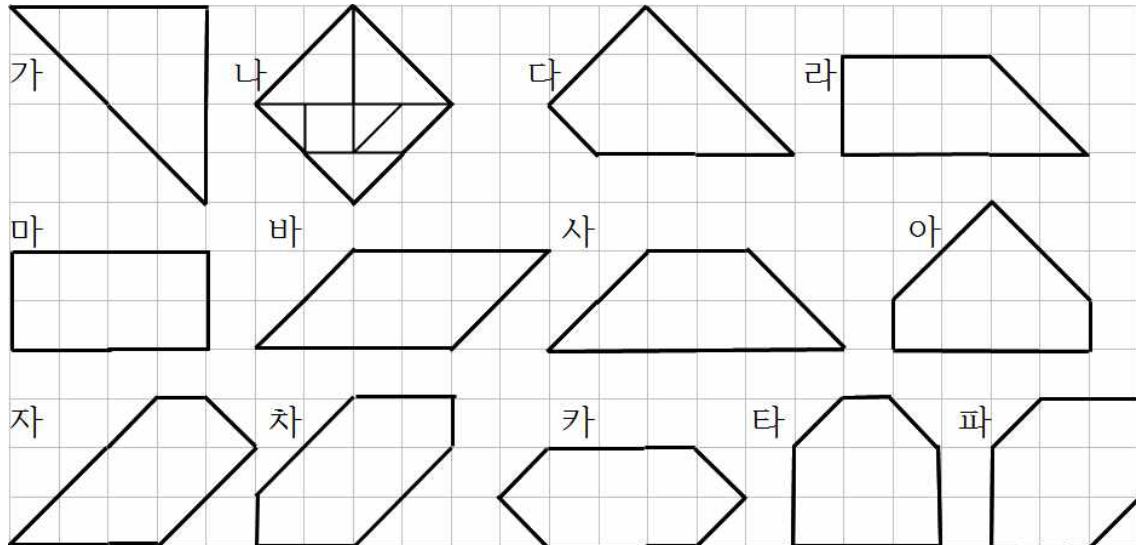
조원의 이름: _____

칠교판으로 만든 도형들의 가장 깔끔한 해법 찾기

다음은 칠교판 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 (블록) 다각형들이다. ‘나’도형에 그려진 7조각의 모양은 모두 앞면이라고 한다. 각 도형의 해법마다 뒤집은 조각(빋금으로 표시)의 개수를 A, 내부 선분의 개수를 B라 할 때, A+B값을 ‘**깔끔지수**’라 하자. 이제 각 도형의 해법을 그린 후 그 도형의 깔끔지수를 확인할 수 있도록 A(B)로 나타내기로 한다.

깔끔지수가 가장 낮은 깔끔한 해법들을 찾아보자.

[해법]



[각 도형들의 깔끔지수]

도형의 번호	가	나	다	라	마	바	사	아	자	차	카	타	파	계
내부 선분의 개수(A)		5												
뒤집은(빋금친) 조각의 개수(B)		0												

[깔끔지수를 낮출 수 있는 방법은?]

문제1. 자신이 완성한 블록다각형은 모두 몇 가지입니까?

문제2 칠교판 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 블록 다각형은 모두 13가지뿐임을 증명하시오.



4번의 해설

Information

조각들을 모두 사용하여 만들 수 있는 다각형의 내각 중에서 45° 의 개수를 p 개, 90° 의 개수를 q 개, 135° 의 개수를 r 개라고 하면 $p+q+r=n$ 이다. 또 n 각형의 내각의 크기의 합은 $180(n-2)^\circ$ 이므로, $45p+90q+135r=180(n-2)$ 에서 $p+2q+3r=4(n-2)$ 을 얻는다. 이로부터 $2p+q=8-n$ (p 와 q 는 0이상의 정수이고, n 은 3이상 8이하의 자연수)

이 조건을 만족하는 p, q, n 을 구하면 다음 표와 같다.

	3	4			5		6		7	8	참고
	2	0	1	2	0	1	0	1	0	0	6조각으로 만든 칠각형 
	1	4	2	0	3	1	2	0	1	0	
	0	0	1	2	2	3	4	5	6	8	
종류	직각이등변삼각형	직사각형1	사다리꼴	평행사변형1 등변사다리꼴1	대칭형	비대칭형	선대칭1 점대칭1 선점대칭2	불가	불가	불가	계
개수	1	2	2	2	1	1	4	0	0	0	13

그러나 이 중 7조각들의 변의 길이와 넓이를 고려하면 여러 개를 만들 수 있는 경우도 있지만 볼록다각형으로는 만들 수 없는 경우도 있다. 예를 들어 위의 표에서 모든 각이 90° 인 정사각형과 직사각형은 같은 종류이지만 서로 다른 모양이 된다.

Think+

탱그램 조각을 직접 만지지 않고 각 조각의 특징(각도, 변의 길이, 넓이 등)을 이용하여 활동판 위에 직접 그릴 수는 없을까?

7. 학습정리 및 후속 활동(산출물, 유사탱그램 만들기) 안내

1. 탱그램을 활용한 패러독스나 불록다각형 만들기 학습을 위해서는 학생들이 조각들의 기본 생성 원리(각도, 길이, 넓이 등)를 정확히 알 수 있도록 해야 한다.

2. 탱그램과 유사탱그램을 활용한 수업은 전체 3~6차시로 구성할 수 있다. 학생들에게 아래와 같은 내용으로 산출물(프로젝트)를 미리 공지해 주면 좋다.

[(프로젝트) 안내] 앞으로 몇 차시 동안 탱그램과 유사탱그램을 탐구한 후 마지막 예는 개별(또는 모둠별)로 자기 주도적으로 만든 산출물을 제출해야 합니다. 산출물의 주제 또는 제목은 「내가 만든 유사탱그램과 그것을 활용한 탐구활동이나 게임, 문제 만들기」입니다.

기존의 탱그램(칠교판)은 정사각형을 7조각으로 자른 모양입니다. 이제 'What if~?' 또는 'What if ~not?'이라는 전략을 사용하여 각 조건들을 변경해 보면 어떨까요? 앞으로 확인하게 되겠지만, '8조각 또는 6조각으로 자른다면?'에서 팔교판 또는 육교판이 만들어지며, '정사각형이 아니라면?'에서 유사탱그램들이 만들어집니다. 또 '왜 평면이어야만 하나?'라는 질문에서 입체탱그램을 만들 수도 있습니다. 이처럼 조건이나 규칙, 놀이 방법, 승리 방법 등을 다양하게 변형하면 자신들만의 유사탱그램을 쉽게 만들 수 있습니다. 어떤 것을 만들지 미리미리 생각하면서 기본적인 아이디어와 생성 원리를 기록해 두기 바랍니다.

여러분들이 만든 수학보드게임의 평가기준은 활동 6의 5가지 기준(수학적 내용, 독창성, 흥미, 협동성, 발표력)에 따르면서 추가할 수도 있고 아래 7가지 기준(첫 글자만 모으면 DIGITAL)으로 변경할 수도 있습니다.

- (1) Difference(차별성, 색다름의 정도)
- (2) Interest(재미, 몰입할 수 있는 정도)
- (3) Googolization(참고 자료들의 출처와 근거를 제시)
- (4) Integration(다양한 내용과 요소의 통합)
- (5) Trend(시대적 흐름과 경향을 반영)
- (6) Analysis(철저한 내용 분석, 수학적 원리와 의미 포함)
- (7) Liberal(자유분방한 생각과 창의성)

8. 참고문헌 및 웹사이트

송상현(2008). 수학과 교육과정에 비추어 본 탱그램과 유사탱그램의 재조명.

<수학교육학연구>, 18(3), 391-405.

특허청(2009). 발명으로의 몰입 2.0.(중급) 교사용.

<http://img.khan.co.kr/news/2006/11/12/6k1330a.jpg> 김포공항 내부의 탱그램 디자인

<http://www.archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang3.html> 아르키메데스의 실험실

<http://www.mathematische-basteleien.de/tangrams.htm> 수학적 탱그램



학습 평가

학생들에게는 학습한 핵심내용이나 느낀점을 3가지 정도 적도록 하고 학습목표의 달성 여부를 스스로 확인하는 자기평가표에 체크하고 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 보도록 하고자 합니다. 그러기 위해 자신이 먼저 직접 자신을 평가해봅시다.

1 이번 주제에서 배운 핵심 내용이나 느낀 점을 3가지만 적어 봅시다.

(1)

(2)

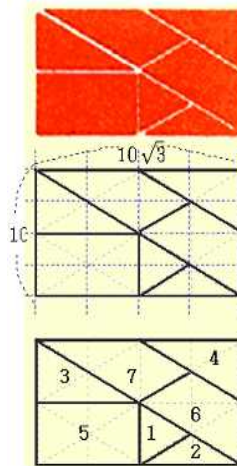
(3)

2 다음은 ‘탱그램(칠교판)퍼즐’에 대한 학습목표 달성 여부를 확인하기 위한 자기평가표입니다. 각 평가 요소에 대한 자신의 성취도를 그 달성 정도에 따라 ‘상’, ‘중’, ‘하’의 적당한 칸에 ‘✓’ 표시를 하시오. 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 봅시다.

평가요소	자기평가		
	상	중	하
(1) 탱그램(칠교판)을 잘라 만드는 방법을 바르게 이해하면서 그 속에도 ‘삼각형의 중점연결정리’가 적용된다는 것을 알았다.			
(2) 탱그램 각 조각들의 특징을 이해하였다.			
(3) 탱그램 7조각을 사용하여 여러 가지 볼록다각형들을 만들 수 있었다.			
(4) 탱그램 패러독스가 발생한 원인을 설명할 수 있다.			
(5) 탱그램 퍼즐을 다루면서 단순한 놀이나 무늬 꾸미기가 아닌 수학적 사실이나 성질을 스스로 찾아보려는 의지가 생겼다.			
(6) 탱그램을 이용하여 유사탱그램을 만들어 보려는 마음가짐이나 지도의 자신감이 생겼다.			
원인분석			

14차시: �핑크스 퍼즐

학습 안내



오이디푸스와 �핑크스

<http://blogimg.ohmynews.com/attach/3590/1355689627.jpg>

스핑크스에는 두 가지의 종류가 있습니다. 하나는 이집트의 피라미드를 지키는 �핑크스이고 다른 하나는 그리스-로마신화에서 나오는 �핑크스인데 이는 여성의 얼굴에 날개 달린 사자의 모습을 한 괴물입니다. 여기서는 그리스 로마 신화에 나오는 수수께끼와 관련된 �핑크스입니다.

‘스핑크스의 옛날 수수께끼와 새로운 �핑크스 퍼즐’에 관한 애니메이션에서 보셨듯이, 본 강좌에서는 �핑크스의 전설에 나왔던 그 �핑크스가 오늘날 되살아나서 스스로 지식이 있다고 자랑만 하는 영재들에게 새로운 도전을 하고 있습니다. 현대의 오이디푸스처럼 이제 �핑크스퍼즐을 잡으러 함께 떠나 볼까요?

□스핑크스의 옛날 수수께끼와 새로운 �핑크스 퍼즐

스핑크스는 두 가지 종류가 있습니다. 하나는 이집트의 피라미드를 지키는 �핑크스이고 다른 하나는 그리스-로마신화에서 나오는 �핑크스인데 이는 여성의 얼굴에 날개 달린 사자의 모습을 한 괴물입니다. 여기서는 그리스 로마 신화에 나오는 수수께끼와 관련된 �핑크스입니다.

스핑크스는 늘 자신이 사람보다 지혜롭다고 여기고 사람을 아주 무시했습니다. 그래서 나그네들이 많이 지나다니는 길목에 버티고 서서 다음의 수수께끼를 내고 그것을 푸는 사람만 그 길을 지나갈 수 있고 그렇지 못하면 잡아먹겠다고 했습니다.

"하나의 목소리를 갖고 아침에는 네 발, 낮에는 두 발, 저녁에는 세 발이 되는 것이 무엇인가?"



그리스신화의 �핑크스, BC 540년, 뉴욕 메트로폴리탄 미술관 소장



많은 사람들이 그곳을 무심코 지나거나 자신의 오만함을 자랑하려다가 죽었습니다. 그 때 오이디푸스(Oedipus)라는 사람이 나타나 다 음과 같이 말했습니다.

"어려서 네 발로 기다가 커서는 두 발로 걸으나 늙어서는 다시 지팡이를 짚어 세 발이 되는 사람이 아니겠는가!"



오이디푸스

그러자 스펅크스는 비로소 자기보다 더 현명한 사람도 있음을 알고 부끄러워하며 스스로 죽어버렸다고 합니다. 이때부터 오이디푸스는 그 지역의 모든 사람들의 존경을 받게 되고 결국은 그들의 왕이 되었습니다. 한 사람의 지혜로운 사람이 수많은 사람의 목숨을 건지게 된 것입니다.

그리스-로마 신화에 나오던 스펅크스가 아래와 같은 새로운 퀴즈를 들고 살아나 오늘날 현대인들 중에 지식 있다고 자랑하는 사람을 찾고 있습니다.

<스퍽크스의 새로운 퍼즐>

"내가 준 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 볼록한 모양의 다각형은 모두 몇 가지인가?"

이 스펅크스 퍼즐을 탐구하면서 그 옛날 오이디푸스라는 한 사람의 지혜로운 사람이 수많은 사람의 목숨을 건지게 되었듯이, 여러분 또한 자신이 가지고 있는 지식과 지혜를 오늘날 다른 사람을 위해 봉사하는데 사용할 수 있기를 기대합니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 유사칠교판인 스펅크스퍼즐의 구성 원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. **(기능과 조작)** 스펅크스퍼즐을 활용하여 여러 가지 모양의 다각형을 만들 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 일상적인 용어인 '깔끔함'을 수학적으로 정의하면서 보다 '깔끔한' 도형을 만들기 위한 공간감각(시각화)과 기호의 표현 등을 활용하여 과제를 수행하고 새로운 문제를 만들어 낼 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 스펅크스의 새로운 퍼즐을 해결하겠다는 의지와 도전감을 갖게 됩니다.

학습 내용

1. 스�핑크스퍼즐의 유래

스핑크스(Sphinx)는 두 가지의 종류가 있습니다. 하나는 이집트의 피라미드를 지키는 스�핑크스이고 다른 하나는 그리스-로마신화에서 나오는 스�핑크스인데 이는 여성의 얼굴에 날개 달린 사자의 모습을 한 괴물입니다. 여기서는 그리스 로마 신화에 나오는 수수께끼와 관련된 스�핑크스입니다.

All of the Richter puzzles shown so far have used only 45-degree and 90-degree angles. Eight of the Richter puzzles are polygonal shapes dissected into pieces with 30-60-90-degree angles. These are shown in Fig. 15 arranged by increasing numbers of pieces.

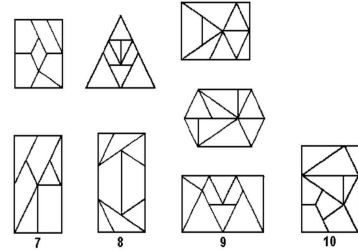
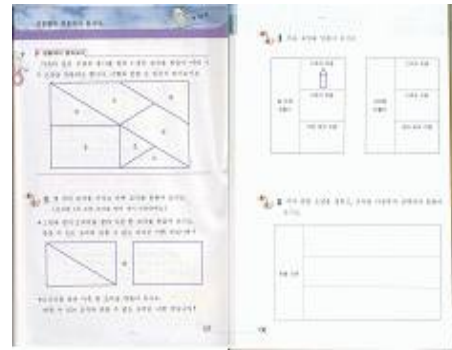


Fig. 15

출처: <http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap01c.htm>

스핑크스 퍼즐은 독일의 리히터회사가 1800년대에 유행하던 여러 가지 퍼즐을 모아 소개하고 있는 것들 중에 하나입니다. 이는 존 라우쉬닷컴(<http://www.johnrausch.com>)에서도 간단히 소개하고 있지만 네덜란드의 수학교육학자인 반힐레(Pierre van Hiele)가 '7조각 모자이크 퍼즐'라는 이름으로 이 퍼즐을 소개하면서 기하학적 사고력 개발에 좋은 도구라고 제안함에 따라 우리나라의 7차 5학년 수학교과서에서 문제 푸는 방법 찾기를 다루는 마지막 쪽에도 소개하고 있습니다.



7 수학 교과서에 소개된 7조각 모자이크퍼즐 (5-나, 137-138쪽)

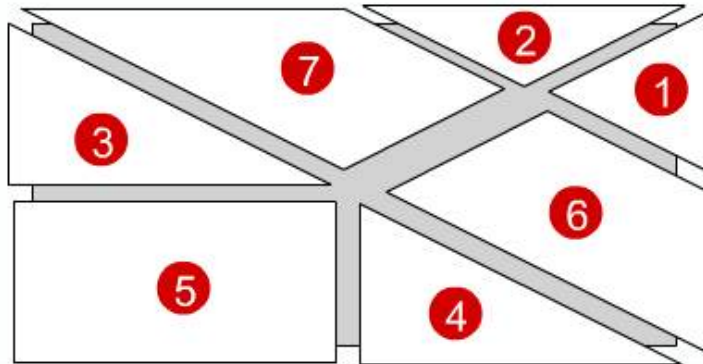
하지만 이것을 사용한 학습 활동 내용은 매우 빈약한 편입니다. '7조각 모자이크 퍼즐'은 칠교판(탱그램)과 비교해 볼 때 조각의 개수가 7개라는 것 외에도 몇 가지 차이가 있습니다. 칠교판은 정사각형과 그것을 이등분한 직각이등변삼각형을 기본형으로 사용하므로 각 조각에 나타나는 각도는 45° , 90° , 135° 뿐이므로 정삼각형이나 둔각삼각형은 만들지 못하고 그 7조각으로 만들 수 있는 다각형은 모두 13가지뿐입니다. 그래서 좀 더 다양한 다각형을 만들 수 있는 퍼즐 조각이 필요함에 따라 만든 유사탱그램 중의 하나입니다. 이는 탱그램보다 훨씬 더 다양한 수학적 도형을 만들 수 있습니다.

본 강좌에서는 이 '7조각 모자이크 퍼즐'에 스�핑크스의 전설을 결부시켜 '스핑크스퍼즐'이라는 이름으로 사용하고자 합니다.



2. 스피크스퍼즐 자르기

✳ 7조각으로 자르기

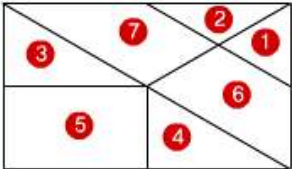


자르는 순서

- (1) 직사각형에서 가운데 긴 대각선을 긋는다.
- (2) 위쪽 직각삼각형의 두 변의 중점을 연결하면 대각선과 평행을 이룬다.
- (3) 아래쪽 직각삼각형의 각 변의 중점을 연결하는 직사각형(5)을 만들면 ③, ④조각이 분리된다.
- (4) 큰 직사각형의 중심과 위쪽 직각삼각형의 직각부분 꼭지점을 연결하면 ①, ②와 ⑥, ⑦조각이 분리된다.

3. 마우스 조작법

스피크스 퍼즐



샘플보기

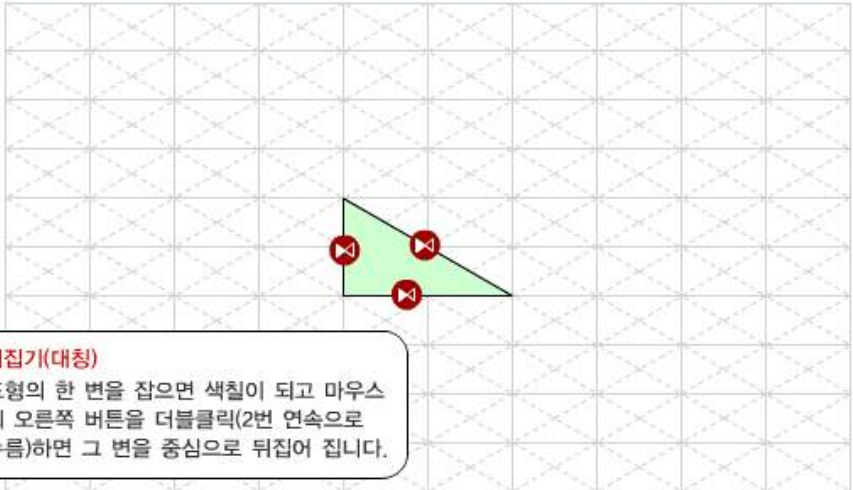
움기기 (이동)

돌리기 (회전)

뒤집기 (대칭)

□ 샘플보기를 클릭하면 탭그라운드 활동판에 도형이 나타납니다.

스피크스 활동판



뒤집기(대칭)
도형의 한 변을 잡으면 색칠이 되고 마우스의 오른쪽 버튼을 더블클릭(2번 연속으로 누름)하면 그 변을 중심으로 뒤집어 집니다.

각 변에 있는 도형을 클릭하면 도형이 반전됩니다.

4. 도형의 이름

* 7조각 중 전부 또는 일부분을 사용하여 여러 가지 다각형을 만들 수 있습니다. 활동판 각 도형의 이름을 알아봅시다.

탱그램 조각들

* 각 도형에 마우스를 올리면 도형의 이름을 알 수 있습니다. 도형을 클릭하면 만드는 방법을 볼 수 있습니다.

목록형

5. 공통점 찾기

같은 다각형끼리 모으기	변의 갯수가 3개 변의 갯수가 4개 변의 갯수가 5개 변의 갯수가 6개 변의 갯수가 7개
평행선 쌍의 수가 같은 것끼리 모으기	대변이 평행인 쌍의 수 0쌍 쌍의 수 1쌍 쌍의 수 2쌍 쌍의 수 3쌍



번호	조각 이름	조각에 나타나는 모든 각도(단위) °	평행인 쌍의 수	대칭축의 개수	정삼각형을 기준으로		분수
					변의 길이	넓이	
①	정삼각형	$60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$	0	3	1, 1, 1	1	$\frac{1}{16}$
②	둔각이등변삼각형	$30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$	0	1	$1, 1, \sqrt{3}$	1	$\frac{1}{16}$
③, ④	직각삼각형	$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$	0	0	$1, \sqrt{3}, 2$	2	$\frac{1}{8}$
⑤	직사각형	$90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$	2	2	$1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}$	4	$\frac{1}{4}$
⑥	등변사다리꼴	$60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$	1	1	1, 1, 1, 2	3	$\frac{3}{16}$
⑦	사다리꼴	$30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$	1	0	$1, 1, \sqrt{3}, 2$	3	$\frac{3}{16}$
전체 종류(또는 합계)		$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$			$1, \sqrt{3}, 2$	16	1

6. 수준별 학습

학습내용

설명/안내

마우스조작법

기본학습

수준별학습

문제해결하기

울트라짱

수준별 학습 - 울트라 짱

▶ 7조각을 모두 사용하여 자신이 직접 새로운 볼록다각형을 만들어 보시기 바랍니다.

스피크스 퍼즐

스피크스 활동판

○ 상단에 있는 각 도형을 클릭하세요.
도형이 복제됩니다.
복제된 도형을 가지고 탭그램 활동판에 다양한 샘플을 만들어 보시기 바랍니다.

⑦ 도형안의 그림을 클릭하면 도형이 회전합니다.

7. 게임하기

<게임 규칙>

- ① 16칸 크기의 직육면체 스텝크스 퍼즐이 있다.
- ② 스텝크스퍼즐 7조각들 중 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 블록다각형을 만든다.
- ③ 자신이 완성한 블록다각형 하나에서 얻을 수 있는 넓이점수와 둘레 점수는 각각 다음과 같으며 점수는 이 둘의 합으로 계산한다.(주의: 오목한 다각형은 0점)

점수=(완성한 블록 다각형 하나에서) 넓이점수 + 둘레점수

넓이점수=(블록다각형의 변의 수)×(다각형의 넓이)×(사용한 조각의 개수)

둘레점수=(완성한 블록다각형의 바깥 둘레의 길이)

- ④ 15분 동안 만든 모든 블록 다각형들의 점수 합계가 높은 사람이 이긴다.
(최대 5개까지만 허용)

<스텝크스퍼즐 조각들>



<스텝크스퍼즐 활동판>



[질문1] 한 가지 다각형에서 넓이를 최대로 하려면 어떻게 해야 할까?

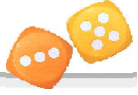
[질문2] 한 가지 다각형에서 둘레의 길이를 최대로 하려면 어떤 모양이 유리할까?

[질문3] 둘레점수와 넓이점수의 합이 가장 큰 도형은 어떤 모양일까?

[질문4] 넓이/둘레의 값이 가장 큰 도형을 만들려면 어떤 모양이어야 할까?

도형만들기 점수판

내가 완성한 도형의 모양	넓이점수				둘레점수		넓이+둘레	넓이/둘레
	1	2	3	4	1	$\sqrt{3}$		
	2	2	2	1	10	0	26.00	1.60
	16				10			
	2	2	2	1	6	3	27.19	1.43
	16				11.19			
	2	2	2	1	4	4	26.92	1.57
	16				10.92			
	2	2	2	1	8	4	30.92	1.07
	16				14.92			
<도형5>								
평균	7.9				11.76		27.76	0.67

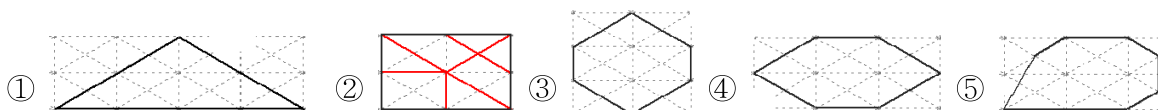


학습 정리

1. 스프링스 퍼즐은 세계의 여러 가지 퍼즐을 소개하는 존 라우쉬닷컴(<http://www.johnrausch.com>)에 간단히 언급되고 있지만 네덜란드의 수학교육학자인 반힐레(Pierre van Hiele)가 ‘7조각 모자이크 퍼즐’라는 이름으로 이것이 기하학적 사고력 개발에 좋은 도구라고 제안함에 따라 우리나라의 수학교과서에도 소개하고 있는 유사탱그램의 일종이다. 하지만 이것을 사용한 학습 활동 내용이 매우 빈약하여 본 강좌에서 이 퍼즐에 다 스프링스의 전설을 결부시켜 ‘스프링스퍼즐’이라는 이름으로 사용한 것이다.
2. 탱그램(칠교판)은 정사각형을 기본형으로 그것을 이등분한 직각이등변삼각형이 사용되므로 각 조각에 나타나는 각도는 45° 의 배수들뿐이며 변의 길이는 1과 $\sqrt{2}$ 의 배수이다. 이에 반해 스프링스퍼즐은 정삼각형을 기본으로 그것을 이등분하여 만든 둔각이등변삼각형이 사용되므로 각 조각에 나타나는 각도는 30° 의 배수들뿐이며 변의 길이는 1과 $\sqrt{3}$ 의 배수이다.
3. 스프링스퍼즐로 여러 가지 블록 다각형을 만들 수 있다. 주어진 도형이외에 새로운 도형들을 찾아보면서 모두 몇 가지나 만들 수 있는지 증명해 보자.
4. 참고문헌/참고사이트
 특허청(2009). **발명으로의 물입 2.0.**(중급) 학생용.
<http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap01c.htm> 존 라우쉬의 퍼즐의 세계(스프링스퍼즐은 그림 15의 #7)

학습 평가

1. 스프링스퍼즐의 일부 또는 전부를 사용하여 만들 수 있는 크기가 다른 삼각형은 모두 몇 가지입니까?
 ① 3 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14
2. 다음 중 스프링스퍼즐 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 블록다각형은?
 ① 직각삼각형 ② 정사각형 ③ 정육각형 ④ 칠각형 ⑤ 정팔각형
3. 다음 중 탱그램 7조각을 사용하여 만들 있는 블록 다각형들 중에 ‘넓이/둘레’의 값이 가장 큰 모양은?



15차시: 스�핑크스퍼즐을 통한 도형 놀이 지도

학습 안내



오이디푸스와 스�핑크스

스핑크스(Sphinx) 퍼즐은 독일의 리히터회사가 1800년대에 유행하던 여러 가지 퍼즐을 모아 소개하고 있는 것들 중에 하나로 존 라우쉬닷컴(<http://www.johnrausch.com>)에서 간단히 소개하고 있으며 네덜란드의 수학교육학자인 반힐레(Pierre van Hiele)가 '7조각 모자이크 퍼즐'라는 이름으로 이 퍼즐을 소개하면서 기하학적 사고력 개발에 좋은 도구라고 제안함에 따라 우리나라의 7차 5학년 수학교과서에서 문제 푸는 방법 찾기를 다루는 마지막 쪽에도 소개하고 있습니다. 하지만 학습 활동 내용은 매우 빈약한 편입니다. '7조각 모자이크 퍼즐'은 칠교판(탱그램)과 비교해 볼 때 조각의 개수가 7개라는 것 외에도 몇 가지 차이가 있습니다.

탱그램 조각들은 각도는 45도의 배수이며 변의 길이는 $\sqrt{2}$ 의 배수인 조각퍼즐임에 반해 스텍스퍼즐 조각들은 각도가 30도의 배수이며 변의 길이는 $\sqrt{3}$ 의 배수인 조각퍼즐이므로 탱그램으로는 만들지 못하던 정삼각형과 둔각삼각형까지 만들 수 있고 만들 수 있는 볼록 다각형들도 훨씬 더 다양합니다. 스텍스퍼즐 조각들을 다루는 동안 탱그램을 통해 학습한 밀기(평행이동), 돌리기(회전이동), 뒤집기(대칭이동)의 기능을 익히고 조각활동을 통해 도형에 대한 공간감각 기르기, 도형의 성질 탐구들뿐만 아니라 보다 다양한 게임도 진행할 수 있습니다. 이제 이를 어떻게 지도할 수 있을지 알아보시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) 유사칠교판인 스텍스퍼즐의 구성 원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. (기능과 조작) 스텍스퍼즐을 활용하여 여러 가지 모양의 다각형을 만들 수 있습니다.
3. (수학적 사고) 일상적인 용어인 '깔끔함'을 수학적으로 정의하면서 보다 '깔끔한' 도형을 만들기 위한 공간감각(시각화)과 기호의 표현 등을 활용하여 과제를 수행하고 새로운 문제를 만들어 낼 수 있습니다.
4. (태도와 의지) 스텍스의 새로운 퍼즐을 해결하겠다는 의지와 도전감을 갖게 됩니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.

이 강좌를 통해 여러분은 지난 시간에 학습했던 4가지 학습목표를 재확인하면서 이제 그것을 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 더 활용할 수 있는 몇 가지 소재들을 배우게 됩니다.

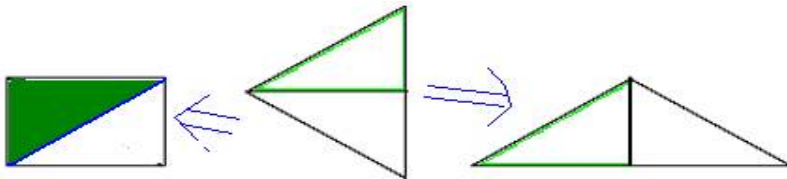


학습 내용

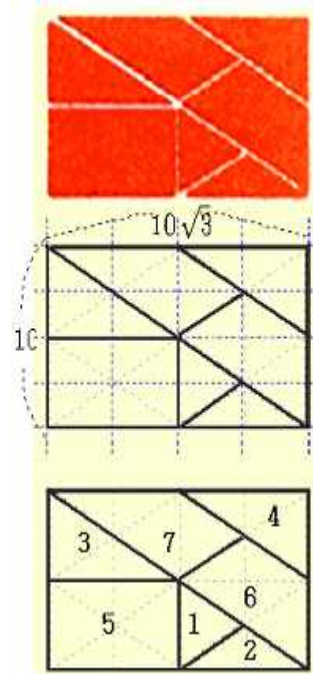
1. 퍼즐 조각 탐구

탱그램은 정사각형을 7조각으로 자른 것이라면 스팅크스 퍼즐은 직사각형을 7조각으로 잘랐습니다. 탱그램 조각들 중 가장 작은 삼각형이 정사각형의 절반이 되도록 만든 것이라면 스팅크스 퍼즐 조각들 중 가장 작은 삼각형은 정삼각형이 되도록 만든 것입니다.

1) 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 그림과 같이 절반으로 나누었을 때의 각도, 변의 길이와 넓이의 관계를 알아보시오.



절반으로 쪼개고 아래의 직각삼각형을 뒤집어 윗쪽으로 붙이면 왼쪽의 직사각형을 만들 수 있습니다. 그리고 돌리기만 해서 오른쪽으로 붙이면 둔각이등변 삼각형을 만들 수도 있습니다. 정삼각형의 모든 각도는 60도이므로 이를 이등분하면 각도는 30, 60, 90도이고 변의 길이는 1: $\sqrt{3}$:2인 직각삼각형을 얻을 수 있습니다. 따라서 스팅크스퍼즐에서 2변의 둔각이등변삼각형은 1변의 정삼각형과 크기가 같습니다.

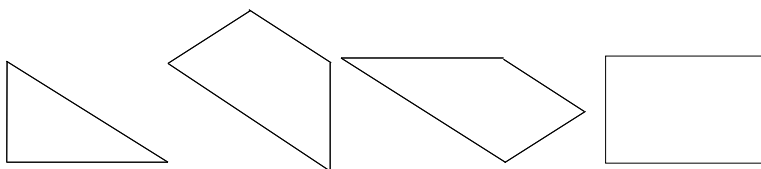


스팡크스퍼즐 설계도

2) 스팅크스퍼즐의 각 조각들의 특징을 알아봅시다.

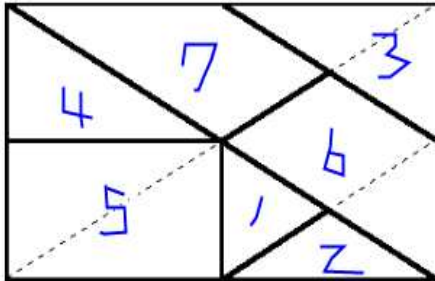
조각		조각에 나타나는 모든 각도(단위 °)	평행인 쌍의 개수	대칭축의 개수	정삼각형을 기준으로		
번호	이름				변의 길이	넓이	크기
①	정삼각형	60, 60, 60	0	3	1, 1, 1	1	$\frac{1}{16}$
②	둔각이등변 삼각형	30, 30, 120	0	1	1, 1, $\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{16}$
③,④	직각삼각형	30, 60, 90	0	0	1, $\sqrt{3}$, 2	2	$\frac{1}{8}$
⑤	직사각형	90, 90, 90, 90	2	2	1, $\sqrt{3}$	4	$\frac{1}{4}$
⑥	등변사다리꼴	60, 60, 120, 120	1	1	1, 1, 1, 2	3	$\frac{3}{16}$
⑦	사다리꼴	30, 60, 120, 150	1	0	1, 1, $\sqrt{3}$, 2	3	$\frac{3}{16}$
종합		30도의 배수들	비대칭인 도형은 두 종류뿐(3개)		1, $\sqrt{3}$, 2	16	1

3) 스팅크스퍼즐의 작은 조각들을 사용하여 더 큰 조각을 만들어 봅시다.

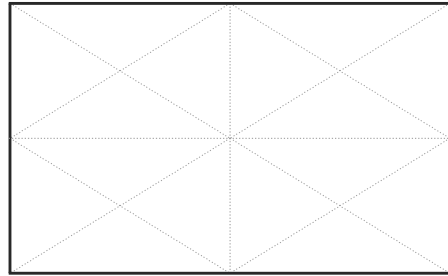


2. 조각과 친해지기

- 1) 스피크스퍼즐 7조각을 사용하여 아래의 직사각형과 정삼각형을 만들어 봅시다. 왼쪽의 그림과 전체의 모양은 같지만 안쪽에 놓인 조각들의 위치는 다를 수 있습니다. 자신이 직접 만든 직사각형과 정삼각형을 오른쪽에 다시 그려 보시오.



직사각형



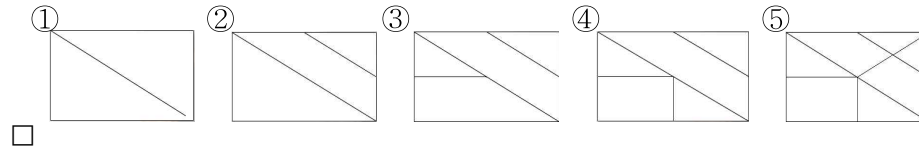
직사각형을 왼쪽과 다르게 그리기

- ① 내부에 사용한 선분의 개수 : 6 개
 ② 나의 직사각형 모양을 그리는 데 필요한 선분의 개수: 개

활동 더하기

Activity

- ▶ 가위나 칼을 최소한으로 사용하여 7조각으로 자르려고 할 때 자르는 최소횟수 구하기

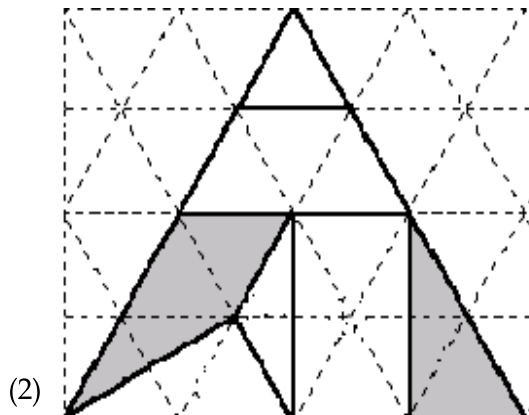


바둑돌을 준비하여 스피크스퍼즐에서의 천재지수를 나타내는 점수로 약속하고, 퍼즐을 탐구하면서 도형을 하나씩 만들거나 선분의 수 또는 뒤집은 조각의 수를 줄인만큼 스피를 얻어가는 방식으로 게임의 묘미를 가미할 수도 있습니다.

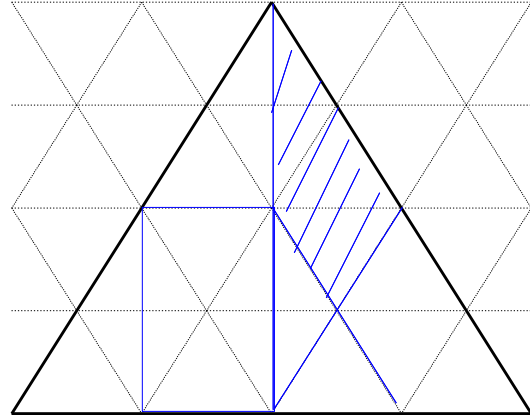
(약속하기) 스피(sphin): 스피크스퍼즐에서 천재지수를 나타내는 점수 단위

☺ 은행의 준비물 : 바둑돌 다수(바둑돌 개당 1스핀, 큰 수는 색깔로 구분할 수도 있음)

- (규칙) 1. 주어진 퍼즐 또는 문제를 풀거나 선생님이 내 주시는 문제를 해결하면 스피를 얻는다.
 2. 짝 게임에서 이기면 거기에 걸린 스피를 얻는다.
 3. 가장 많은 '스핀'을 얻는 사람이 이긴다.
 4. 정해진 활동 이외의 암거래를 하거나 규칙을 어기면 스피를 벌금으로 물어야 한다.



정삼각형(색칠은 뒤집은 조각 표시임)



정삼각형을 다르게 그리기

① 내부에 사용한 선분의 개수 : 7 개② 뒤집은 조각의 개수 : 2 개① 필요한 선분의 개수: 5 (개)② 뒤집은 조각의 개수: 1 (개)

2. 앞에서 주어진 왼쪽 그림과 여러분 각자가 그린 그림, 그리고 친구들이 그린 그림들 중에서 어떤 모양이 더 깔끔한지 토론해 봅시다. 여기서 ‘**깔끔하다**’는 뜻은 무엇일까요?

Definition(정의)

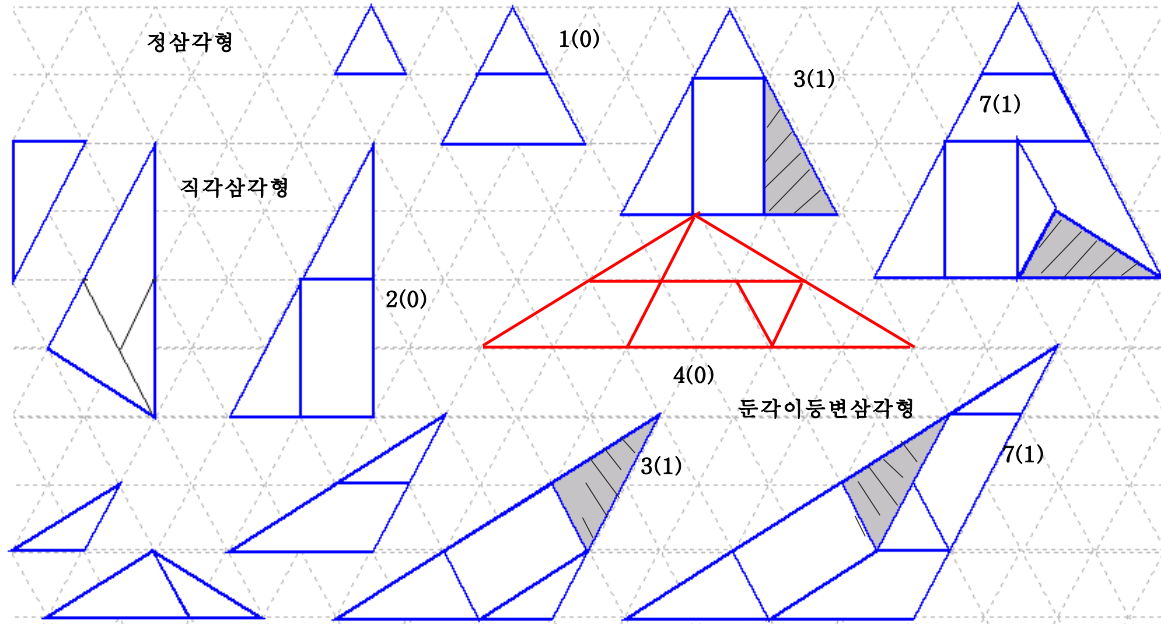
스텝스퍼즐로 만든 도형의 내부에 그린 선분의 개수를 A , 기본 직사각형을 기준으로 뒤집은 조각의 개수를 B 라 할 때 $A(B)$ 로 나타내고, $A+B$ 를 ‘**깔끔지수**’라 합시다. 이때 이 깔끔지수가 더 적은 도형을 ‘**더 깔끔하다**’고 합니다.

스텝스퍼즐의 해법을 그리는데 사용한 선분의 개수를 A , 기본형인 그림 4-1을 기준으로 뒤집은 조각의 개수를 B 라 하고 $A(B)$ 로 표시하기로 합니다. 이때 $A+B$ 를 스텝스퍼즐 해법의 ‘**깔끔지수**’라고 약속하고 이 깔끔지수가 더 적은 도형을 ‘**더 깔끔하다**’고 하기로 합니다.

이때 뒤집은 조각의 개수를 골프에서의 ‘우드 또는 아이언 샷의 수’, 뒤집은 조각의 개수를 ‘퍼팅의 수’처럼 생각하면 깔끔지수가 7인 것을 기준으로 하나를 줄이면 버디, 둘을 줄이면 이글, 셋을 줄이면 알바트로스 해법이라고 하고, 하나가 더 늘어난 것은 보기, 둘이 늘어난 것은 더블보기 라는 식으로 부르면서 골프 처럼 합계가 더 낮은 사람이 이기는 게임으로 활동을 진행할 수 있습니다.

3. 모든 크기의 삼각형 만들기

1) 스프링스퍼즐 7조각의 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 크기의 삼각형을 만들어 보시오.



[참고] 위 그림에서 빗금을 친 조각은 설계도의 직사각형을 기준으로 최초로 배열된 각각의 조각들을 뒤집은 것이다. 각 도형에 적은 수는 '내부에 그린 선분의 수(뒤집은 조각의 수)'를 A(B)로 나타낸 것이다.

해설

▶ 스프링스퍼즐 조각들의 각도는 30° 의 배수이므로 정삼각형과 직각삼각형, 둔각이등변 삼각형을 만들 수 있다. 모든 조각의 넓이(단위)는 1, 2, 3, 4뿐이므로 이를 사용하여 만든 다각형의 넓이도 자연수의 배수이다. 이제 넓이가 16(단위)이 될 때까지 기준이 되는 한 변의 길이를 차례로 1과 $\sqrt{3}$ 의 배수로 늘려가면서 구하면 그림과 같이 13가지뿐이다.

▶ 스프링스퍼즐 7조각을 모두 사용하여 만든 삼각형은 두 가지([그림 14]의 3-1, 3-2) 뿐인데 그 이유는 간단하다. 우선, 스프링스퍼즐 7조각들에 나타나는 각도는 30° , 60° , 90° , 120° , 150° 이다. 이들이 각 도형의 꼭지점에 나타나는 개수를 각각 a, b, c, d, e개라 하고 아래의 두 식을 세워서 풀면 된다.

$$30a + 60b + 90c + 120d + 150e = 180 \quad \cdots \cdots ①$$

$$a + b + c + d + e = 3 \quad \cdots \cdots ②$$

두 식을 만족시키는 모든 경우는 다음과 같이 두 가지 뿐이다.

(1) $c=3$, $a=b=d=e=0$ 일 때; (3-1의 정삼각형)

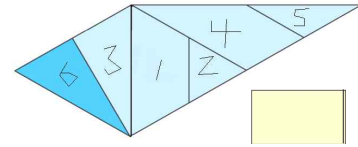
(2) $e=0$, $d=1$ 일 때; $a+2b+3c=2$, $a+b+c=2$.

$\therefore a=2$, $d=1$, $b=c=e=0$. (3-2의 둔각이등변삼각형)



4. 다각형 이름 부르기 게임(2인용)

두 사람이 번갈아 가며 블록다각형을 계속 만들어 가기 게임



- 한 세트(7 조각)의 스팅크스 퍼즐을 준비한다.
- 가위, 바위, 보에서 이긴 사람이 게임을 먼저 시작할지 나중에 할지를 정한다.
- 두 사람이 번갈아 가며 조각을 하나씩 택하여 이미 놓인 조각 변에 정확히 맞닿도록 붙여 놓으면서 자신이 만든 전체 도형의 정확한 이름을 말한다. (4번과 5번 조각을 붙여놓은 삼각형은 그냥 '삼각형'이라고 하면 안 되며 '둔각이등변삼각형'이라고 해야 한다. 자신이 잘못 말한 이름을 더 정확하게 고쳐 준 사람에게 자신의 1스퍽을 준다.)
- 블록다각형을 계속 만들어 가면서 더 이상 만들지 못하거나 놓을 조각이 없는 사람이 진다.(오목한 모양의 다각형을 만들어서는 안 된다. 각 회에서 이긴 사람이 1스퍽을 얻는다.)
- 다시 게임을 할 때는 이미 만들었던 다각형과 똑같은 모양으로 이기거나 똑같은 전략을 사용하면 안 된다.(기억력이 나쁜 별칙으로 패함.)
- 3판 2선승제로 게임을 하여 이긴 사람이 두 사람의 대결에서 승리한 것으로 한다.(모듬별 순위별로 10, 7, 5, 3 스팅의 보너스를 얻는다.)
- 각 조별 우승자들끼리 결승 토너먼트전을 벌일 수도 있다.(우승은 10스퍽, 준우승 5스퍽)

(예) 번호는 조각을 놓은 순서인. 시작
직사각형 조각을 놓을 수 없으므로
나중에 놓은 사람이 이겼다.

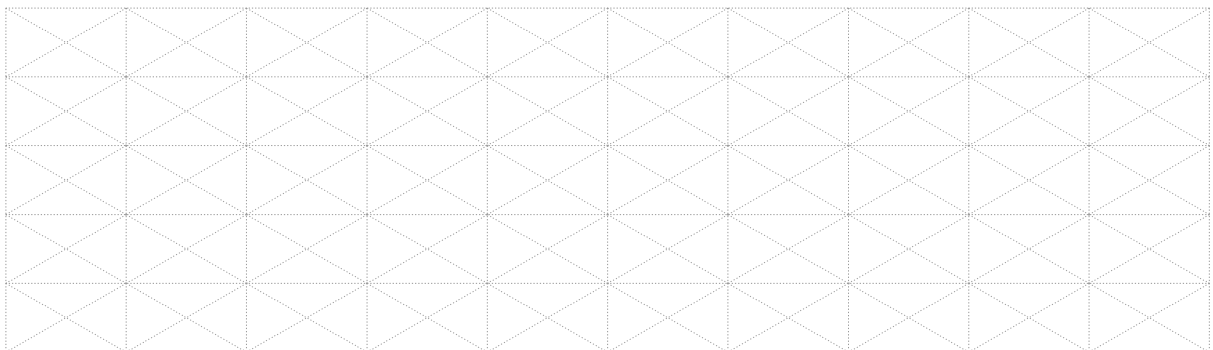
Think+

게임2에서 각 조각이 하나 먼저 놓여있을 때 그 때의 필승전략을 찾거나 先手必敗인 조각을 찾아라!

8. 다각형 만들기 게임(개인용)

스�팅크스퍼즐 7조각을 모두 사용하여 아래의 조건에 맞는 블록다각형을 만들고 내부에는 각 조각의 테두리를 자세히 그린다음, 각 해답별로 A(B)를 표시한 다음 아래의 조건을 만족하는 도형을 찾아봅시다.

- '점수=(다각형의 변의 수×다각형의 넓이×사용한 조각의 개수)'가 최대인 도형
- 변의 수가 가장 많은 도형
- 둘레의 길이가 가장 긴 도형
- '넓이/둘레'의 값이 가장 큰 도형



<게임 규칙>

- ① 16칸 크기의 직육면체 스텝크스 퍼즐이 있다.
- ② 스텝크스퍼즐 7조각들 중 일부 또는 전부를 사용하여 여러 가지 볼록다각형을 만든다.
- ③ 자신이 완성한 볼록다각형 하나에서 얻을 수 있는 넓이점수와 둘레 점수는 각각 다음과 같으며 점수는 이 둘의 합으로 계산한다.(주의: 오목한 다각형은 0점)

점수=(완성한 볼록 다각형 하나에서) 넓이점수 + 둘레점수

넓이점수=(볼록다각형의 변의 수)×(다각형의 넓이)×(사용한 조각의 개수)

둘레점수=(완성한 볼록다각형의 바깥 둘레의 길이)

- ④ 15분 동안 만든 모든 볼록 다각형들의 점수 합계가 높은 사람이 이긴다.
(최대 5개까지만 허용)

<스텝크스퍼즐 조각들>



<스텝크스퍼즐 활동판>



다음과 같은 질문을 준비해 두고 적절할 때 생각을 유도하는 질문을 던질 필요가 있습니다.

[1] 한 가지 다각형에서 넓이를 최대한 하려면 어떻게 해야 할까?

[발문2] 한 가지 다각형에서 둘레의 길이를 최대한 하려면 어떤 모양이 유리할까?

[발문3] 둘레점수와 넓이점수의 합이 가장 큰 도형은 어떤 모양일까?

[발문4] 넓이/둘레의 값이 가장 큰 도형을 만들려면 어떤 모양이어야 할까?

도형만들기 점수판

내가 완성한 도형의 모양	넓이 점수				둘레 점수		넓이+둘레	넓이/둘레
	1	2	3	4	1	$\sqrt{3}$		
	2	2	2	1	10	0	26.00	1.60
	16				10			
	2	2	2	1	6	3	27.19	1.43
	16				11.19			
	2	2	2	1	4	4	26.92	1.57
	16				10.92			
	2	2	2	1	8	4	30.92	1.07
	16				14.92			
<도형5>								
평균	7.9				11.76		27.76	0.67



5. 다각형 골프 게임(모둠용)

활동은 개인별 학습으로도 가능하지만 시간이 많이 걸리므로 수업 중에는 모둠별로 실시하는 것이 좋습니다. 각 도형의 해법을 탐구하기 위해 내부에 조각의 테두리를 그리면서 필요한 최소 선분의 개수가 더 적고 뒤집은 개수도 적을수록 이기는 골프게임형식으로 진행할 수도 있습니다.

선대칭인 도형은 그 선대칭축을 중심으로 뒤집으면 원래의 모양과 합동이 됩니다. 따라서 뒤집어 버리면 돌려서는 원래의 도형으로 만들 수 없는 조각들은 선대칭도형이 아닌 사다리꼴과 직각삼각형의 두 종류 세 조각뿐입니다.

이 조각들이 뒤집어졌는지 아닌지를 판단하는 것과 조각을 일일이 만들어 붙이지 않고도 해법을 찾을 수 있느냐에 따라 게임의 난이도는 많이 달라질 것입니다.

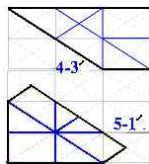
먼저 스팅크스퍼즐의 해법을 그리는데 사용한 선분의 개수를 A, 기본형인 그림 4-1을 기준으로 뒤집은 조각의 개수를 B라 하고 **A(B)**로 표시하기로 합니다. 이때 A+B를 스팅크스퍼즐 해법의 라고 정의(약속)합니다.

이때 뒤집은 조각의 개수를 우드 또는 아이언 샷의 수, 뒤집은 조각의 개수를 퍼팅의 수처럼 생각하면 깔끔지수가 7인 것을 기준으로 이런 게임은 탱그램에도 그대로 적용할 수 있습니다. 특히 교사는 “스�팅크스퍼즐 조각을 직접 만지지 않고 각 조각의 특징(각도, 변의 길이, 넓이 등)을 이용하여 활동판 위에 직접 그릴 수는 없을까요?”, “7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 블록 다각형은 모두 몇 가지나 될까요? 그리고 그것을 어떻게 알 수 있죠?”라는 질문을 던짐으로써 모든 도형을 일일이 만들어 보지 않고도 수학적인 원리를 통해 해법을 찾을 수도 있고 자신의 해법에 대해서도 수학적으로 사고하며 반성해 볼 수 있도록 안내해야 합니다. 이를 통해 학생들은 보다 깔끔하고 경제적인 해법을 찾으려는 노력이 포함된 수학적인 태도가 형성되며 모둠원들의 역할 분담과 문제해결을 위한 협력이 중요함을 느끼게 됩니다.

해설

Activity

▶ 스팅크스퍼즐의 해법을 보다 간단하게 그리기



예) 그림 3-1은 5(1)이며 그림 4-1, 4-3, 5-1은 각각 5(0)입니다. 그러나 4-3' 과 5-1' 은 각각 선분의 개수를 하나씩 더 줄일 수 있으므로 4(0)으로 나타내고 그들의 깔끔지수는 각각 4입니다.

4-6인이 모듬을 이루어 <별지>의 모듬별 게임을 해 봅시다.

[주의] 개인별 스팅 점수와 모듬별 합계 점수를 별개로 하여 두 가지 게임을 모두 진행할 수 있습니다. 게임 공간 공간에 선생님이 내 푸는 문제도 잘 들으세요. (보너스 있음)

- (1) <별지>에 그린 도형들 중 (7-1)과 (7-2)처럼 뒤집거나 돌려놓으면 서로 합동인 도형을 모두 찾아봅시다. (가장 빨리 찾는 사람에게 건당 2스핑)
- (2) 모듬원 중에서 어느 한 사람이라도 그 도형을 만들면 성공이며, 이미 구한 해법보다 더 좋은 점수의 해법을 구하면 그것으로 기존의 해법을 대체할 수 있습니다.
- (3) 각 도형별로 해답을 적은 사람은 개당 1스핑을 얻고 '이글', '알바트로스'의 점수에 따라 각각 2스핑, 3스핑의 개별 보너스를 추가로 얻을 수 있습니다.
- (4) 모듬별 <점수기록표>에 적은 총점과 200점의 차이만큼을 모듬별 승리 상금으로 가져가서 등분(또는 각 모듬에서 정한 원칙에 따라 분배)하여 개인별 점수로 추가할 수 있습니다.

이번 게임에서 내가 얻은 스팅: _____, 현재 나의 점수: (_____)스핑

Think⁺

일정할 때 둘레의 길이가 가장 짧은 도형과 둘레가 일정할 때 넓이가 가장 큰 도형은 각각 어떤 모양인가?

<별지>

(모듬별 게임)

스핑크스퍼즐 골프 게임

1. 정해진 인원수(4-6명을 기준)로 이루어진 모듬을 정한다.
2. 기본 직사각형(도형 4-1)으로 만든 ‘스핑크스퍼즐’ 7조각을 모두 사용한다.
3. 정해진 시간 안에 아래의 <점수 계산법>에 따라 여러 가지 도형을 만들고 그 해법을 그려 넣어 얻은 점수가 적은 모듬이 이긴다.(직접 만들지 않고 해답만 그려도 된다.)

<점수 계산 법>

- (1) 기본 직사각형(도형 4-1)을 기준으로 각 도형의 내부에 그려 넣은 해법에 따라 각 도형별로 ‘선분의 수(뒤집은 조각의 수)’의 방식으로 기록하고 도형 3-1과 같이 뒤집은 조각에는 빗금 표시를 한다.
(예, 도형 3-1) 5개의 선분으로 그렸고 한 조각(사다리꼴)은 뒤집었다. 즉, 5(1)
 - (2) 골프의 경우처럼, 각 도형에 대해 6(1)을 기준(PAR, 파 7)으로 하며 선분의 수나 뒤집은 조각의 수를 줄일수록 유리하다. 6(0)이나 5(1)처럼 1점을 줄이면 버디, 5(0)또는 4(0)처럼 2점 또는 3점을 줄이면 각각 이글, 알바트로스라 하며, 7(1)과 같이 1점을 늘리면 보기라 한다.
(예) 도형 3-1과 4-1은 각각 5(1)과 5(0)이므로 각각 버디와 이글이다.
 - (3) 이미 완성한 도형이라도 점수를 더 줄일 수 있으면 새로운 것으로 대체할 수 있다.
 - (4) 옮기기, 돌리기, 뒤집기를 하여 (도형 7-1과 도형 7-2처럼) 합동인 모양이 있으면 둘 중 유리한 점수 하나만 기록해도 된다. (주의) 둘 다 기록하면 손해!
 - (5) 이미 예시한 도형(3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4, 7-2)의 점수는 총점에 합산하지 않는다. (주의) 예시한 점수까지 합산하면 손해!
 - (6) 새로운 도형을 만들면 특별보너스로 -10점, 정해진 시간 안에 만들지 못한 도형은 별점으로 개당 +10점으로 처리한다. ‘이글’이나 ‘알바트로스’를 만들면 개별보너스
 - (7) 수업 시간의 단축을 위해 정해진 시간이 되기 전이라도 총점 A(B)를 빨리 제출하는 모듬 순으로 -10점씩의 시간 보너스를 얻고 정해진 시간이 지나면 +10점씩의 시간 감점이 있다. (주의) 도형을 하나 만들어도 파(PAR)면 7점으로 3점만 줄이므로 도형을 하나 더 만들지 못해도 빨리 제출할수록 유리함.
 - (8) 모듬별 인원이 다른 경우는 인원이 가장 많은 모듬을 기준으로 1인당 -10점의 인원 보너스를 줄 수 있다.
 - (9) 기록한 활동지를 다른 모듬과 서로 바꾸어 검토한다. 이 때 잘못된 곳이 발견되면 다른 모듬의 점수를 바르게 고쳐주고 별점과 보너스로 건당 +1점과 -1점을 각 모듬의 총점에 더한다.
 - (10) 각 도형의 점수A(B)와 별점(C, E), 보너스점수(D, F)를 기준으로 총점이 낮은 모듬 순으로 승리!
- ※ 모듬별 <점수기록표>에 적은 총점과 200점의 차이만큼을 모듬별 승리 상금으로 등분(또는 각 모듬에서 정한 원칙에 따라 분배)하여 개인별 점수로 추가할 수 있음



스팡크스 퍼즐 골프 게임 <모듬 활동지>

Mission1. 각 도형마다 A(B)를 기록하고 팔꿈치수(A+B)를 낮추어 전체 합계를 낮추라.

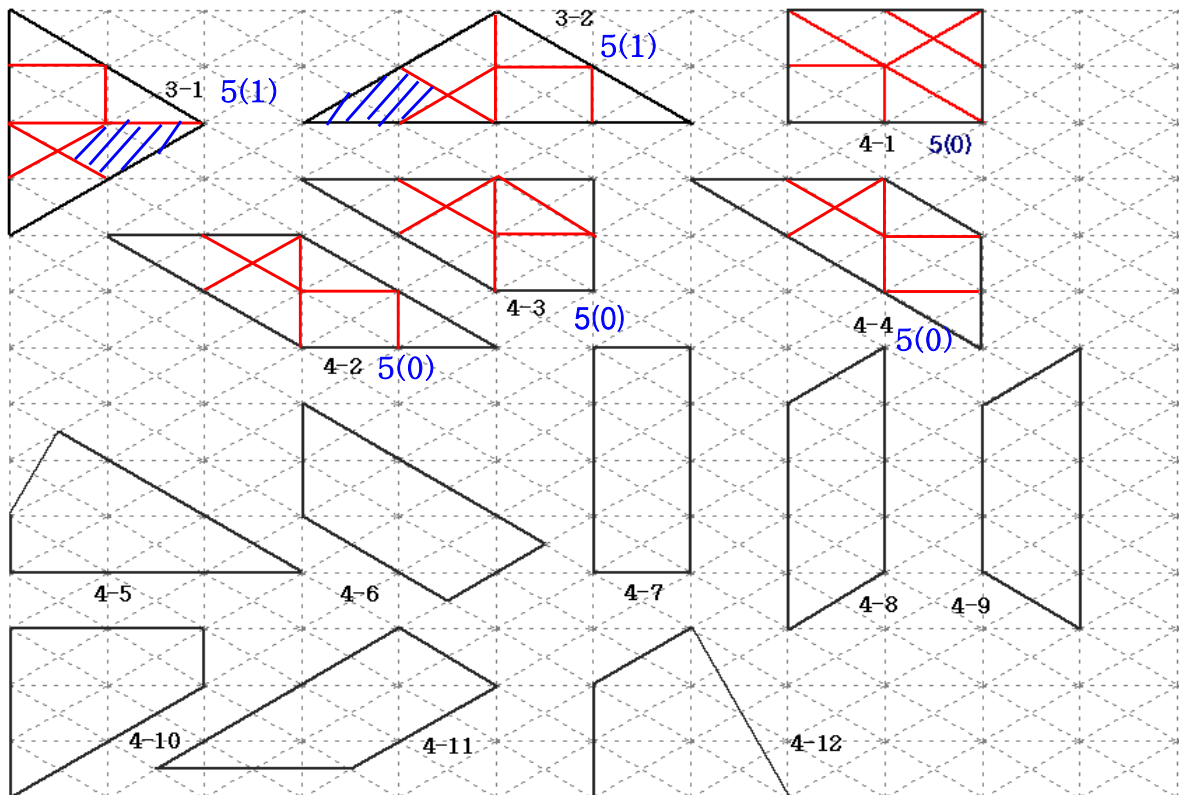
Mission2. 합동인 도형은 하나를 제거하라. 둘 다 찾으면 손해! 대신 감추인 도형을 찾아라.

Mission3. 이미 찾은 해법의 A+B의 값의 검토하고 그 점수를 더 낮추어라.

Mission4. 비대칭인 조각의 뒷면을 구분하는 방법을 고안하라.(표시 불가)

Mission5. 역할 분담을 잘 하고 협력하면서 시간 내에 제출하여 시간 보너스를 얻으라.

Mission6. 상대 모듬의 실수를 찾아 우리 모듬의 보너스 점수로 바꾸라.



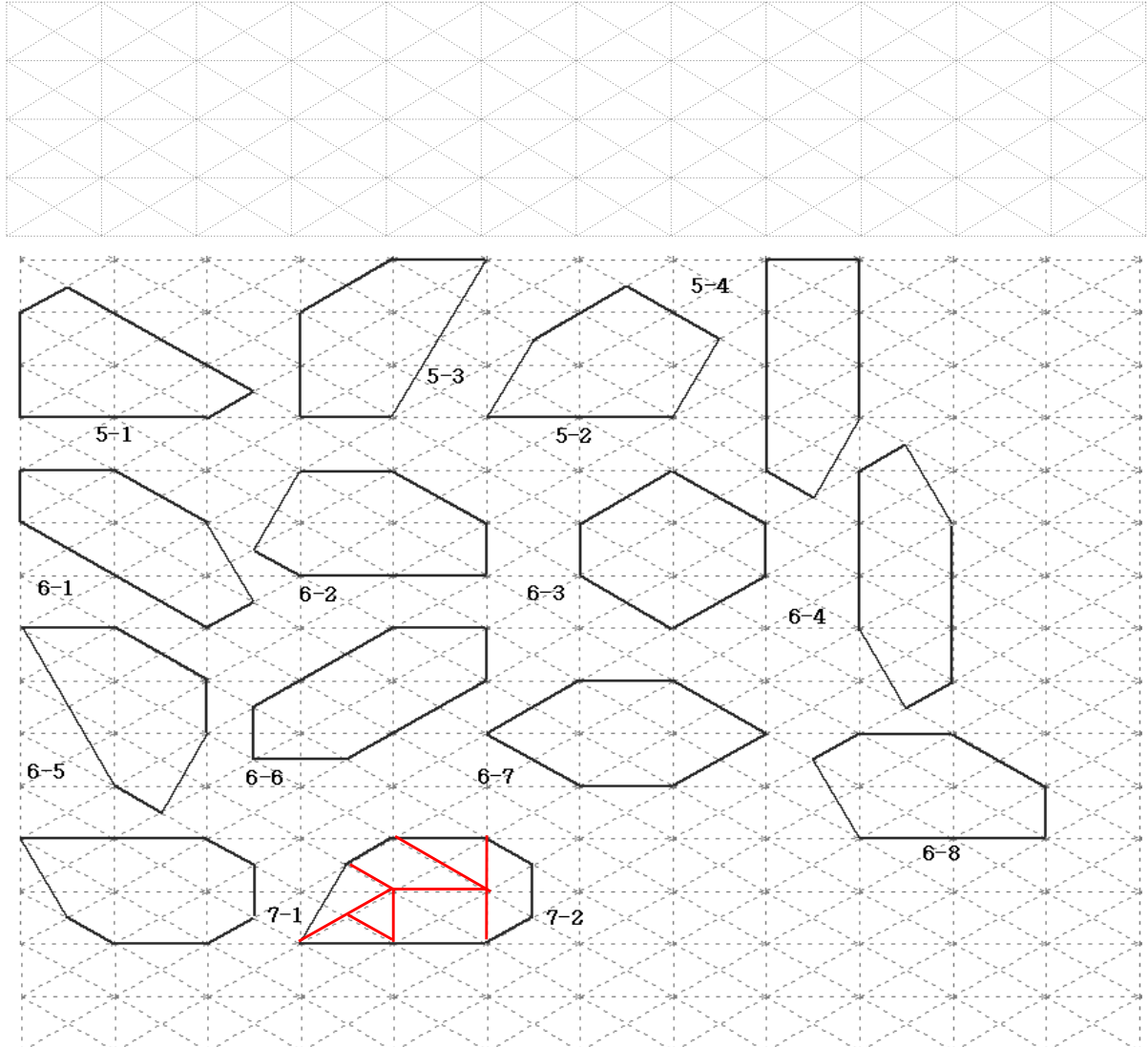
<모듬 점수 기록표>

도형의 번호	4-5	4-6	4-7	4-8	4-9	4-10	4-11	4-12	5-1	5-2	5-3	5-4	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6	6-7	6-8	7-1	7-2	합계
언부의 개수(A)																						10	자동
뒤집은 조각수(B)																							계산

최종수정자:

※ 만들지 못한 각 도형은 벌점으로 +10점입니다. 7-2처럼 빗금을 긋고 10이라 쓰세요.

* 새로운 도형을 찾았으면 그 도형의 모양과 해법[선분의 수(뒤집은 조각의 수)]도 적어주세요.



※ 참고: 모든 도형의 기준 점수는 6(1), 즉 7점이며 예시한 도형과 중복된 도형들은 낮은 점수만으로 총점을 A(B) 형식으로 기록한다. 사용한 선분의 수(뒤집은 도형의 수)를 줄이거나 새로운 도형을 만든 모듬은 많은 점수를 줄일 수 있다. 특히, 정해진 시간 내에 빨리 제출한 순서에 따라 시간 보너스 점수를 얻을 수 있으므로 다 만들지 못한 것은 포기하고 지혜롭게 역할분담을 할 필요도 있다.

※ 다른 모듬이 그린 도형에서 잘못된 부분을 찾아내면 검토 보너스!

Think+

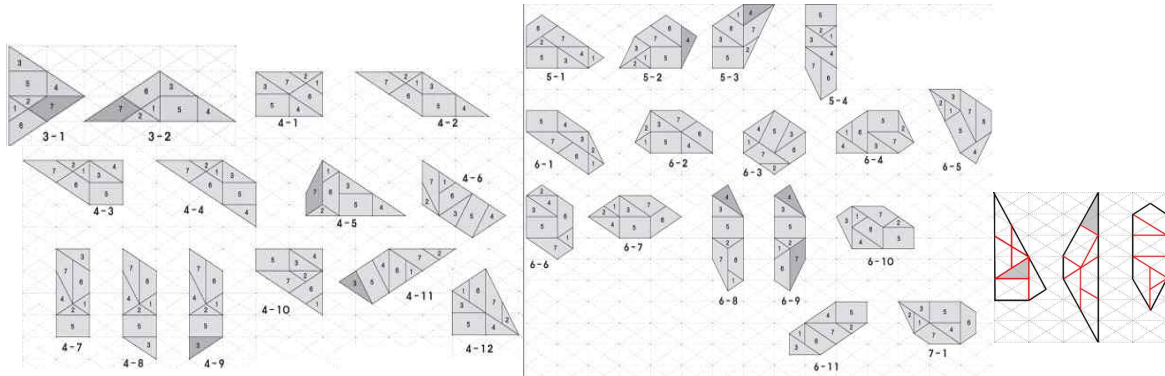
1. 칠각형에서처럼 사각형, 오각형, 육각형에서 각각 합동인 도형들의 짝도 찾아보자.
2. 비대칭인 조각의 뒷면을 어떻게 구분할까?
3. 뒤집은(빚금 칠한) 조각이 2개 이상인 경우 전체 또는 부분을 뒤집어 보면 어떨까?(선 대칭)
4. 퍼즐조각을 직접 사용하지 않고 머리로만 생각하여 그 도형을 직접 그려보자. 이때 어떤 조각부터 사용할까?(큰 조각, 비대칭인 조각)
5. 점수를 낮출 수 있는 우리 모듬만의 또 다른 특별한 비법은?



해설

Information

스핑크스퍼즐로 만들 수 있는 다양한 다각형들과 그 해법은 다음과 같습니다. 하지만 사용한 선분의 개수를 줄이거나 뒤집은 조각의 수를 줄여서 만들 수 있는 더 간단한 해법은 많이 있습니다.



Think⁺

활동지에 제시되지 않은 새로운 도형들을 더 찾아보자.

학습 정리

1. 스팅크스퍼즐은 탱그램을 학습한 이후에 ‘what if ~(not)?’기법을 활용하여 변형시킨 유사탱그램을 탐구하는 기초로 활용될 수 있으며 탱그램과 유사한 방법으로 학습하면서 수학적인 생각을 유발하고 왜 그런지 이유를 따져 물어 보려는 태도를 형성하기에도 유용하다.
2. (1) 스팅크스퍼즐 조각과 친해지기를 통해 학생들에게 주어진 큰 직사각형과 정삼각형을 직접 만들어 보면서 스팅크스퍼즐 조각들의 특징(각 조각들의 꼭지각과 변의 길이, 넓이, 평행인 변의 쌍의 개수, 대칭축의 개수 등)을 충분히 이해해야 도형을 보다 의미있게 탐구할 수 있다.
(2) 직사각형(기본형)을 그리는 동안 해법의 내부에 그린 선분의 개수를 세어보고 정삼각형(또는 이등변삼각형)을 그릴 때는 뒤집은 조각의 개수도 세어보도록 한다.
(3) ‘깔끔지수’를 도입하고 모든 해법에는 더 깔끔한 해법을 찾아보도록 하면서 골프게임처럼 깔끔지수를 낮추는 사람이 이기는 게임으로 진행할 수 있다.
(4) 스팅크스퍼즐의 천재지수인 ‘스핑’을 도입하여 각 활동마다 스핑을 정해 그것을 바둑돌로 대신 모아 최종적으로 가장 많은 스핑을 모은 사람이 이기는 게임형식으로 응용할 수도 있다.
(5) 개별 활동, 짝 활동, 모둠 활동 등 다양한 형태로 변형이 가능하다.
3. 본 활동에서 살펴본 학습 활동들은 앞 차시의 탱그램이나 다음 차시의 유사탱그램에되 쉽게 적용할 수 있다.
4. 참고문헌 및 웹사이트

송상현(2008). 수학과 교육과정에 비추어 본 탱그램과 유사탱그램의 재조명.
18(3), 391-405.

<수학교육연구>,

특허청(2009). 발명으로의 물입 2.0.(중급) 교사용.

<http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap01c.htm> 존 라우쉬의 퍼즐의 세계(스�팅크스퍼즐은 그림 15의 #7)



학습 평가

학생들에게는 학습한 핵심내용이나 느낀점을 3가지 정도 적도록 하고 학습목표의 달성여부를 스스로 확인하는 자기평가표에 체크하고 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 보도록 하고자 합니다. 그러기 위해 자신이 먼저 직접 자신을 평가해봅시다.

1 이번 주제에서 배운 핵심 내용이나 느낀 점을 3가지만 적어 봅시다.

□)

(2)

(3)

2 다음은 ‘스텝스퍼즐’에 대한 학습목표 달성 여부를 확인하기 위한 자기평가표입니다. 각 평가 요소에 대한 자신의 성취도를 그 달성 정도에 따라 ‘상’, ‘중’, ‘하’의 적당한 칸에 ‘✓’ 표시를 하시오. 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 봅시다.

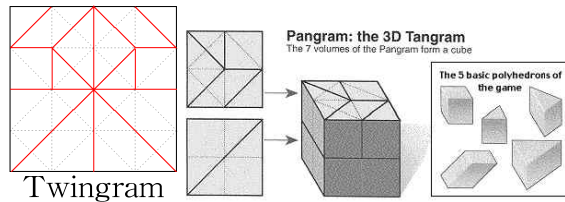
평가요소	자기평가		
	상	중	하
(1) 스텝스퍼즐을 잘라 만드는 방법을 바르게 이해하면서 그 속에도 ‘삼각형의 중점연결정리’가 적용된다는 것을 알았다.			
(2) 스텝스퍼즐 각 조각들의 특징을 이해하고 작은 단위 조각으로 다른 조각들을 만들 수 있다.			
(3) 여러 가지 볼록다각형들을 만들 때 조각을 직접 사용하지 않고도 해법을 그릴 수 있었다.(2개 이하:하, 5개 이상:상)			
(4) 스텝스퍼즐을 다루면서 단순한 놀이나 무늬 꾸미기가 아닌 수학적 사실이나 성질을 스스로 찾아보려는 의지가 생겼다.			
(5) 스텝스퍼즐을 이용한 문제를 만들거나 유사탱그램을 만들어 보려는 마음가짐과 자신감, 욕구가 생겼다.			
(6) 스텝스퍼즐의 활용과 지도의 방법을 알고 지도에 대한 두려움이 없어졌다.			
원인분석			

16차시: 유사 탱그램



전통적인 칠교판으로부터 얻은 팔교판

14교판

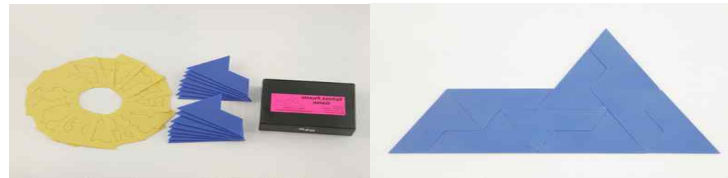


Twingram

Pangram: the 3D Tangram

The 7 volumes of the Pangram form a cube

The 5 basic polyhedrons of the game



지오스핑크스

전통적인 탱그램은 정사각형을 7조각으로 자른 것입니다. 여기에 ‘what if ~(not)?’이라는 기법을 적용하여 정사각형이 아니라 직사각형 또는 정삼각형을 7조각으로 자른다면?이라는 질문에 대한 답으로 7조각 모자이크 퍼즐, 즉 스텝크스퍼즐을 만들어 냈습니다. 그렇다면 ‘왜 하필 7조각인가?’라는 질문으로 육교판이나 팔교판을 만들 수도 있습니다.

이처럼 본 차시는 전통적인 탱그램에다 ‘what if ~(not)?’이라는 기법을 적용하여 다양한 유사 탱그램을 만들어 보겠습니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

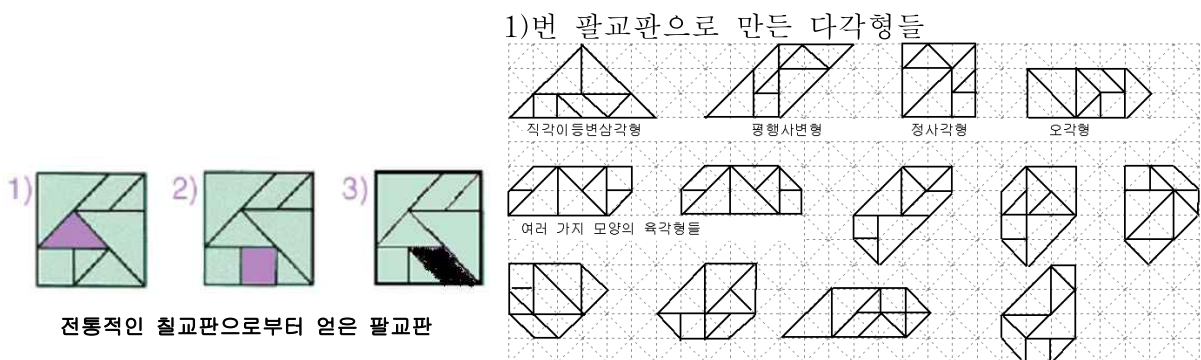
1. **(지식과 이해)** 다양한 유사 탱그램 퍼즐의 구성 원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. **(기능과 조작)** “What if ~?”(~라면 어떨까?), “What if ~not?”(~가 아니라면 어떨까?)라는 질문을 바탕으로 유사 탱그램을 만들 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 자신이 생각한 것에 대해 “왜 그렇게 하면 되는가?”라는 연역적인 생각과 확장 및 통합적인 생각을 기르게 됩니다.
4. **(태도와 의지)** 또 다른 유사 탱그램을 만들어보려는 의지와 도전감이 생깁니다.



학습 내용

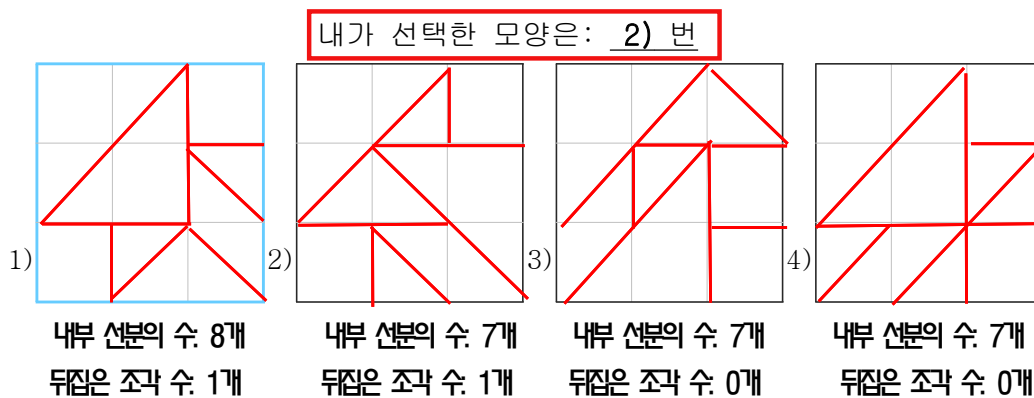
1. 팔교판으로 다각형 만들기

넓이가 8인 칠교판 7조각에다 넓이가 1인 도형(중간크기의 직각이등변삼각형, 정사각형, 평행사변형)을 하나 추가하면 8조각으로 이루어진 넓이가 9인 정사각형을 3가지 만들 수 있습니다. 이는 8조각이므로 팔교판이라고 부를 수 있으며 유사탱그램의 한 종류가 됩니다. 이 중 한 가지를 택하여 8조각을 모두 사용한 블록다각형을 만들어 봅시다. 이때 앞 차시에서의 스프링스퍼즐을 이용한 골프게임에서와 같이 도형의 내부 선분의 수와 뒤집은 조각의 수는 적을수록 보다 깔끔한 해법임을 상기하면서 골프식 게임으로 진행할 수도 있습니다. 뒤집었을 때 모양이 달라지는 것은 선대칭도형이 아닌 평행사변형 뿐이겠죠?



1) 깔끔한 도형 만들기

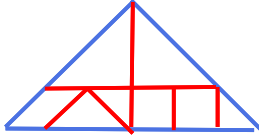
넓이가 8인 칠교판에서 넓이가 1인 도형을 하나씩 추가하면 넓이가 9인 유사 탱그램을 간단히 만들 수 있습니다. 어떤 모양이 가능한지 적어도 하나씩 만든 다음 아래에 그려봅시다. (단, 회전이나 대칭으로 합동이 되는 것은 한 가지만 인정하며 내부에 그린 선분의 수와 뒤집은 조각의 수가 적을수록 더 깔끔한 해법입니다.)



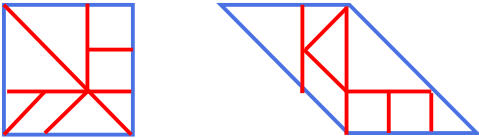
2) 다각형 많이 만들기

2)번 모양을 모두 사용하여 만들 수 있는 모든 다각형

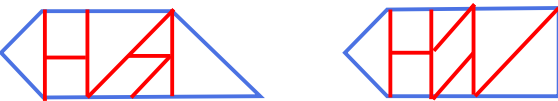
삼각형
1개



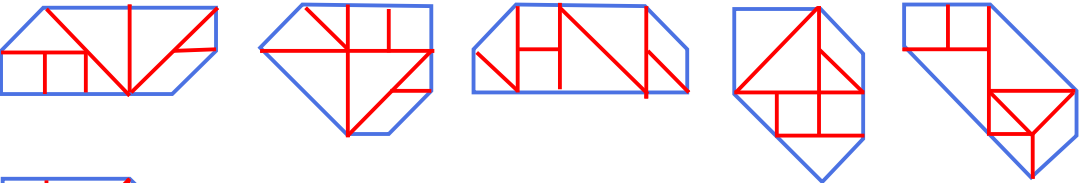
사각형



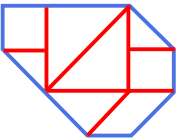
오각형
2개



육각형
5개



칠각형
1개



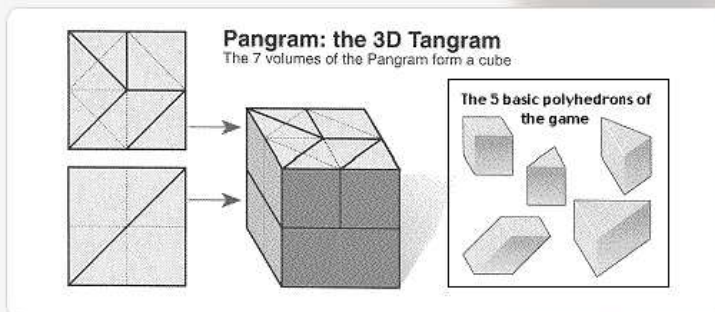
2. 유사탕그램 만들기

학습내용

일곱조각이 아니라면 정사각형이 아니라면 직선이 아니라면 평면이 아니라면 탱그램 웹사이트

평면이 아니라면?

- 탱그램은 원래 평면(정사각형)을 7조각으로 나눈 것이었습니다.
그러나 입체(정육면체)를 아래 그림과 같이 분할하면 5종의 입체도형 7조각을 만들 수도 있습니다.



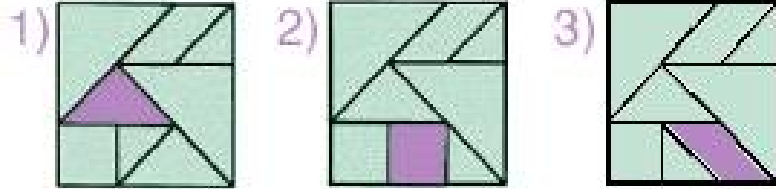
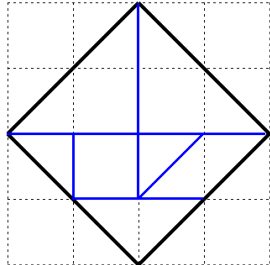
출처 <http://archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang4.html>

- 이들 각 조각들의 모서리의 길이는 정사각형 탱그램의 경우와 같습니다.
따라서 높이가 1인 입체도형이라 생각할 때 넓이의 값 대신 부피의 값을 그대로 사용할 수도 있습니다.



3. 칠교판을 이용한 팔교판 만들기

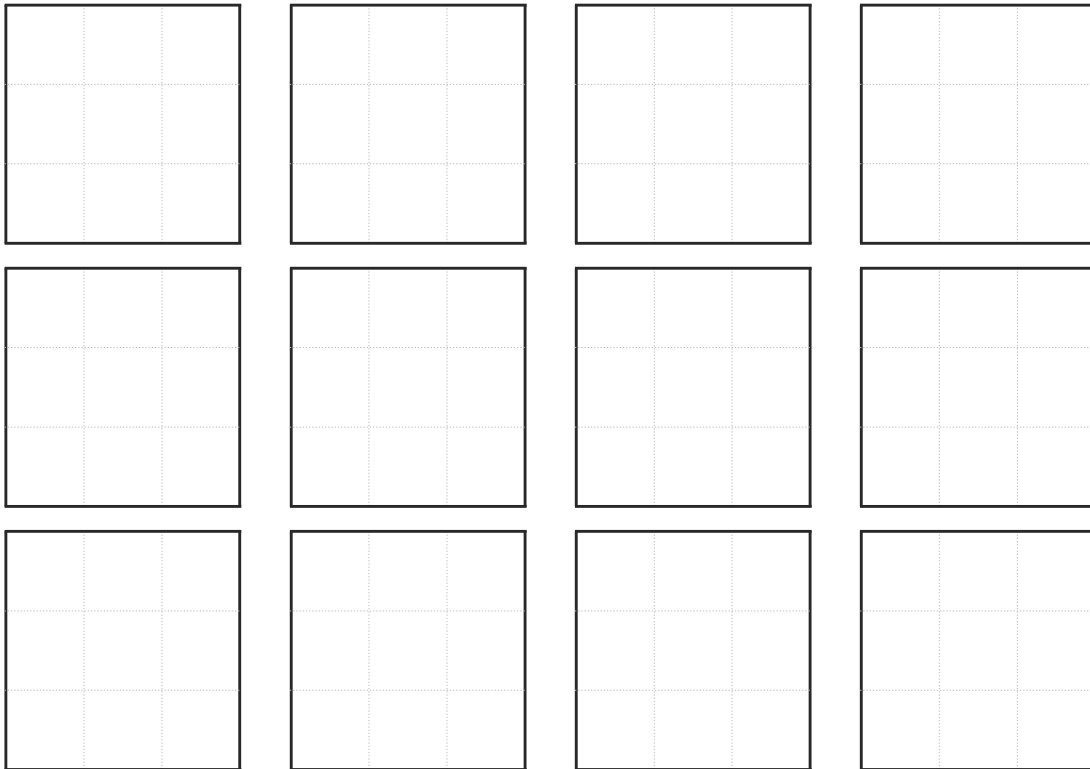
넓이가 8인 칠교판 7조각에다 넓이가 1인 도형(중간크기의 직각이등변삼각형, 정사각형, 평행사변형)을 하나 추가하면 8조각으로 이루어진 넓이가 9인 정사각형을 만들 수 있습니다. 이는 팔교판 또는 유사탱그램이라고 합니다.



전통적인 칠교판으로부터 얻은 팔교판

<http://archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang1.html>

1. 위의 셋 중 하나를 선택하여 봅시다. 우리 모듬이 선택한 번호는 _____ 번
2. 위에 주어진 모양과 조각의 위치나 배열을 달리하면서 얼마나 다양한 배열이 가능한지 아래에 그려봅시다.(단, 회전이나 대칭으로 똑같아 지는 것은 한 가지로 봄)

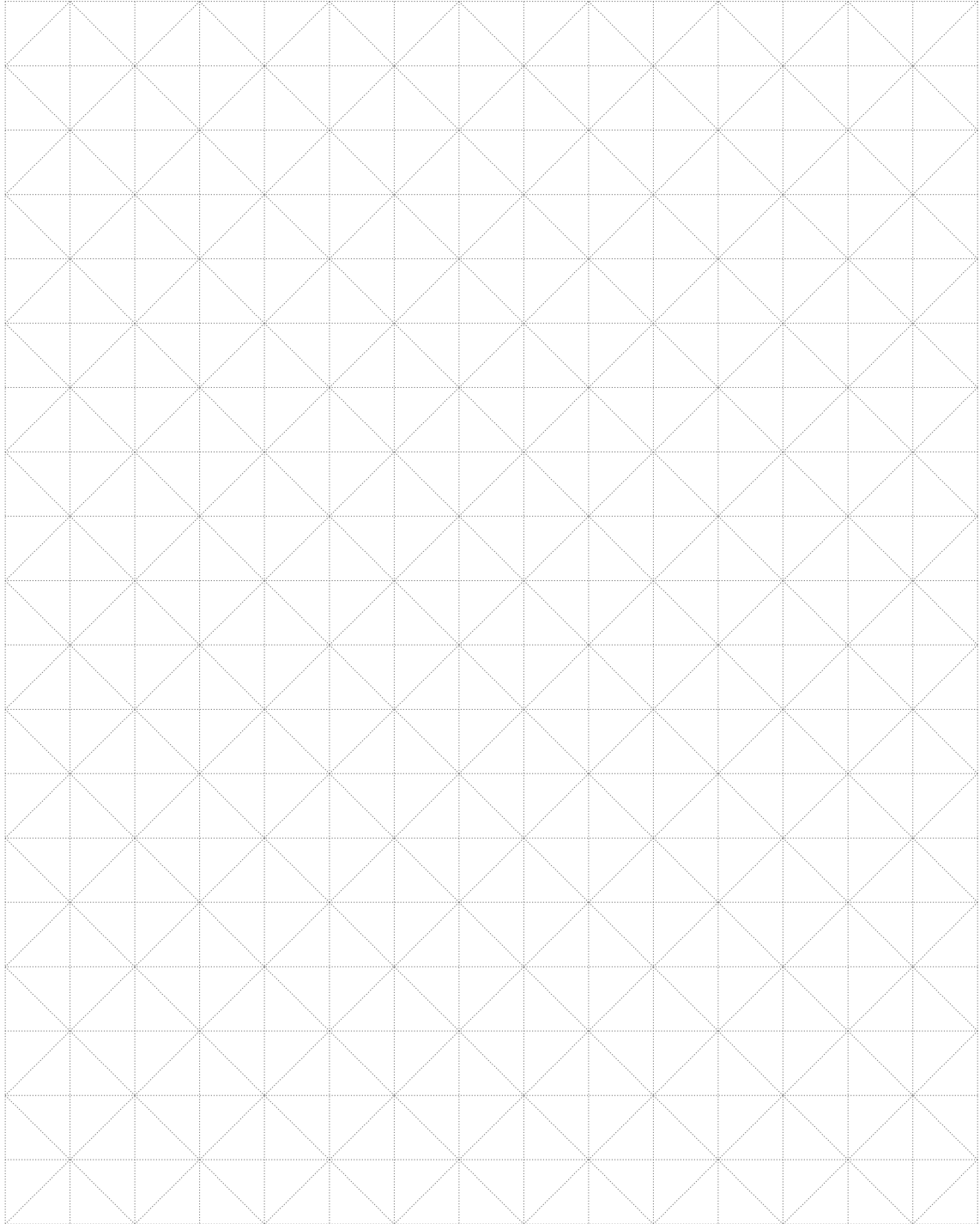


우리가 찾은 서로 다른 해법은 몇 가지인가요?

4. 팔교판으로 만들 수 있는 블록 다각형 찾기

앞의 3가지 종류의 팔교판 8조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 블록다각형들은 각각 몇 가지나 가능할지 구하시오.

우리가 선택한 팔교판 유형은 _____ 번

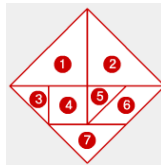




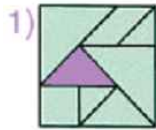
학습 정리

1. 전통적인 탱그램은 정사각형을 7조각으로 자른 것이다. 여기에 'what if ~(not)?'이라는 기법을 적용하여 '정사각형이 아니라 직사각형 또는 정삼각형을 7조각으로 자른다면?'이라는 질문에 대한 답으로 7조각 모자이크 퍼즐, 즉 스팅크스퍼즐을 만들어 냈다. 그렇다면 '왜 하필 7조각인가?'라는 질문으로 육교판이나 팔교판을 만들 수도 있다.
2. 넓이가 8인 칠교판 7조각에다 넓이가 1인 도형(중간크기의 직각이등변삼각형, 정사각형, 평행사변형)을 하나 추가하면 8조각으로 이루어진 넓이가 9인 정사각형을 3가지 만들 수 있다. 이는 8조각이므로 팔교판이라고 부를 수 있으며 유사탱그램의 한 종류이다.
3. 8조각을 모두 사용한 볼록다각형을 만들면서 앞 차시에서의 스팅크스퍼즐을 이용한 골프게임에서와 같이 도형의 '내부 선분의 수'와 '뒤집은 조각의 수'는 적을수록 보다 깔끔한 해법임을 상기하면서 골프식 게임으로 진행할 수도 있다. 뒤집었을 때 모양이 달라지는 것은 선대칭도형이 아닌 평행사변형 뿐이다.

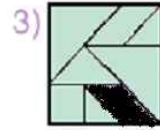
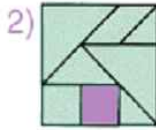
학습 평가



전통적인 칠교판



전통적인 칠교판으로부터 얻은 여러 가지 팔교판



1. 위의 전통 탱그램 조각들 중 한 번 뒤집었을 때 돌리기만으로 원래의 도형과 합동이 되지 않는 조각의 번호는?

① 2번 ② 3번 ③ 5번 ④ 6번 ⑤ 7번

2. 다음 중 유사탱그램에 관한 설명 중 잘못 된 것은?

- ① 전통적인 칠교판의 넓이를 8이라고 할 때, 이 모양들만 사용하여 만들 수 있는 넓이 9의 팔교판은 위의 3가지 외에도 더 찾을 수 있다.
- ② 전통적인 탱그램은 배열을 아무리 달리하더라도 결국은 한 가지 해법만 존재한다.
- ③ 1)번 팔교판 8조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 볼록 다각형은 13가지이상이다.
- ④ 2)번 팔교판 8조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 볼록 다각형은 13가지이상이다.
- ⑤ 3)번 팔교판 조각에는 합동인 도형이 3쌍이 있다.

3. 다음은 탱순이의 주장이다. 이 주장이 참인지, 거짓인지를 선택하라.

탱순: 전통적인 칠교판으로부터 만든 3)번 팔교판 8조각을 모두 사용하여 만든 볼록 다각형의 해법들 중 '내부 선분의 개수'와 '뒤집은 조각의 개수'의 합의 최소값은 7이다.

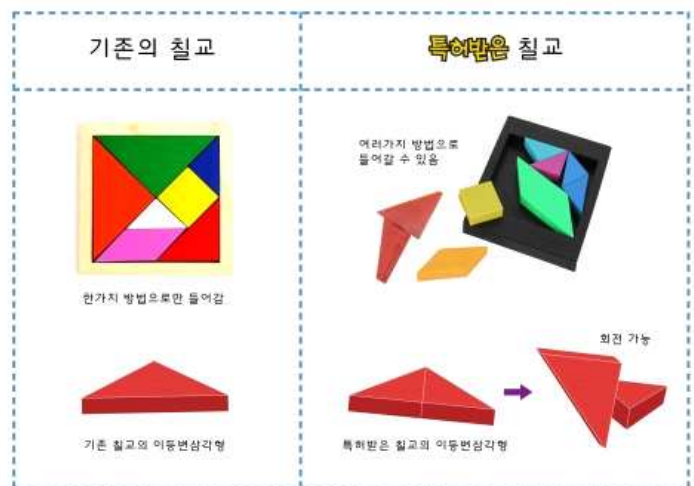
- ① 참 ② 거짓 ③ 참과 거짓을 판단할 수 없다.

특허받은 칠교놀이



*** 주의해주세요!** 회전이 되지 않는 칠교로는 사용할 수 없습니다.

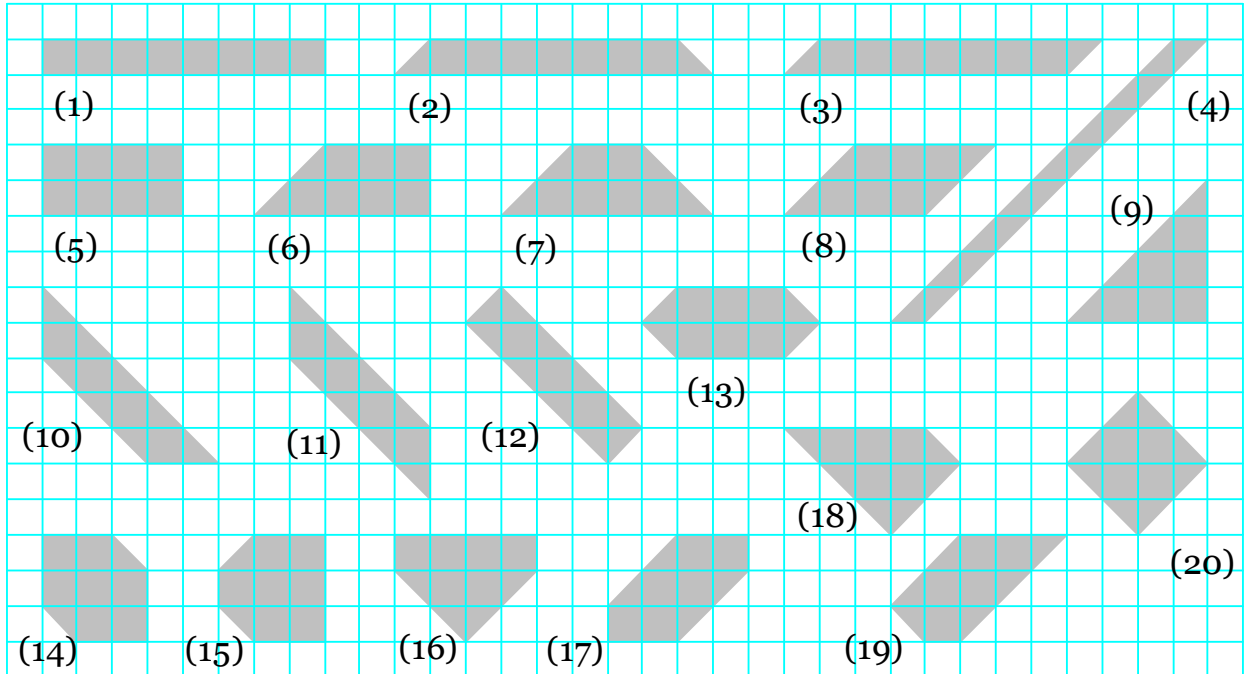
특허받은 칠교(고급형)는 기존 칠교의 7개 조각(직각삼각형 5개, 정사각형 1개, 평행사변형 1개) 중에서 직각 이동변 삼각형 3개를 분할하고, 분할된 삼각형을 회전하여 평행사변형으로 구현할 수 있게 만들었습니다. 기존 칠교놀이보다 확장 된 영역에서 활용할 수 있게 개발된 **새로운 개념의 칠교**입니다.



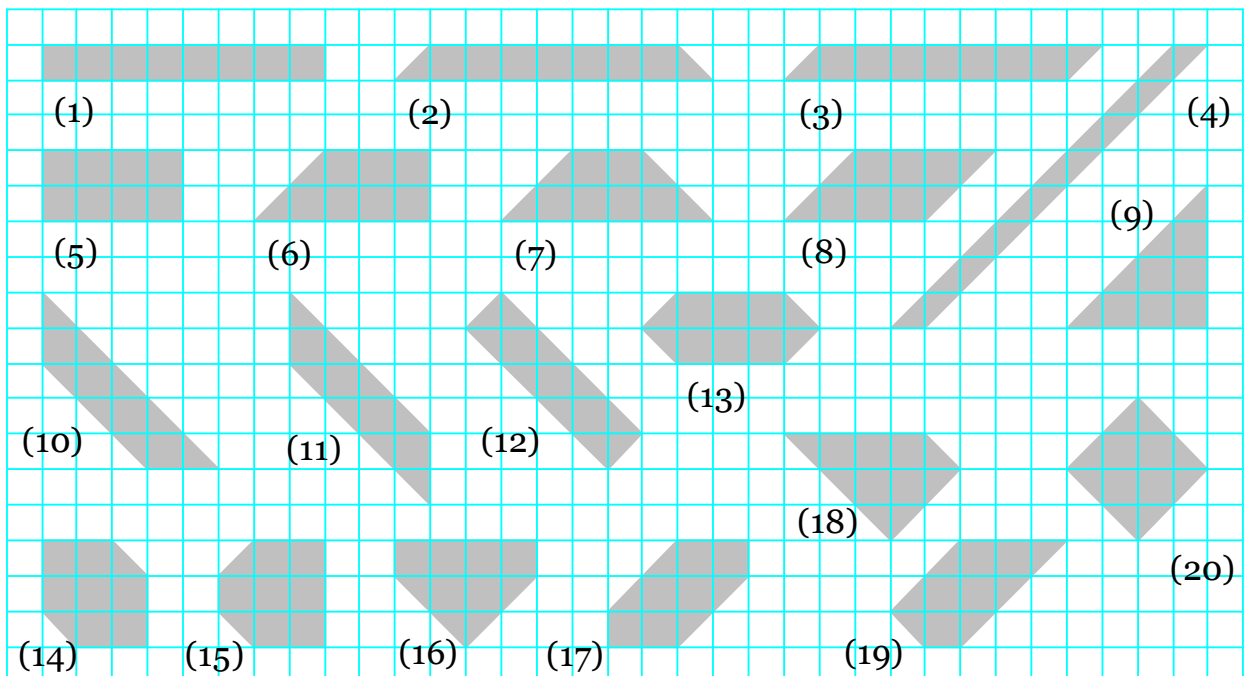


8인 격자 사각형(20개) 중 만들 수 있는 도형 찾기

교구: _____, 불가능한 도형의 번호: _____

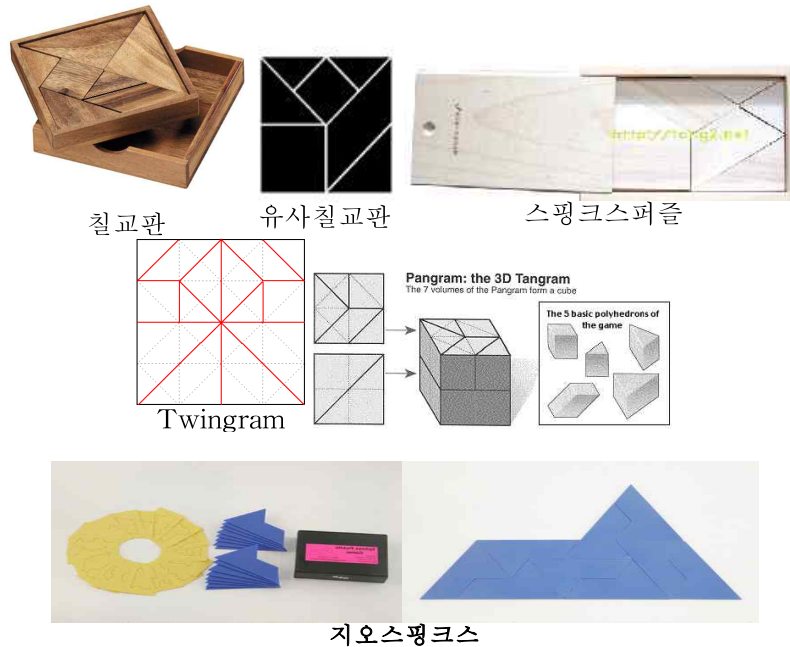


사용한 교구: _____, 불가능한 도형의 번호: _____



17차시: 유사탕그램을 통한 확장적 사고 지도

학습 안내



몇 차시동안 우리는 7조각의 전통적인 탕그램을 출발점으로 하여 ‘what if ~(not)?’이라는 기법을 적용하면서 ‘정사각형이 아니라 직사각형 또는 정삼각형을 7조각으로 자른다면?’이라는 질문에 대한 답으로 7조각 모자이크 퍼즐, 즉 스핑크스퍼즐을 만들어 냈고 ‘왜 하필 7조각인가?’라는 질문으로부터 전통적인 칠교판에다 한 조각을 더 넣은 팔교판을 만들 수 있음을 보았습니다.

이처럼 ‘의문을 가져보려는 태도’의 한 가지 유형으로 ‘what if ~(not)?’이라는 기법은 창의적인 유사탕그램을 만들 수 있도록 할 뿐만 아니라 확장적 사고를 유발하는 좋은 발문 기법이 될 수 있습니다. 이러한 태도와 기법을 활용하여 몇 가지의 유사탕그램을 더 살펴보면서 확장적 사고의 지도방안에 대해서도 생각해 봅시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) 유사탕그램 퍼즐(팔교판)의 구성 원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. (기능과 조작) “What if ~?”(~라면 어떨까?), “What if ~not?”(~가 아니라면 어떨까?)라는 질문을 바탕으로 유사탕그램을 만들 수 있습니다.
3. (수학적 사고) “What if(not)~?”이라는 기법을 통해 확장적 사고를 기르게 됩니다.
4. (태도와 의지) 의문을 가져보려는 태도와 의지로 새로운 퍼즐을 만들어 보려는 도전감이 생깁니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들이 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.

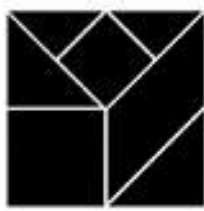


학습 내용

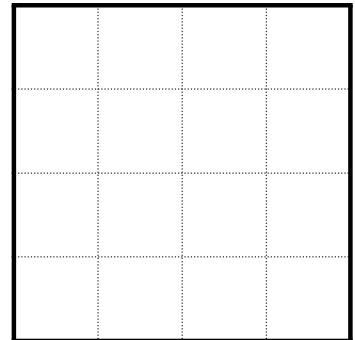
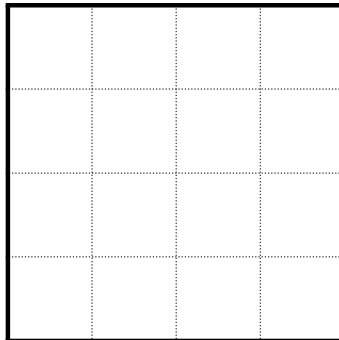
1. 조건을 변경하면서 여러 가지 유사 탕그램 만들기

아래와 같이 조건의 일부를 변경하면 새로운 유사탕그램을 만들 수 있습니다. 왼쪽의 그림을 참고하여 오른쪽에다 자신이 생각하는 모양을 설계해 보시오.

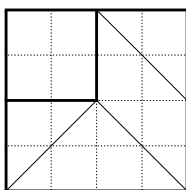
1) 똑같은 정사각형 끝이지만, 자르는 방법을 달리 하여 만들면 어떨까?



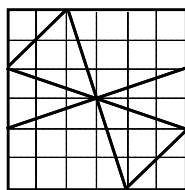
칠교판



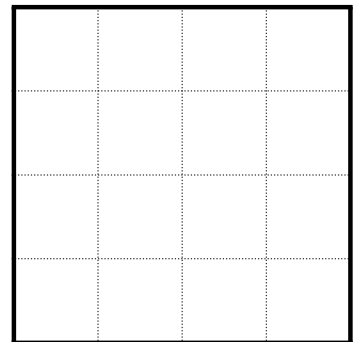
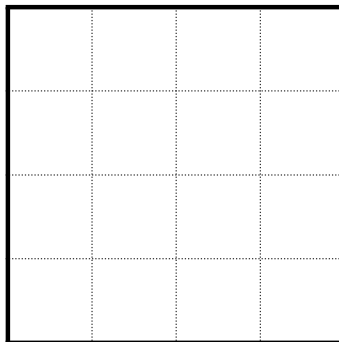
2) 똑같은 정사각형 끝이지만, 조각의 수만 달리하여 자르면 어떨까?



오교판



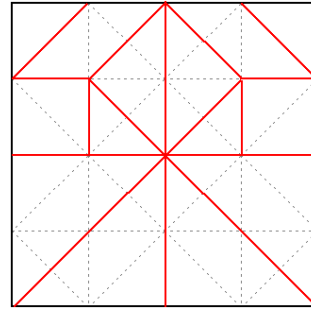
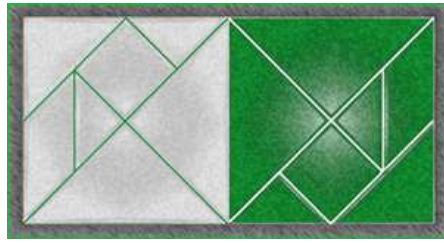
팔교판



출처: 박교식(2002). 교구: 유사 탕그램과 그 수학교육적 시사점. 대한수학교육학회지 <학
교수학> 4(1), 97-109.

아르키메데스 14교판 <http://www.archimedes-lab.org/latin.html#archimede>

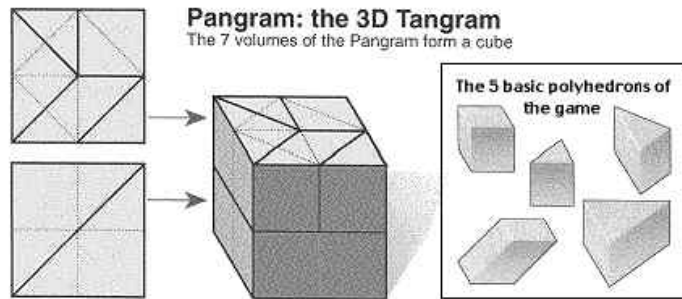
3) 원래의 7조각을 두 세트 사용해도 되나요?



The Twingram™ puzzle

<http://www.archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang2.html>

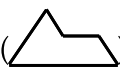
4) 평면이 아니라 입체형의 탱그램을 만들어 보면 어떨까요?

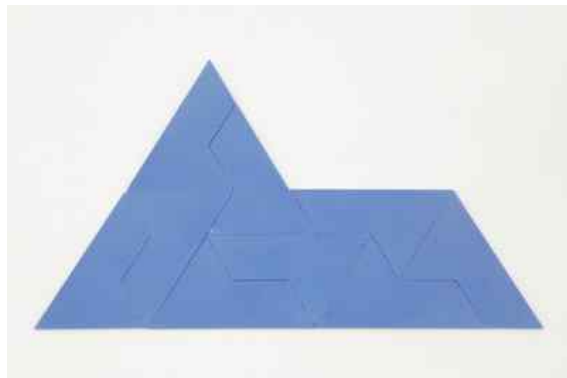
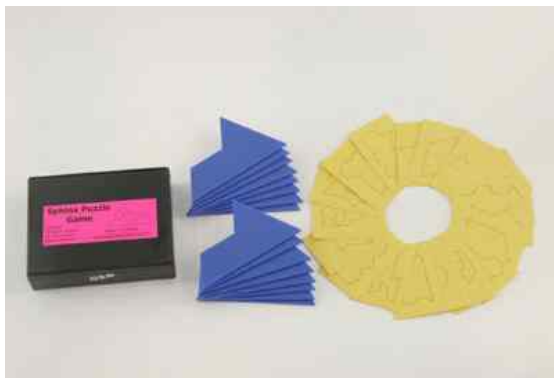


입체탕그램으로 만들 수 있는 모양들(예시) [\[링크\]](#)

<http://www.archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang4.html>

5) 다른 모양이라면?

정삼각형 6개를 변끼리 이어붙이면 이집트 스�핑크스의 모양()을 만들 수 있습니다. 이를 '지오스핑크스'라고 합니다. 지오스핑크스를 여러 개 사용하여 뒀은꼴을 만들어 봅시다.



지오스핑크스 [\[링크\]](#)

<http://www.tong2.net/shop/shopdetail.html?brandcode=095015000047>



2. 우리들만의 유사탱그램 만들기

1) 기존의 탱그램이나 유사탱그램 중 적절하지 못하다거나 더 필요하다고 생각한 규칙, 또는 바꾸어 보면 더 좋겠다고 느낀 점이 있으면 아래에 적고, 친구들과 토론하면서 새로운 유사탱그램을 만들어 봅시다. 특히 그 유사탱그램의 제작 원리, 조각들의 특징(각도, 변의 길이, 넓이)들을 설명하고 이것으로 수행할 수 있는 다양한 수학적 활동(학습문제, 퍼즐, 게임 등)이 포함되면 좋겠습니다.

2) 조각퍼즐을 만들 때는 다음의 조건들을 고려해 보면 도움이 됩니다.

- (1)조각들을 활용하여 다양한 도형들을 만들 수 있는가?
- (2)조각의 수가 너무 적거나 많지 않고 적당한가?
- (3)제작이 간편(자르는 선분의 수가 적음)한가?
- (4)어떤 수학적 성질을 포함하고 있는가?
- (5)각 조각들을 변끼리 이어 붙여서 볼록한 도형이 만들어지는가?
- (6)각 조각들의 꼭지각들을 한 곳에 모았을 때 일직선이 되거나 평면을 빈틈없이 채울 수 있는가?
- (7)동일한 모양이라도 서로 다른 배열의 해법이 가능한가?

3. 산출물 평가하기

☺ 다른 친구들이 만든 유사탱그램을 평가해 봅시다.

[아래의 평가 내용을 수정하거나 추가할 수도 있습니다.]

모둠	평 가 내 용							좋은 점/ 아쉬운 점
	내용을 포함한 아이디어임	아이디어가 새로우며 참신하고 독창적임.	재미가 있음	협동심을 발휘하여 완료 시간을 지킴	이해하기 쉽게 발표함	추가할 평가 항목:	총 점	
	5	5점	5점	5점	5점		30점	

4. 학습정리 및 후속 활동(산출물, 유사탱그램 만들기) 안내

- 1) 탱그램처럼 유사탱그램을 활용한 패러독스나 불록다각형 만들기, 게임지도 등의 학습을 위해서는 학생들이 조각들의 기본 생성 원리(각도, 길이, 넓이 등)를 정확히 알 수 있도록 해야 한다.
- 2) 탱그램과 유사탱그램을 활용한 수업은 전체 3~6차시로 구성할 수 있다. 마지막 차시의 산출물(프로젝트)을 위해서는 아래와 같은 내용의 확인이 필요하다.

[산출물(프로젝트) 안내]

여러분은 앞으로 몇 차시 동안 탱그램과 유사탱그램을 탐구한 후 마지막 예는 개별(또는 모둠별)로 자기 주도적으로 만든 산출물을 제출해야 합니다. 산출물의 주제 또는 제목은 「내가 만든 유사탱그램과 그것을 활용한 탐구활동이나 게임, 문제 만들기」입니다.

기존의 탱그램(칠교판)은 정사각형을 7조각으로 자른 모양입니다. 이제 ‘What if-?’ 또는 ‘What if ~not?’이라는 전략을 사용하여 각 조건들을 변경해 보면 어떨까요? 앞으로 확인하게 되겠지만, ‘8조각 또는 6조각으로 자른다면?’에서 팔교판 또는 육교판이 만들어지며, ‘정사각형이 아니라면?’에서 유사탱그램들이 만들어집니다. 또 ‘왜 평면이어야만 하나?’라는 질문에서 입체탱그램을 만들 수도 있습니다. 이처럼 조건이나 규칙, 놀이 방법, 승리 방법 등을 다양하게 변형하면 자신들만의 유사탱그램을 쉽게 만들 수 있습니다. 어떤 것을 만들지 미리미리 생각하면서 기본적인 아이디어와 생성 원리를 기록해 두기 바랍니다.

여러분들이 만든 수학보드게임의 평가기준은 활동 6의 5가지 기준(수학적 내용, 독창성, 흥미, 협동성, 발표력)에 따르면서 추가할 수도 있고 아래 7가지 기준(첫 글자만 모으면 DIGITAL)으로 변경할 수도 있습니다.

- (1) Difference(차별성, 색다름의 정도)
- (2) Interest(재미, 몰입할 수 있는 정도)
- (3) Googlization(참고 자료들의 출처와 근거를 제시)
- (4) Integration(다양한 내용과 요소의 통합)
- (5) Trend(시대적 흐름과 경향을 반영)
- (6) Analysis(철저한 내용 분석, 수학적 원리와 의미 포함)
- (7) Liberal(자유분방한 생각과 창의성)

3) 참고문헌 및 웹사이트

박교식(2002). 교구: 유사 탱그램과 그 수학교육적 시사점. **대한수학교육학회지 <학교수학> 4(1)**, 97-109.

송상현(2008). 수학과 교육과정에 비추어 본 탱그램과 유사탱그램의 재조명.

육학회지 <수학교육학연구>, 18(3), 391-405.

특허청(2009). **발명으로의 몰입 2.0.**(중급) 교사용.

<http://www.archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang4.html> 아르키메데스의 실험실(입체탱그램의 다양한 유사 탱그램퍼즐들)

<http://www.mathematische-basteleien.de/tangrams.htm> 수학적 탱그램들



학습 평가

학생들에게는 학습한 핵심내용이나 느낀점을 3가지 정도 적도록 하고 학습목표의 달성여부를 스스로 확인하는 자기평가표에 체크하고 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 보도록 하고자 합니다. 그러기 위해 자신이 먼저 직접 자신을 평가해봅시다.

1 이번 주제에서 배운 핵심 내용이나 느낀 점을 3가지만 적어 봅시다.

(1)

(2)

(3)

2 다음은 ‘유사탱그램을 활용한 확장적 사고 지도’ 학습목표 달성 여부를 확인하기 위한 자기평가표입니다. 각 평가 요소에 대한 자신의 성취도를 그 달성 정도에 따라 ‘상’, ‘중’, ‘하’의 적당한 칸에 ‘✓’ 표시를 하시오. 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 봅시다.

평가요소	자기평가		
	상	중	하
(1) 전통 칠교판을 이용한 팔교판의 구성 원리를 바르게 이해하고 팔교판을 사용하여 여러 가지 블록 다각형을 만들 수 있었다.			
(2) “What if(not)~?”이라는 기법을 통해 다양한 유사탱그램을 쉽게 만들 수 있음을 알았다.			
(3) 유사탱그램을 가지고 내용적으로든 프로젝트로는 어떻게 학생들을 지도할 지를 계속 생각해 보았다.			
(4) 의문을 가져보려는 태도와 유사탱그램을 활용한 수학적 사실이나 성질을 스스로 찾아보려는 의지를 보였다.			
(5) 유사탱그램을 이용한 문제를 만들거나 다양한 유사탱그램을 만들어 보려는 마음가짐과 욕구가 생겼다.			
(6) 위의 평가요소들을 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법을 알게 되었다.			
원인분석			

18차시: 펜토미노와 블로커스

학습 안내



1~4명이 즐길 수 있는 흥미진진한 전략 게임으로 도형을 이용한 공간감과 수학적 사고력을 필요로 하는 교육적 가치를 지니고 있습니다. 블로커스(Blockus)는 ‘우리를 막아라.’라는 뜻으로 정해진 도형 조각들을 사용하여 상대방의 침입은 막으면서 내 땅은 넓게 차지한다는 뜻으로도 해석할 수 있습니다. 게임을 위해서는 5개 이하의 정사각형들을 변끼리 붙여 만든 조각들의 모양들을 잘 이해하고 그 모양들이 게임판에 남은 빈 자리의 모양과 잘 들어맞는지를 판단해야하므로 도형에 대한 공간감각도 필요하지만 사실은 상대방이 놓았거나 남겨둔 조각들에 대한 기억력과 판단력도 필요하며 상황에 따른 적절한 대처방법도 필요합니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 블로커스 게임에 사용하는 테트로미노와 펜토미노 조각들의 모양들을 분류하고 게임의 규칙을 바르게 이해할 수 있습니다.
2. **(기능과 활동)** 게임에 사용되는 조각들을 활용한 밀기, 돌리기, 뒤집기 등의 공간감각 기능을 잘 활용할 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 고득점을 위한 개인 전략을 세우고 상대방의 전략을 잘 간파할 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 기존의 게임을 활용하여 새로운 게임을 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.

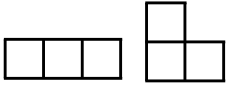
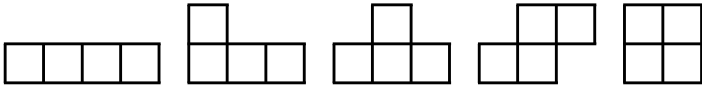
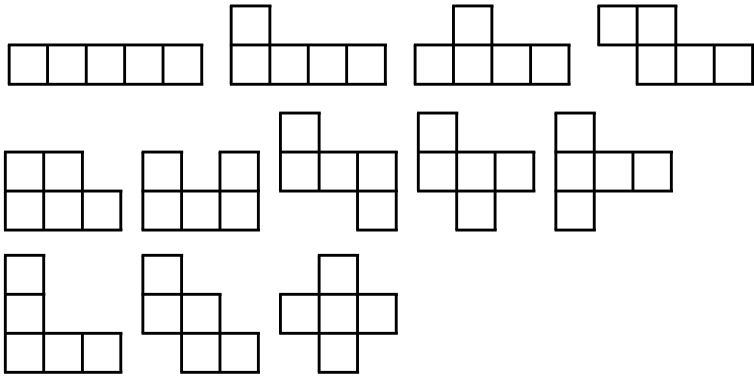


학습 내용

1. 블로커스 제품 구성



2. 조각들의 모양

정사각형 의 개수	모양	타일의 개수	정사각형 개수의 합
1		1	1
2		1	2
3		2	6
4		5	20
5		12	60
계		21	88

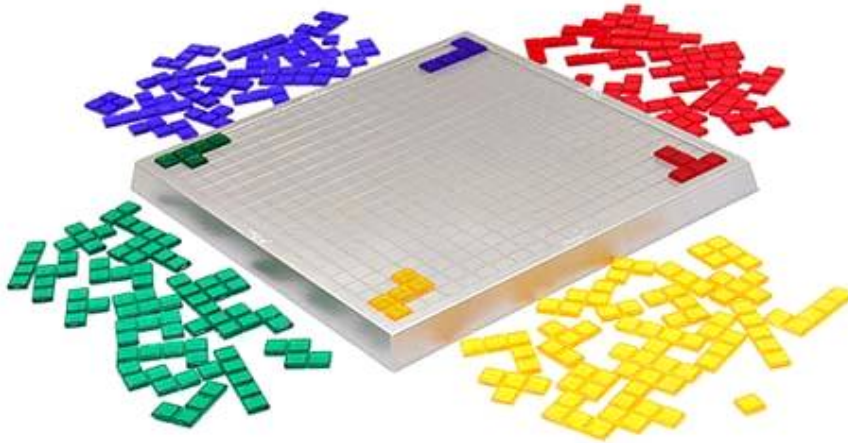


3. 블로커스 게임 방법

Blokus 게임방법

게임준비

게임 참가자는 한가지 색상씩 선택하여 퍼즐을 정한다.
정해진 퍼즐을 게임판 앞에 정렬해놓고 앉은자리에서 시계방향으로 돌아가며 한개씩 게임판 위에 퍼즐을 놓는다.



게임방법



1. 시작 타일은 게임판 모퉁이 끝칸에서
항상 시작하여야 합니다.

2. 나의 색을 내려놓을 때

꼭 같은 색 끼리 꼭지점이
연결되도록 놓아야 합니다
단, 다른 색 타일과는 변이 닿아도 상관없습니다



승패결정

제일 먼저 자신의 조각을 다 놓은 사람이 생기거나 더 이상 아무도 타일을 놓을 수 없는 순간이 오면
남아있는 정사각형의 개수를 세어 승부를 가립니다.

남아있는 블록조각의 정사각형의 개수가 적은사람이 승리하게 됩니다.

4. 블록커스 게임을 위한 연습 사이트

<http://ainedu.co.kr/shop/blokus.html>

Blokus 온라인 게임 하기

- 블록커스 클래식, 트라이곤, 듀오 게임을 온라인으로 직접 즐길 수 있습니다.
- 전세계 블록커스 매니아들과 직접 대전을 펼칠 수도 있으며 **게임이용료는 무료**입니다.



Blokus 온라인 게임 방법

01. 게임 선택하기



02. 로그인



03. Game Room 만들기



04. 블록커스 게임 하기





학습 정리

1. 블로커스(Blokus) 게임은 5개 이하의 정사각형을 변끼리 이어붙여 만든 조각들을 돌리거나 뒤집어 놓으면서 빈 자리를 차지하는 공간감각 학습뿐만 아니라 기억력과 종합적인 판단을 위한 수학적 사고력을 필요로 하는 전략 게임으로서의 교육적 가치를 지니고 있습니다.

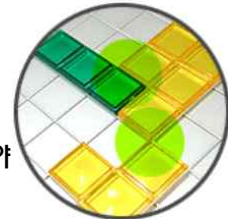
2. 준비물:

		
블로커스 게임판	조각타일(21개) 4세트	4색 분류함

3. 게임의 목표: 21개의 타일을 가능한 한 많이 게임판에 올려놓습니다.

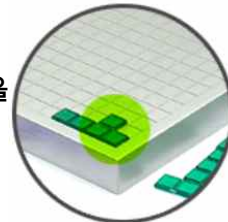
4. 게임 방법

- 1) 각 경기자별로 동일한 색의 타일(21개)을 모두 가져옵니다.
- 2) 시작 타일은 반드시 게임판 모퉁이 끝 칸에 놓아야 한다.
- 3) 정한 순서대로 타일을 내려놓을 때 반드시 자신의 타일과 꼭지점끼리만 맞붙어 있어야 하며 선이 닿아서는 안됩니다.
- 4) 더 이상 타일을 내려놓을 곳이 없어지면 게임은 끝이 납니다.



5. 보너스 점수와 순위 결정

- 1) 남은 타일에서 정사각형 1개는 -1점이며 모든 타일을 다 내려놓은 사람은 +15점을 얻습니다.
- 2) 제일 마지막에 가장 작은 타일을 내려놓으면서 게임을 마치면 +5점을 더 얻습니다.
- 3) 점수가 높은 순으로 순위를 정합니다.



6. 승리를 위한 작전

- 1) 게임판의 중앙으로 자신의 영역을 넓혀가면서, 나는 상대방 타일의 연결 틈 사이로 잘 빠져나가되 상대방은 들어오지 못하게 막아야 합니다.
- 2) 초반에는 큰 타일(정사각형 5개, 펜토미노)을 많이 사용합니다.
- 3) 상대방 타일의 꼭지점끼리 연결하지 못하도록 꼭지점을 집중적으로 봉쇄합니다.
- 4) 게임 중 나와 상대방의 타일 중 어떤 모양이 사용되었고 또 남아있는지를 잘 살핍니다.
- 5) 마지막에는 내가 보너스 점수를 얻을지 상대방이 보너스 점수를 얻지 못하게 할지도 고려해야 합니다.

학습 평가

1. 블로커스 게임에 대한 아래의 설명들 중 가장 잘못 된 것을 고르시오.

- ① 블로커스 게임은 1~4명이 즐길 수 있는 흥미진진한 공간감각 활용 전략 게임이다.
- ② 블로커스 게임은 운보다는 공간감각 활용 능력과 전략적 사고가 필요하다.
- ③ 블로커스 게임에서는 큰 조각을 먼저 사용하는 것이 유리하다.
- ④ ‘블로커스’라는 뜻에서 알 수 있듯이 자신의 블록을 효율적으로 차단해야 한다.
- ⑤ 블로커스 게임은 논리적 판단, 기억력, 문제해결의 전략 등을 길러 줄 수 있는 유익한 게임이지만 도형감각에 뛰어난 사람에게 유리한 게임이다.

2. 블로커스 게임에서는 타일 조각들의 모양을 잘 활용해야 합니다. 타일의 종류나 모양에 대한 설명으로 가장 옳지 못한 것을 고르시오.

- ① 블로커스 게임에 사용되는 조각들은 모두 21개이다.
- ② 정사각형 4개를 변끼리 연결하여 만들 수 있는 테트로미노 조각은 5개이다.
- ③ 정사각형 5개를 변끼리 연결하여 만들 수 있는 펜토미노 조각은 12개이다.
- ④ 펜토미노 조각들 중에 한번 뒤집어 놓으면 자신과 합동이 되지 않는 조각은 5개이다.
- ⑤ 테트로미노 조각들 중에서 선대칭도형이 아닌 타일 2개를 뒤집은 모양을 추가하면 테트리스 게임에서 나오는 모든 조각들을 얻을 수 있다.

3. 정사각형을 이어붙여 만든 블로커스 게임 조각들을 일부 또는 전부 사용하여 만들 수 있는 도형들 중에서 $k = \frac{\text{도형의 넓이}}{\text{도형의 둘레}}$ 의 값이 최대인 경우의 둘레의 길이를 구하시오.



MEMO

19차시: 폴리오미노를 통한 변형 블로커스 만들기 지도

학습 안내



이번 시간에는 지난 시간에 익힌 블로커스 게임용 타일 모양에 숨어있는 수학적 요소를 좀 더 생각해 보면서 이를 수업에 활용할 수 있는 방법과 'What if (not)?'의 전략을 사용한 새로운 블로커스 게임을 만들어 보고자 합니다. 블로커스 게임에 사용한 조각들은 '폴리오미노'라고 합니다. 이 조각들의 특징에 대해 올바르게 이해해야만 기존 게임의 타일 모양이나 게임 규칙 등을 바꾸어 새로운 문제로 활용 할 수 있습니다. 학습자들에게 변형 블로커스를 만들어 보려는 의지와 함께 이를 위해 그 속에 들어있는 수학의 원리를 파악해 보려는 태도가 생겨나기를 기대합니다.



학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 블로커스 게임에 사용하는 폴리오미노 조각들의 모양을 분류하고 게임의 규칙을 바르게 이해할 수 있습니다.
2. **(기능과 활동)** 게임에 사용되는 조각들을 활용한 밀기, 돌리기, 뒤집기 등의 공간감각 기능을 잘 활용할 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 고득점을 위한 개인 전략을 세우고 상대방의 전략을 잘 간파할 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 기존의 게임을 활용하여 새로운 게임을 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.
5. **(학습지도면)** 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 폴리오미노의 종류 분류하기

사용한 정사각형 의 개수	모양	이름	타일의 개수	정사각형 개수의 합
1		모노미노 (monomino)	1	1
2		도미노 (domino)	1	2
3		트로미노 (tromino)	2	6
4		테트로미노 (tetromino)	5	20
5		펜토미노 (pentomino)	12	60
계	21종의 조각 89개의 정사각형	폴리오미노 (polyominoes)	21	89

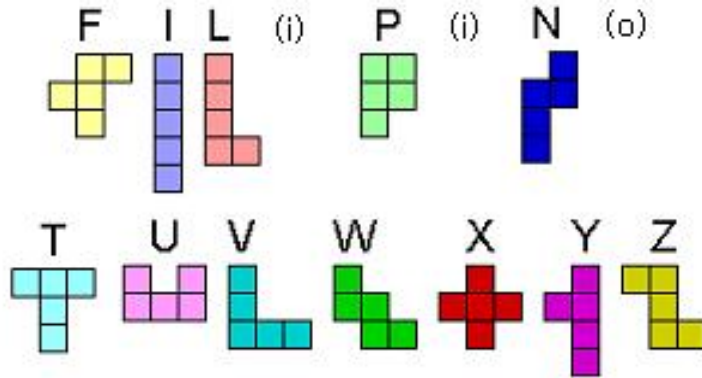
5 이하의 정사각형을 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 모양 조각은 모두 21종이며 이 때 사용된 정사각형의 개수는 89개입니다. 돌리거나 뒤집어서 포개어지는 것을 제외하면서 빠트림없이 중복되지 않게 구하려면 '기준에 따라 분류해 보려는 생각'이 중요함을 강조해 주어야 합니다. 게임을 시작하기 전에 이 조각들이 모두 빠짐없이 있는지를 점검해 보도록 합니다. 교사가 일부의 특정 조각을 몇 개 감추어 두고 빠진 조각을 찾아보도록 해도 됩니다.

(기준에 따라 분류하기) 테트로미노와 펜토미노는 각각 5개, 12개뿐임을 탐구하기

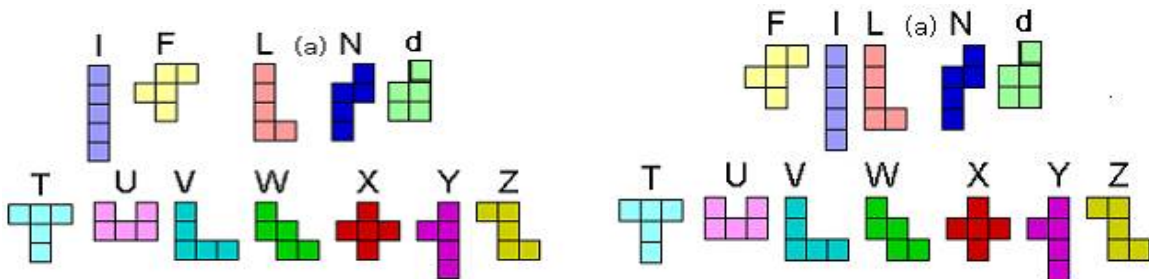
- ① 1: 정사각형의 개수가 하나 적은 폴리오미노의 조각들을 기준 조각으로 삼아 그 조각들의 변을 따라 돌아가며 정사각형을 하나씩 붙이기
- ② 분류기준 2: 가로 또는 세로 방향으로 길게 놓여있는 칸 수를 기준으로 그 조각들의 주위를 돌아가며 정사각형을 하나씩 붙여가며 중복된 것 배제하기
- ③ 분류기준 3: 가로 또는 세로 방향으로 길게 놓여있는 칸 수를 기준으로 나머지 칸들이 한 쪽에만 놓이는 경우, 양 쪽에 놓이는 경우로 구분하기

2. 펜토미노 조각의 새로운 이름 붙이기

펜토미노를 소개하고 있는 어떤 웹사이트에서는 펜토미노 각 조각들의 모양을 기억하기 쉽도록 하기 위해 영어 알파벳에 비추어 읽으면서, 테트로미노는 I, L, N, O, T(일노트)로, 펜토미노는 f, I, L, N, P, T, U, V, W, X, y, Z에서 N과 P의 위치를 바꾸고 자음들 사이에 모음(i, o)을 추가하여 'FIL(i)P(i)N(o)'(휠리피노)와 알파벳의 마지막 7자인 TUVWXyZ로 읽을 수 있다고 제안합니다.



하지만 '휠리피노'의 P를 돌려서 소문자 d로 생각하면 모음 i나 o 대신에 a만 하나 추가하여 'IF L(a)Nd'(이프 랜드) 또는 'FIL(a)Nd'(휠랜드)로 읽을 수도 있습니다.



이것은 웹사이트에 소개하거나 남이 만들어 놓은 것을 무비판적으로 그냥 수용하기보다는 '리-크리에이션'이라는 관점에서 바라보면서 새롭게 이름을 붙여보도록 한 사례의 결과입니다.

지도초점: 교사가 학습자료를 구성할 때 웹사이트에 소개하고 있는 기존 자료나 남이 만들어 놓은 것을 무비판적으로 수용하기보다는 '리-크리에이션'이라는 관점에서 바라볼 수 있어야 하고 학생들에게도 그러한 마인드가 생기도록 자극해 주어야 합니다.



3. 펜토미노 조각을 이용한 학습 활동

- 1) 펜토미노 조각을 이용하여 수행할 수 있는 학습활동으로는 난이도의 수준에 따라 다음과 같이 6단계로 구분할 수 있습니다. 이는 처음에는 유아 수준의 모양 만들기로부터 시작하지만 점차 도형 만들기로 나아감을 보여줍니다.
- 2) 펜토미노 12조각을 모두 사용하여 직사각형을 만드는 것은 매우 어려운 작업이므로 그 이전에 학습자의 수준에 따라 넓이와 둘레라는 수학적 내용 요소와 함께 분자의 특성을 이용한 사고력이 필요한 5단계($k = \frac{\text{넓이}}{\text{둘레}}$ 값이 최대인 도형 만들기)를 게임 형식으로 제공할 수 있을 것입니다. 이는 넓이가 일정할 때 둘레를 최소로 하려면 원에 가까운 모양이어야 함을 시사해 주기도 합니다.

1단계: 일부만 사용하여 모양 만들기	2단계: 여러 가지 동물모양 만들기
3단계: 4조각 또는 9조각으로 큰 알파벳 모양 만들기	4단계: 일부만 사용한 직사각형 만들기
주의: 정확히 닮은 모양은 4조각 또는 9조각만으로 가능함	
5단계: $k = \frac{\text{넓이}}{\text{둘레}}$ 값이 최대인 도형 만들기	6단계: 모든 조각 사용한 직사각형 만들기
$k = \frac{\text{넓이}}{\text{둘레}}$의 값이 최대가 되려면 분자는 크고 분모는 작아야 한다. 그러려면 가능한 많은 조각을 사용하면서도 둘레가 단조로운 직사각형 모양을 만들어야 함을 스스로 판단해 내어야 한다. (수준별 제작 가능)	3×20 보드는 2개, 4×15 보드는 368개, 5×12 보드는 1010개, 6×10 보드는 2339개의 해답이 있지만 그 어느 것 하나 쉽지는 않다.

- 3) (참고) 처음에는 5개 이하의 정사각형으로 이루어진 폴리오미노 전체를 사용하는 것에서부터 정사각형 5개로만 이루어진 펜토미노만 사용하는 경우로 제한해 가는 것도 가능합니다.

4. 변형 블로커스

학습자들은 블로커스를 직접 체험하면서 단순히 재미보다는 블로커스 속에 들어있는 수학적 요소와 원리를 감각적으로 체득할 수 있어야 합니다. 하지만 수준높은 학습자라면 그보다 한 단계 더 발전하여 변형된 블로커스나 새로운 문제를 만들어 볼 수 있는 기회를 제공할 필요가 있습니다. 여기에 필요한 것이 **‘What if (not)?’**이라는 전략입니다. **‘What if (not)?’** 전략을 사용하여 변형 블로커스를 직접 만들어봅시다. 교사는 직접 구체적인 게임을 설계해 보는 것이 가능하지만 학습자의 경우는 전략을 세우고 대략적인 게임설계 후 토론을 하면서 게임의 문제점을 해결해나가는 활동을 하는 것으로 학습에 활용하는 것이 좋습니다.

	물음	선택한 결과
<0단계> 출발점 선택		
<1단계> 속성나열		
<2단계> 속성부정하기 What if (not)?		
<3단계> 의문제기와 문제설정		

블로커스 변형의 예 : 블로커스 트리곤, 3D 블로커스





학습 정리

1. 블록스에 들어있는 학습 요소로는 예상하기, 규칙 찾기, 기준에 따라 분류하기와 같은 방법적인 요소와 공간감각 (지각, 변환), 둘레와 넓이, 비율과 같은 내용적 요소들이 있습니다. 뿐만 아니라 실제 게임에서는 어떤 전략을 사용할 때 상대방의 수나 심리를 파악하는 판단력과 같은 종합적인 능력도 필요합니다.
2. 블록스의 구성 요소와 사용 규칙, 승패 방법 등에 ‘What if (not)’ 의 전략을 사용하면서 새로운 변형 블록스를 만들 수 있습니다. 학습자들이 제안한 새로운 게임을 함께 수행해 보면서 토론을 거쳐 수학적으로도 의미가 있고 재미있는 게임을 만들어 보기를 기대합니다. 이때 사용할 수 있는 한 가지 방법이 ‘What if (not)?’이라는 전략입니다.
3. 예를 들어, ‘단위 모양 조각이 정사각형이 아니라 정삼각형이라면?’이라는 질문을 통해 나온 것이 블록스 트리곤이며, ‘단위 모양이 평면이 아닌 정육면체라면?’이라는 질문을 통해 나온 것이 3D 블록스입니다.

학습 평가

1. 5개 이하의 정사각형을 변끼리 붙여 만든 서로 다른 조각들을 일부 또는 전부 사용하여 만든 도형들 중에서 $k = \frac{\text{도형의 넓이}}{\text{도형의 둘레}}$ 의 값이 최대인 경우의 둘레의 길이를 구하십시오.
 ① 34 ② 36 ③ 38 ④ 40 ⑤ 41
2. 다음 중 일반인들이 기존의 블록스를 변형하여 사용하고자 할 때 가장 불편하거나 부적합한 것은?
 ① 숫자 타일을 1부터 15까지 더 늘려서 사용한다.
 ② 타일의 일부를 빼 놓고 그 타일들이 무엇인지를 모른 상태에서 게임을 시작한다.
 ③ 원래의 조커는 없애고 숫자 타일 중 13을 조커로 사용하되 같은 색깔에서만 사용한다.
 ④ 받침대가 4개이므로 두 사람이 게임을 할 때 각자 2개의 받침대를 사용하여 4인 경기자가 게임하는 것처럼 한다.
 ⑤ 연속인 수나 색이 다른 같은 수를 조합하듯이 합이 30이상이면서 약수와 배수의 관계가 되는 수들끼리는 조합을 허용하도록 한다.
3. ‘What if (not)?’ 전략 중 다음 <보기>의 문장이 해당하는 가장 적합한 단계는?

<보기>

왜 조커는 2개뿐일까? 두 명이 게임을 할 때 각자 숫자를 하나씩 뽑아 그 수도 조커로 사용하자. 단, 숫자 조커는 자신과 색깔이 같은 타일이 포함되어 있을 때만 사용할 수 있다.

- ① 출발점 선택 ② 속성 열거하기 ③ 속성 부정하기 ④ 의문제기 ⑤ 문제 설정

20차시: 펜타큐브와 3D 블로커스

학습 안내



3D블로커스게임은 평면 게임인 블로커스와 루미스라는 입체 게임이 결합하여 진화한 것입니다. 게임을 위해서는 폴리큐브 4세트와 게임판이 필요합니다. 4개 이하의 정육면체 조각들을 면끼리 이어 붙여 만든 조각들의 모양들을 잘 이해하고 그 모양들이 게임판에 남은 빈 자리의 모양과 잘 들어맞는지를 판단해야하므로 우선 입체도형에 대한 공간감과 수학적 사고력이 필요합니다. 특히 상대방이 놓았거나 남겨둔 조각들에 대한 기억력과 판단력도 필요하며 상황에 따른 적절한 대처방법도 필요하므로 공간을 활용한 전략게임이라고 할 수 있습니다.

학습 목표

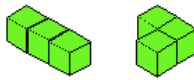
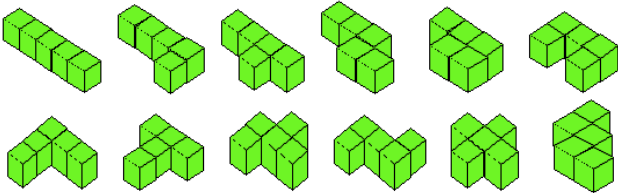
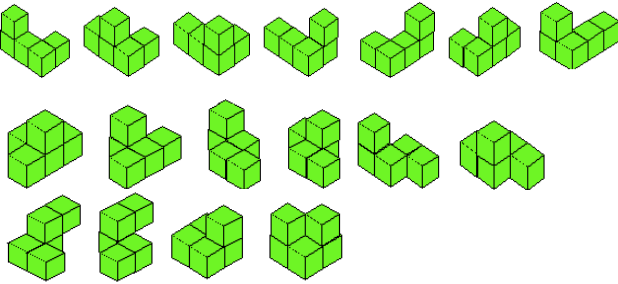
이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 3D블로커스 게임에 사용하는 폴리큐브 조각들의 모양들을 분류하고 게임의 규칙을 바르게 이해할 수 있습니다.
2. **(기능과 활동)** 게임에 사용되는 입체 조각들을 활용한 밀기, 돌리기, 뒤집기 등의 공간감각 기능을 잘 활용할 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 고득점을 위한 개인 전략을 세우고 상대방의 전략을 잘 간파할 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 기존의 게임을 활용하여 새로운 게임을 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.



학습 내용

1. 폴리큐브 조각들의 모양

정육면체 의 개수		모양	이름	타일의 종류	사용된 정육면체 의 개수
1			모노큐브	1	1
2			디큐브	1	2
3			트리큐브	2	6
4	1층		테트라큐브	5	20
	2층			3	12
5	1층		펜타큐브	12	60
	2층			17	85
종합				41	186

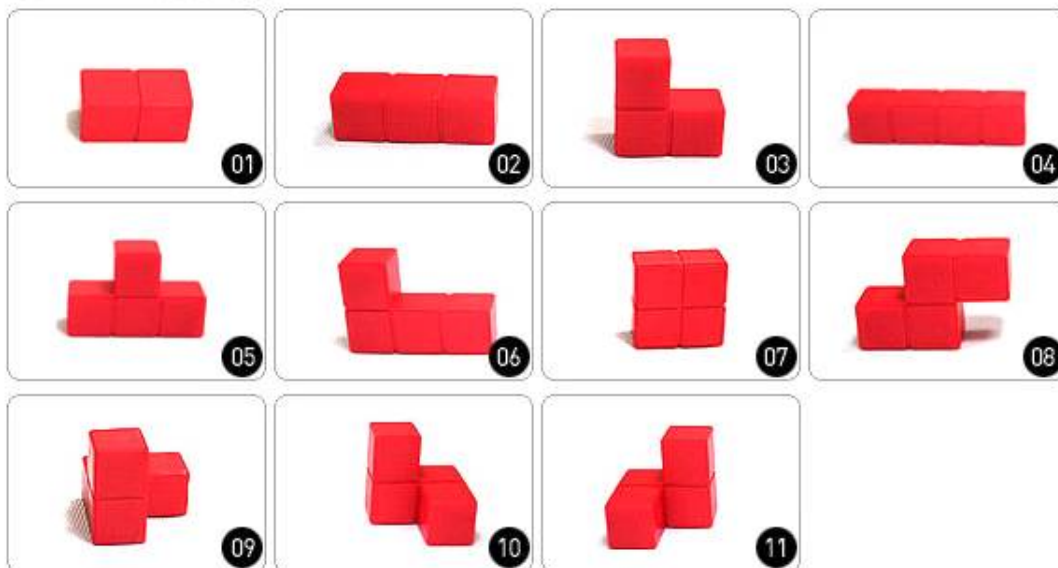
폴리큐브는 정육면체를 면끼리 이어붙여 만들 수 있는 서로 다른 모양 조각들을 말합니다. 정육면체의 개수에 따라 모노큐브, 디큐브, 트리큐브, 테트라큐브, 펜타큐브라고 하며 테트라큐브 중 1층짜리 5개는 테트로미노 조각이며, 펜타큐브 중 1층짜리 12개는 펜토미노 조각입니다. 총 41종 186개의 정육면체 조각으로 구성되는데, 모노미노는 엄격히 말하면 ‘여러 개’라는 뜻의 ‘Poly’에는 해당하지 않으므로 폴리큐브에서는 제외하여 40종 185개만 폴리큐브라 부르기도 합니다.

2. 3D 블로커스 제품 구성



쓰리디(3D) 블로커스 조각은 회전 게임판 1개와 빨노파녹색의 폴리큐브(Ppoly cubes) 4 세트와 게임판 위에서 사용하는 4가지 종류의 마스크로 구성됩니다. 3D 블로커스는 폴리 큐브 중 정육면체 2개로 만들 수 있는 디큐브, 정육면체 3개로 만들 수 있는 두 조각의 트리큐브, 그리고 정육면체 4개로 만들 수 있는 8조각의 테트라큐브로만 구성된 총 11종의 40개 정육면체가 사용됩니다.

〈 블로커스 3D 블록 구성 〉





3. 3D블록스 게임 방법

3D블록스3D의 게임방법

*게임인원 : 2~4명

*게임연령 : 7세 이상

*게임시간 : 20분

01



각자 자신의 색을 정합니다.
4가지 마스크 중 한 개를 선택합니다.
첫 번째 사람이 블록을 내려놓습니다.
블록은 반드시 마스크 안에 내려놓아야 합니다.

02



두 번째 사람부터 블록을 내려 놓을 때는 바로 앞 사람이 내려놓은 블록에 반드시 한 면 이상 닿아야 합니다.

03



블록을 계속 내려놓으면서 게임은 진행되고 각 마스크에 최대 높이를 넘지 않게 블록을 내려 놓습니다.

04



더 이상 블록을 내려놓을 수 없거나 모든 블록을 다 내려놓으면 게임은 끝이 납니다.

❶ 자기의 색깔을 하나씩 정하고 4가지 마스크 중 한 개를 선택합니다. 첫 번째 사람은 자신의 블록을 반드시 마스크 안쪽 가장 자리에 놓아야 합니다.

❷ 다음 턴이 돌아오기까지 처음에는 바로 앞 사람이 내려놓은 블록에 반드시 한 면 이상 닿아야 합니다. 이후로는 3D 블록스의 가장 중요한 규칙으로 자신의 색 블록과 반드시 한 면 이상 닿도록 연결해야 한다는 점입니다.

❸ 각 마스크마다 정한 최대 높이를 넘지 않아야 합니다.

❹ 더 이상 블록을 내려놓을 수 없게 되면 게임은 끝이 납니다. 그리고 위에서 내려 보았을 때 자신의 블록 색이 가장 많이 보이는 사람이 이깁니다.

3D 4가지 마스크

*마스크 A를 이용해 게임을 즐깁니다.



MASK A

*2번 마스크를 이용해 게임을 즐깁니다.



MASK B

*3번 마스크를 이용해 게임을 즐깁니다.



MASK C

*4번 마스크를 이용해 게임을 즐깁니다.

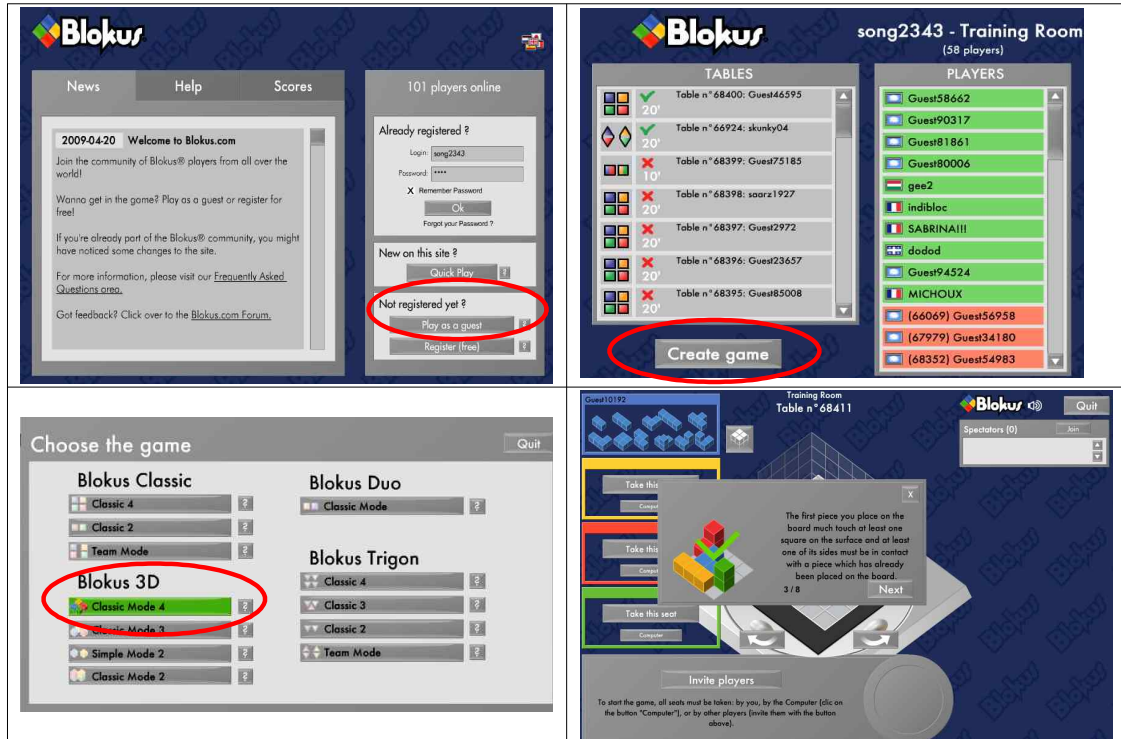


MASK D

MASK A	STRUCTURE A	MASK C	STRUCTURE C
MASK B	STRUCTURE B	MASK D	STRUCTURE D

4. 3D 블록스 게임을 위한 연습 사이트

<http://ainedu.co.kr/shop/blokus.html>에서 (1)손님(guest)으로 등록하고 (2)방 만들기(Create game)에서 (3)3D블록스를 선택하고 (4)설명서를 읽은 다음 (5)빈 자리에 컴퓨터를 선택하면 게임을 시작할 수 있다.





학습 정리

1. 3D블로커스(3D Blokus) 게임은 4개 이하의 정육면체를 면끼리 이어붙여 만든 폴리큐브 조각들을 돌리거나 뒤집어 놓으면서 빈 자리를 차지하는 공간감각 학습뿐만 아니라 기억력과 종합적인 판단을 위한 수학적 사고력을 필요로 하는 전략 게임으로서의 교육적 가치를 지니고 있습니다.



3D 블로커스 입체구성

- 회전 게임판 1개
- 입체 게임블록 44개
- 마스크 4개
- 보관함 1개
- 게임 설명서

1) 준비물:

2) 게임의 목표: 위에서 바라보았을 때 자기 색깔이 많은 사람이 이깁니다.

3) 게임 방법

- 1) 각자 자기의 색깔을 하나씩 정하고 4가지 마스크 중 한 개를 선택합니다.
- 2) 첫 번째 사람은 자신의 블록을 반드시 마스크 안쪽 가장 자리에 놓아야 합니다.
- 3) 처음에는 바로 앞 사람이 내려놓은 블록에 반드시 한 면 이상 닿아야 합니다..
- 4) 두 번째 턴 부터는 자신의 색 블록과 반드시 한 면 이상 닿도록 연결해야 합니다.
- 5) 각 마스크마다 정한 최대 높이를 넘지 않아야 합니다.
- 6) 더 이상 블록을 내려놓을 수 없게 되면 게임은 끝이 납니다.



3D블로커스D의 특징



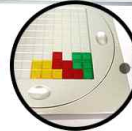
01. 세련된 디자인

블로커스 특유의 세련된 디자인 매탈 오프 게임판으로 눈이 더욱 즐거워집니다. 또한 게임블록이 잘리도록 각자면이 입체적으로 제작되어 더욱 안정적인 게임을 즐길 수 있습니다.



02. 견고한 마스크

기본 종이마스크의 견고한 구조를 플라스틱으로 만들어 게임판에 사용할 수 있는 마스크 형식으로 제작했습니다.



03. 블로커스 클래식과 호환

게임판의 내부 격자는 블록이 쏠릴 수 있도록 입체적으로 제작되었으며 기존 블로커스 클래식의 블록과 크기가 동일해 호환해서 사용할 수 있습니다.

4. 승리를 위한 작전

- 1) 가능한 복잡한 모양의 2층짜리 블록부터 사용합니다.
- 2) 자기 색깔의 블록과 연결되는 옆면을 이용하여 다른 사람의 블록의 윗면을 공략합니다.
- 3) 제한된 높이를 고려하면서 맨 윗 면의 칸 수를 차지합니다.
- 4) 위로만 솟아오르기보다 옆면을 활용하여 옆으로 넓혀갑니다.
- 5) 평평한 모양보다는 불규칙한 모양을 만들어 갑니다.

학습 평가

1. 3D블로커스 게임에 대한 아래의 설명들 중 가장 잘못 된 것을 고르시오.

- ① 3D블로커스 게임은 1~4명이 즐길 수 있는 흥미진진한 공간감각 활용 전략 게임이다.
- ② 3D블로커스 게임은 운보다는 공간감각 활용 능력과 전략적 사고가 필요하다.
- ③ 3D블로커스 게임에서는 불규칙적인 모양의 2층 구조물을 먼저 사용해야 한다.
- ④ '블로커스'라는 뜻에서 알 수 있듯이 다른 색깔의 블록을 효율적으로 차단해야 한다.
- ⑤ 3D블로커스 게임에서 승리하려면 공간감각, 논리적 판단, 기억력, 문제해결의 전략이 필요하다.

2. 3D블로커스 게임에서는 폴리큐브 조각들의 모양을 잘 활용해야 합니다. 3D블로커스와 폴리큐브 조각들에 대한 설명으로 옳은 것을 고르시오.

- ① 3D블로커스 게임에 사용되는 조각들은 모두 41종이다.
- ② 정육면체 4개를 면끼리 연결하여 만들 수 있는 테트라큐브 조각은 8개이다.
- ③ 정육면체 5개를 면끼리 연결하여 만들 수 있는 펜타큐브 조각은 12개이다.
- ④ 테트라큐브 조각들 중에 면대칭이 아닌 도형은 3개이다.
- ⑤ 테트라큐브 조각들 중에 서로 면(거울)대칭도형이 되는 조각들은 없다.

3. 3D 블로커스 조각들의 일부 또는 전부 사용하여 만들 수 있는 도형들 중에서

$k = \frac{\text{도형의부피}}{\text{도형의겉넓이}}$ 의 값이 최대인 경우의 부피를 구하시오.()



A large rectangular area with horizontal dotted lines for writing. In the top right corner, there is a blue cloud-shaped memo tag with the word "MEMO" in white capital letters. The tag is hanging from a white string.

21차시: 폴리큐브를 통한 조건변경의 확장 지도

학습 안내



이번 시간에는 지난 시간에 익힌 폴리큐브 조각 모양에 숨어있는 수학적 요소를 좀 더 생각해 보면서 이를 수업에 활용할 수 있는 방법과 'What if (not)?'의 전략을 사용한 새로운 게임이나 문제를 만들어 보고자 합니다. 3D블로커스 게임에 사용한 조각들은 '폴리큐브'라고 합니다. 이 조각들의 특징을 먼저 이해해야 기존 게임의 타일 모양이나 게임 규칙 등을 바꾸어 새로운 문제로 활용 할 수 있습니다. 이처럼 폴리큐브를 활용하여 게임이나 학습 활동을 확장시켜나간 사례를 통해 폴리큐브 지도 방법을 생각해 봅시다.

학습 목표

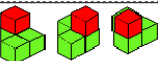
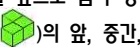
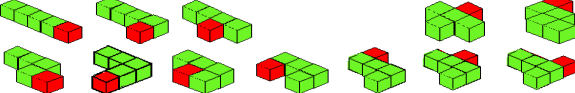
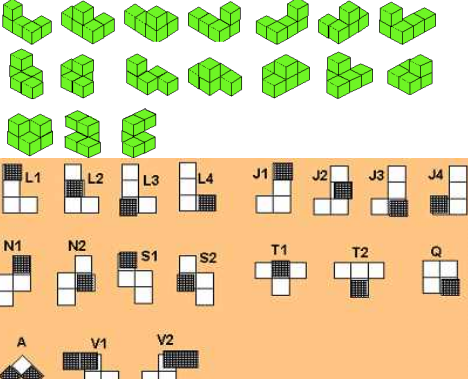
이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 3D블로커스 게임에 사용하는 폴리큐브 조각들의 모양들을 분류하고 게임의 규칙을 바르게 이해할 수 있습니다.
2. **(기능과 활동)** 폴리큐브 조각들 활용한 학습 활동을 탐구할 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 'what if (not) 전략'을 이용한 확장적 사고를 개발시킬 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 기존의 게임이나 자료를 활용하여 새로운 게임이나 발전된 자료를 만들어 보려는 태도와 의지를 갖습니다.
5. **(학습지도면)** 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 폴리큐브 만들어 분류하기

정육면체의 개수	모양	종류	사용된 정육면체의 개수	이름	
1		1	1	(monocube)	
2		1	2	디큐브 (dicube)	
3		2	6	트리큐브 (tricube)	
4	(1층)  정육면체가 3개일 때의 트리큐브 두 가지 기본도형에 정육면체를 하나씩 덧붙여가면서 만들어지는 모양들 중에 돌리거나 뒤집어서 겹쳐지는 모양을 제외하고 남은 1층으로 된 도형은 테트로미노(I, L, N, O, T)의 5개와 같습니다.	5	20	입체형 테트로미노	테트라큐브 (tetracube)
	(2층)  이제 2층으로 된 도형을 만들기 위해 트리큐브의 일자형 어느 곳에 정육면체를 올려놓더라도 이를 앞으로 잡아 당기면 1층의 L 또는 T모양과 같아집니다. 따라서 트리큐브의 7가지 모양()의 앞, 중간, 뒤 세 곳에 각각 하나씩 놓은 2층만 만들 수 있습니다. 첫 번째와 세 번째의 모양은  처럼 거울 대칭이며 입체합동은 아닙니다.	3	12		
5	(1층)  테트라큐브의  와  의 주위에 각각 빨간색 정육면체를 하나씩 붙여가면서 중복되지 않는 것을 찾으면 3개와 7개를 만들 수 있습니다. 그리고 계속하여 다른 조각인  로부터  와  로부터  을 얻을 수 있습니다. 이처럼 정육면체 5개로 만들 수 있는 1층 모양은 펜토미노의 12조각입니다. 이들의 이름은 알파벳 순서로 재분류하면 IF L(a)Nd(이프 란드) 또는 FIL(a)Nd(필란드)와 TUVWXYZ입니다.	12	60	1층으로 된 입체형 펜토미노	펜타큐브 (pentacube)
	(2층)  테트라큐브의 L과 J 위에 각각 검은색 정육면체를 하나씩 올려놓으면서 중복되지 않는 것을 찾아갑니다. 그러면 L3와 J3는 서로 합동이 됨을 알 수 있습니다. 마찬가지로 N과 S, T, O 모양 위에 검은색 정육면체를 하나씩 올려놓으면 N1, N2, S1, S2, T1, T2, 그리고 Q가 만들어 집니다. 이제 바닥에는 정육면체가 3개인 트로미노 조각을 놓고 2층에 2개를 올려놓는 방법은 A와 V1, V2가 만들어 집니다.	17	85	2층으로 된 구조물	
계	41종의 186개 정육면체		41	186	

5개 이하의 정육면체를 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 모양 조각은 모두 41종이며 이 때 사용된 정육면체의 개수는 186개입니다. 개수와 층수, 그리고 서로 대칭인 모양을 고려하여 빠트림없이 중복되지 않게 구하려면 ‘기준에 따라 분류해 보려는 생각’이 필요합니다.

<기준에 따라 분류하기> 테트라큐브와 펜타큐브를 빠트리지 않고 중복되지 않게 분류하는 기준

(1) 개수가 하나 적은 폴리큐브의 조각들을 기준 조각으로 삼아 그 조각들의 둘레를 돌아가며 정육면체를 하나씩 붙이기

=>() 테트라큐브를 만들 때는 가능하나 펜타큐브의 경우는 테트라 큐브가 8개나 되므로 기준량이 많아서 복잡해진다.

(분류기준 2) 가로 또는 세로 방향으로 길게 놓여있는 정육면체를 기준으로 나머지 정육면체들이 한 쪽에 만 놓이는 경우, 양쪽에 놓이는 경우로 구분하기

=>(평가) 1층의 구조물의 경우는 가능하다. 그러나 2층 구조물의 경우는 별도로 생각해야 한다.

(분류기준 3) 일단 층수로 분류하고 2층의 경우만 일일이 따지기

=>(평가) 폴리오미노를 학습한 경우라면 1층은 쉽게 알 수 있으므로 효율적이다. 그러나 2층 구조물의 경우에도 기준이 필요하다.

(분류기준 4) 일단 층수로 분류하고 2층의 경우는 1층 구조물을 기준으로 분류하기

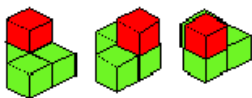
=>(평가) 2층으로 된 구조물이 가능한 1층의 모양을 먼저 파악해야 한다. 입체 구조물은 그 자체가 면대칭이 아니라면 거울대칭의 위치에 놓인 두 도형은 서로 합동이 아니다. 따라서 개수가 적은 1층의 모양이 서로 거울대칭의 위치에 있는 두 도형인지도 고려해야 한다.

2. 폴리큐브 조각의 이름 붙이기

소개하고 있는 어떤 웹사이트에서는 폴리큐브를 만들기 위해 각 조각들의 모양을 기억하기 쉽도록 하기 위해 영어 알파벳을 사용하고 있습니다. 1층의 구조물은 평면형의 폴리오미노 모양의 이름을 그대로 사용해도 되므로 정육면체가 4개, 5개일 때는 각각 '입체형 테트로미노', '입체형 펜토미노'라고 부르기로 합시다.

(1) 테트라큐브의 2층 구조물인 경우,

1층 모양이 한글의 'ㄱ'자, 또는 영어의 'C'나 'V' 모양인데 다른 모양 조각들의 이름과 통일하기 위해 영어를 사용하기로 하고 더 앞에 있는 C를 사용하여

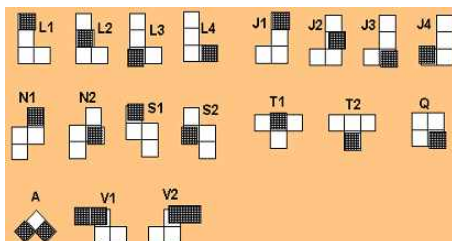


C1 , C2, C3 로 부르기로 합시다.

(2) 펜타큐브의 2층 구조물인 경우,

1층에 놓인 모양에 따라 L, J, N, S, T, O라 하고 그 위에 하나씩 올려놓으면서 (L1, L2, L3, L4), (J1, J2, J3, J4), (N1, N2), (S1, S2), (T1, T2), Q라고 합시다.

그리고 1층이 C인 경우는 2층에 놓은 모양에 따라 각각 (A, V1, V2)라 부르기로 합시다.

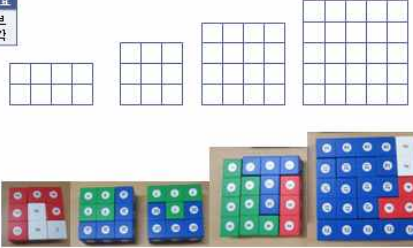


지도초점: 교사가 학습 자료를 구성할 때 웹사이트에 소개하고 있는 것이라도 무비판적으로 수용하기보다는 '리-크리에이션'이라는 관점에서 바라보면서, 기존 자료와 충돌이나 모순이 생기지 않도록 하면서 확장 또는 발전시켜보려는 마인드가 생기도록 자극해 주어야 합니다.

K~2 **평면** **활동13.** **큐브조각으로 여러가지 네모 만들기**

 1층 짜리 큐브조각을 이용하여 아래 네모모양을 채워 보세요.

준비하세요
폴리큐브
모든 조각

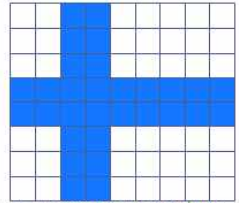


3~4 **평면** **활동4.** **나라의 국기를 그려라(3)**

 폴리큐브를 사용하여 나라의 국기를 만들어 봅시다.

준비하세요
폴리큐브
1층 조각

 핀란드



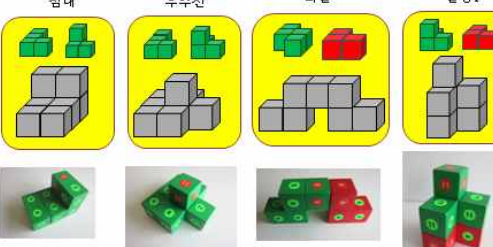
<유의사항> 1. 폴리큐브의 색과는 상관없이 자유롭게 만들어 보세요.
2. 색이 있는 부분에만 큐브를 올리세요.

K~2 **입체** **활동14.** **주어진 큐브 2조각으로 만들기**

 주어진 큐브 2조각으로 아래 모양들을 만들어 보세요.

준비하세요
4 6 8 10 11번 큐브 빌딩

원대 우주선 터널



3~4 **입체** **활동5.** **세계의 건축물 만들기(2)**

 폴리는 세계 여러 나라를 돌아다니며 재미있는 모양의 건축물을 보았습니다. 폴리가 본 건축물을 폴리큐브를 사용해서 만들어 봅시다.

준비하세요
폴리큐브
모든 조각

성 �핑크스

가로 6칸
세로 2칸
높이 12칸

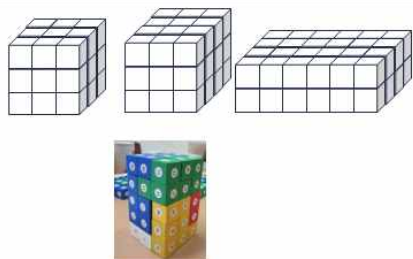
가로 6칸
세로 6칸
높이 5칸



K~2 **입체** **활동10.** **큐브 조각으로 상자모양 만들기**

 여러 가지 상자모양을 만들어 보세요.

준비하세요
폴리큐브
모든 조각



3~4 **입체** **활동12.** **폴리큐브로 여러 가지 상자모양 만들기(2)**

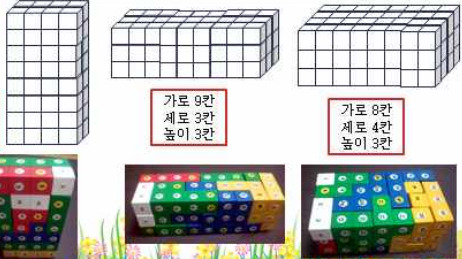
 폴리큐브의 조각 중 적당한 조각을 골라 여러 직육면체를 만들어 보세요.

준비하세요
폴리큐브
모든 조각

가로 4칸
세로 2칸
높이 7칸

가로 9칸
세로 3칸
높이 3칸

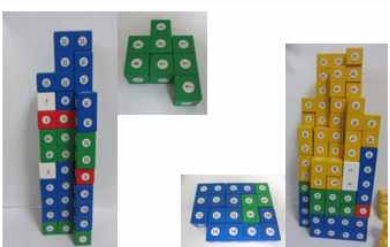
가로 8칸
세로 4칸
높이 3칸



K~2 **게임** **활동1.** **Poly-Tower 게임**

 서로 큐브를 한 조각씩 놓으며 탑을 쌓는 게임. 조각을 놓을 수 없는 친구가 지게 됩니다.

준비하세요
폴리큐브
1층 조각
(2층 조각)



3~4 **게임** **활동2.** **똑 같은 모양으로 만들어라!**

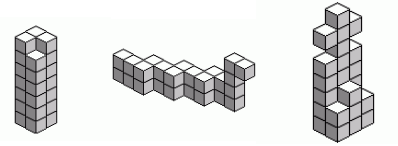
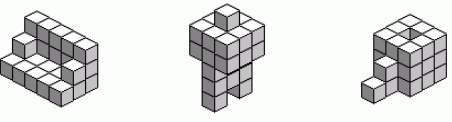
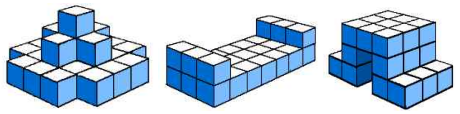
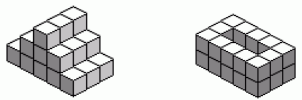
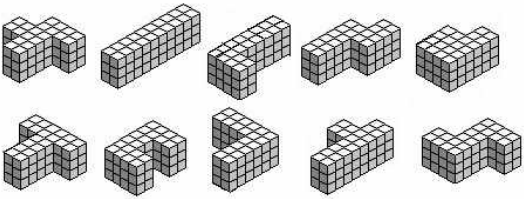
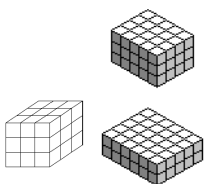
 모든 폴리큐브를 가지고 정해진 모양을 하나 만든 후 정육면체 조각이 적게 남으면 승!

준비하세요
폴리큐브
모든 조각
모노큐브 9개





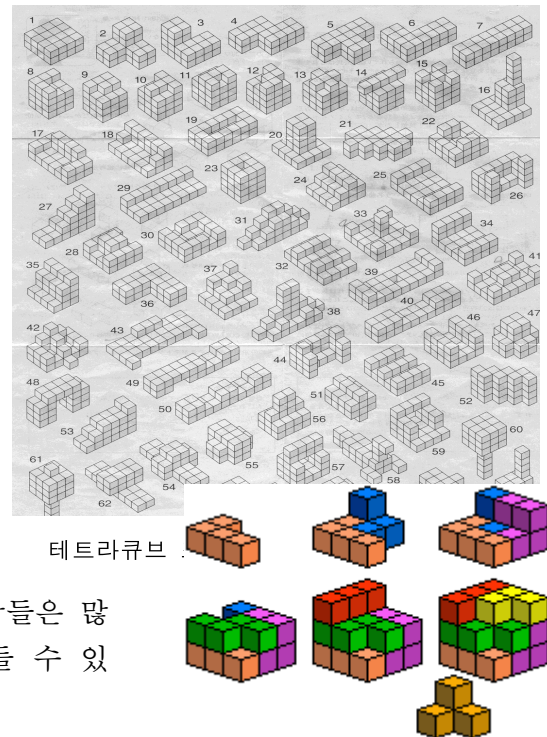
- 1) 폴리큐브 조각을 이용하여 수행할 수 있는 학습활동으로는 폴리오미노를 활용한 수업과 유사한 방식으로 진행할 수 있습니다.
- 2) 입체형이라 할지라도 1층으로만 배열한다면 폴리오미노를 활용한 학습을 그대로 할 수도 있습니다. 하지만 폴리큐브를 이용하면 평면으로만 제한하지 않고 자연스럽게 입체 구조물을 만들게 됩니다.
- 3) 아래의 각 단계는 처음에 유아 수준의 모양 만들기로부터 시작하지만 점차 도형 만들기로 나아감을 보여줍니다.

1단계: 일부만 사용하여 생활 속의 모양 만들기	2단계: 특정 조각만 사용하여 대칭 구조물 만들기 (예, 소마큐브로 면대칭 구조물 만들기)
 건물 뱀 묘비  소파 로봇 우물	 피라미드 침대 터널  시상대 목욕탕
3단계: 펜토미노를 이용한 입체형 알파벳 모양 만들기	4단계: 조각의 일부를 이용하여 직육면체 만들기
	
5단계: $K = \frac{\text{부피}}{\text{겉넓이}}$ 값이 최대인 입체도형 만들기	6 : 제한된 조각으로 $K = \frac{\text{부피}}{\text{겉넓이}}$ 값이 최대인 직육면체 만들기
$K = \frac{\text{부피}}{\text{겉넓이}}$ 값이 최대가 되려면 분자는 크고 분모는 작아야 한다. 그러려면 가능한 많은 조각을 사용하면서도 겉이 단조로운 직육면체 모양을 만들어야 함을 스스로 판단해 내어야 한다. (수준별 제작 가능)	모든 조각을 사용한 쌓기 나무 186개로는 정육면체나 직육면체가 만들어지지 않습니다. 5단계의 확장으로서 $K = \frac{\text{부피}}{\text{겉넓이}}$ 값이 가장 큰 경우를 만들되 가장 단순한 조각인 모노큐브(1), 디큐브(2), 일자형 트리큐브(3)만 제외하고 입체구조물을 만들려면 난이도는 매우 높아집니다.

- 4) 폴리큐브를 이용하여 만들 수 있는 가장 안정적인 도형은 직육면체입니다. 그러나 특

정한 이름을 갖는 조각들(예, 테트라큐브 8조각이나 입체형 펜토미노 12조각)을 모두 사용하여 직육면체 모양을 만드는 것은 쉽지 않은 작업입니다. 따라서 그 중 일부의 조각만 사용하여 직육면체를 만들어 보는 것도 필요합니다. 그러려면 직육면체가 되기 위해서는 몇 개의 조각이 필요한지도 생각해 보게 됩니다.

소마큐브는 정육면체 4개 이하의 조각들 중 3×3×3의 정육면체를 만들기 위해 있는 피에트하인이 특정한 7조각을 선택한 것입니다. 그런데 “왜 하필 그 7조각을 택했을까?”라는 질문에는 답을 해 주지 못하고 있습니다. 3×3×3의 정육면체를 만들 수 있도록 조합할 수 있는 조각들은 많기 때문입니다. 따라서 3×3×3의 정육면체를 만들 수 있는 변형 소마큐브도 충분히 가능합니다.



테트라큐브

소마큐브

5) 학습자의 수준에 따라 길넓이와 부피라는 수학적 내용 요소와 함께 분수의 특성을 이용한 사고력이 필요한 5단계($K = \frac{\text{부피}}{\text{길넓이}}$ 값이 최대인 입체 도형 만들기)를 게임 형식으로 제공할 수 있을 것입니다. 이는 부피가 일정할 때 길넓이를 최소로 하려면 구에 가까운 모양이어야 함을 시사해 주기도 합니다.

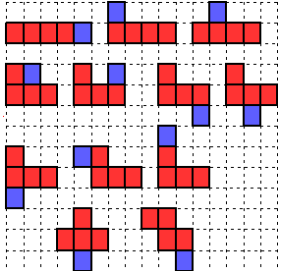
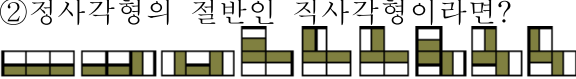
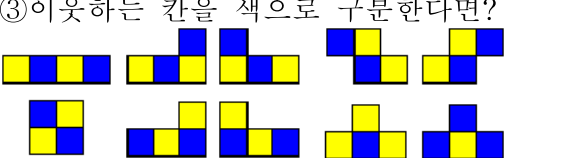
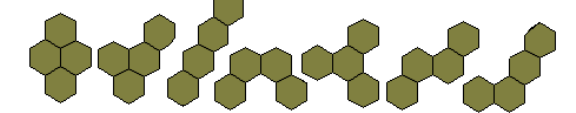
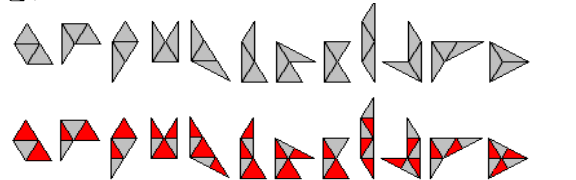
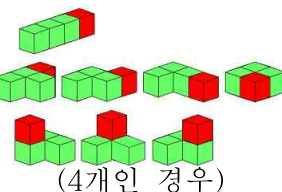
(참고) 조각의 모양과 개수를 제한하여

- (1) 정육면체 4개 이하로 이루어진 폴리큐브를 사용하기
 - (2) 폴리큐브 중 일부만 선택적으로 사용하기
 - (3) 정육면체 5개로 이루어진 펜타큐브만 사용하기
- 등으로 난이도별로 제한해 가는 것도 가능합니다.



4. 폴리오미노에 What if (not)? 전략을 적용하여 확장한 사례들

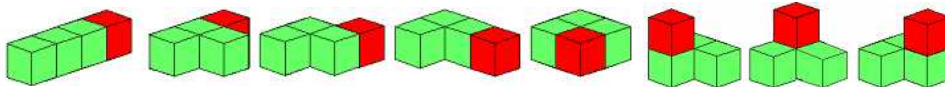
(※아래의 각 경우들을 자세히 보려면 <http://www.recmath.com/PolyPages/index.htm> 참고하세요.)

출발점 모양	What if (not)?	변형
(1)개수가 여러 개라면? omino (정사각형)  (4개인 경우)	①정사각형의 절반인 이등변 삼각형이라면?  ②정사각형의 절반인 직사각형이라면?  ③이웃하는 칸을 색으로 구분한다면?  ④모서리부분에 붙인다면? ⑤사각형의 각이 60-90-90-120이라면?	poyaboles polyares chequered polyforms polyplet polykite
(2)정사각형이 아니라면? iamond (정삼각형)  PISTOL RHOMBROID CLUB HEXAGON  BUTTERFLY SNAKE LOBSTER SHOE  CROWN BAT YACHT SPHINX (6개인 경우)	①정육각형이라면?  ②등변사다리꼴이라면?  ③정삼각형 3개를 일부 자른 것과 혼합하면?  ④선으로 표현한다면?	polyhexes polyhes polypon(30-30-120) polyedge
(3)입체라면? cube (정육면체)  (4개인 경우)	①정육면체를 만들 수 있을까?(27개의 큐브)  ②큐브의 조각들을 다른 모양으로 바꾸면?  ③정육면체의 절반인 직육면체라면? 	somacube 변형소마큐브 polybes
(4)기타	원이나 구를 여러 개 연결하여 붙인다면?	

학습 정리

1. 폴리큐브는 일정한 개수의 정육면체를 면끼리 붙여 만든 조각들입니다. 개수에 따라 모노큐브, 디큐브, 트리큐브, 테트라큐브, 펜타큐브, ...라고 부릅니다. 이 조각들을 만들 때는 증수로 구분하여 만들되 1층으로만 된 것은 폴리오미노와 똑같습니다. 따라서 폴리큐브를 활용한 활동은 평면도형의 폴리오미노를 활용한 탐구활동을 모두 포함하고 더 심화된 입체도형 활동으로 확장한 것입니다.

(예) 테트로미노와 테트라큐브



2. 폴리큐브 탐구활동에 들어있는 학습 요소로는 예상하기, 규칙 찾기, 기준에 따라 분류하기 같은 방법적인 요소와 공간 감각(지각, 변환), 겹넓이와 부피, 비율, 닮음과 같은 내용적 요소들이 있습니다. 그리고 3D블로커스와 같은 게임에서는 어떤 전략을 사용할 때 상대방의 수나 심리를 파악하는 판단력과 같은 종합적인 능력도 필요합니다.
3. 테트리스라는 게임에 사용되는 조각의 모양으로부터 그 개수를 늘린 폴리오미노로부터 시작하여 이 폴리오미노의 조건을 변경하면서 퍼즐을 확장해 나갈 수 있습니다. 이때 사용할 수 있는 한 가지 방법이 ‘What if (not)?’이라는 전략입니다.

폴리큐브의 종류를 자세히 알아 보려면 <http://www.recmath.com/PolyPages/index.htm> 참고하세요.

4. 이 중 폴리큐브를 활용한 학습을 단계별로 활용한 예는 다음과 같습니다.

1단계: 일부만 사용하여 생활 속의 모양 만들기
2단계: 특정 조각만 사용하여 대형 구조물 만들기(예, 소마큐브로 면대칭 구조물 만들기)
3단계: 펜토미노를 이용한 입체형 알파벳 모양 만들기
4단계: 조각의 일부(테트라큐브, 소마큐브, 펜타큐브)를 이용하여 직육면체 만들기
5단계: $K = \frac{\text{부피}}{\text{겹넓이}}$ 값이 최대인 입체도형 만들기
6단계: 제한된 조각으로 $K = \frac{\text{부피}}{\text{겹넓이}}$ 값이 최대인 직육면체 만들기

(참고) 조각의 모양과 개수를 제한하여

- (1)정육면체 4개 이하로 이루어진 폴리큐브를 사용하기
- (2)폴리큐브 중 일부만 선택적으로 사용하기
- (3)정육면체 5개로 이루어진 펜타큐브만 사용하기

등으로 난이도별로 제한해 가는 것도 가능합니다.



학습 평가

1. 연결큐브를 이용하여 앞, 옆, 위의 어떤 방향에서 보더라도 반드시 3층이 있도록 하려면 최소한 몇 개의 큐브가 필요합니까?

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

2. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 큐브를 면끼리 붙여 만든 폴리큐브 조각들을 일부 또는 전부 사용하여 만든 입체도형들 중에서 $K = \frac{\text{도형의부피}}{\text{도형의겉넓이}}$ 의 값이 최대인 경우의 겉넓이를 구하시오.

- ① 180 ② 186 ③ 192 ④ 202 ⑤ 208

3. 폴리오미노의 조건에 'What if (not)?' 전략을 사용하여 만든 여러 가지 퍼즐의 종류가 잘못 짝지어진 것은?

- ① 정사각형의 절반인 이등변삼각형이어붙이기 ▶ 폴리아볼스(polyaboles)



- ② 정사각형의 절반인 직사각형이어붙이기 ▶ 폴리아몬드(polyiamonds)



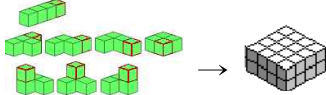
- ③ 정육각형을 4개 이어 붙인다면? ▶ 테트라헥스(tetrahexes)



- ④ 4개 이하의 큐브로 정육면체를 만들기 ▶ 소마큐브(somacubes)

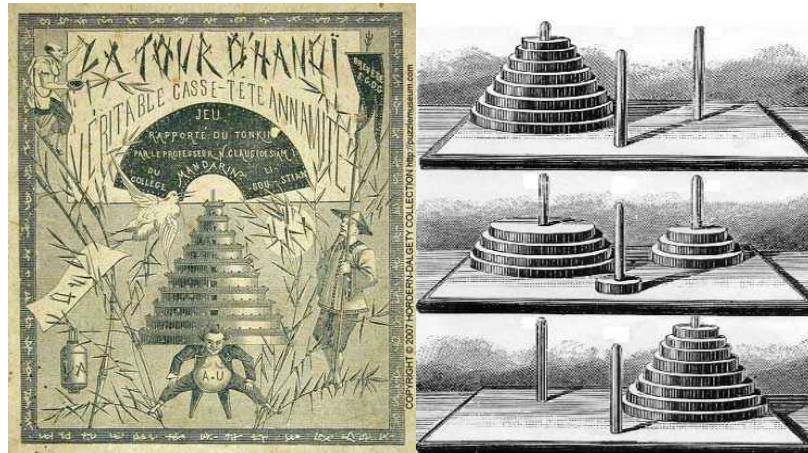


- ⑤ 4개의 큐브만으로 만든 서로 다른 조각들 ▶ 테트라큐브(tetracubes)



22차시: 하노이탑

학습 안내



http://www.puzzlemuseum.com/month/picm07/2007-03_Hanoi_1st_lab_375.jpg

바라문교와 관련하여 전해내려오는 하노이 탑의 전설은 이미 수학사의 고전이 되어있을 뿐만 아니라 현대의 영재들이 도전하고자 하는 좋은 과제로 수학과 정보과학 분야에서 자주 인용되는 주제입니다.

하노이 탑은 원래 레크리에이션 수학의 한 가지 유형에 속하는 전통적인 수리퍼즐의 일종이지만 그것을 다각도로 변형한 변형 하노이탑이 많이 개발되어 있습니다. 기존의 조건을 변형하여 끊임없이 새로운 문제를 만들어 보려는 이런 도전 정신은 리크리에이션 수학에서 추구하는 발명과 창조의 원동력이 됩니다.

이 활동을 통해 여러분들은 생활 속의 Recreation 속에 들어있는 수학적인 사실이나 규칙을 이해하고 그것을 변형하여 수학적인 Re-Creation을 해 보려는 수학적인 마음가짐(Mathematical Attitude)이 생겨나기를 희망합니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 이해)** 하노이탑 원판의 이동 규칙을 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. **(기능과 조작)** 원판의 개수와 기둥의 개수가 주어진 하노이탑을 실제로 옮길 수 있습니다.
3. **(수학적 사고)** 수학적 규칙과 수량들 사이의 관계를 추론할 수 있습니다.
4. **(태도와 의지)** 하노이탑에 담긴 여러 가지 수학적 성질을 찾고 문제를 해결하려는 태도와 호기심을 가지게 됩니다.



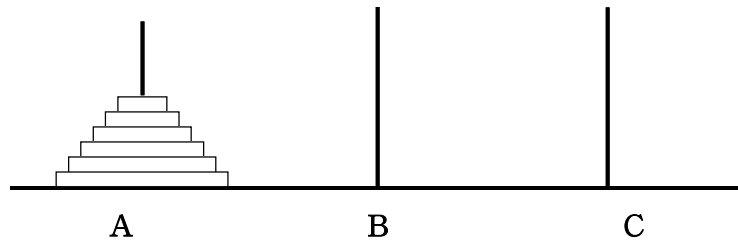
학습 내용

1. 하노이탑의 전설 따라잡기

하노이탑 모형(교구)을 활용하여 직접 실험해 봅시다.

1. (개인별로 실험 해보기) 하노이 탑 모형(교구)의 첫 번째 기둥(A)에 3개의 원판을 꽂고 이 원판을 모두 세 번째 기둥(C)으로 옮겨봅시다. 성공했다면 원판의 개수를 4개로 늘려 다시 시도하면서 자신이 원판을 옮긴 이동 횟수를 적어 봅시다.

- 원판의 개수가 3개일 때 자신이 원판을 옮긴 이동 횟수: ()회
- 원판의 개수가 4개일 때 자신이 원판을 옮긴 이동 횟수: ()회



2. (최소 이동 횟수 구하기) 원판의 개수가 3개, 4개일 때 원판의 최소 이동 횟수를 구하여 봅시다.

- 원판의 개수가 3개일 때 최소 이동 횟수: ()회
- 원판의 개수가 4개일 때 최소 이동 횟수: ()회

3. (하노이탑의 원판을 모두 옮기는 데 걸리는 시간을 개인별로 어렵하기)

하나의 원판을 옮기는데 1초가 걸린다고 가정할 때, 64개의 모든 원판을 옮기는데 걸릴 시간은 대략 얼마나 될지 예상하여 적어보시오.(정확한 값은 나중에 계산할 테니, 지금은 자세히 계산하지 말고 어려운 시간을 10초 이내로 쓸 것!!)

- 예상하는 시간: 약 _____(시간, 일, 년)

(필요한 단위까지 직접 표시하거나 쓰되 초단위로 쓰지 마시오)

2. 하노이탑의 원판을 옮기는 규칙 속의 아름다움

원판은 작은 것부터 1, 2, 3, 4, ...로 나타내고 기둥은 A, B, C의 번호를 매겨 움직이는 원판의 번호와 옮겨가는 기둥의 번호를 기록하면서 **발견한 규칙을 찾아봅시다.**

원판 개수	목적지: C 기둥, 움직이는 원판의 번호는 1, 2, 3....으로, 옮겨간 기둥의 번호는 A, B, C로															각 원판이 옮겨지는 횟수					옮겨간 기둥			계
																1	2	3	4	5	A	B	C	
1	1															1					0	1	1	1
2	1	2	1													2	1				0	1	2	3
3	1	2	1	3	1	2	1									4	2	1			1	2	4	7
4	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	8	4	2	1		3	5	7	15
5																								
6																								
(원판)																								
(기둥)																								

(발견한 규칙)



3. 문제를 풀어 봅시다.

1.(계산하기) 하나의 원판을 옮기는데 1초가 걸린다고 가정할 때, 64개의 원판을 모두 옮기는데 걸리는 시간은 실제로 얼마인지를 직접 계산하시오.(계산기 사용 가능)

(해설) 원판이 하나씩 늘어날 때마다 시간은 이전의 두 배씩 늘어난다. 즉, n 개의 원판을 이동하는 최소 이동횟수를 a_n 이라 하면, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($a_1 = 1$). $a_n = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
 답은 $2^{64} - 1$ (초)이지만 이를 년으로 계산해야 하는데 12자리 정도밖에 안 나타나는 보통의 전자계산기로는 직접 계산이 불가능하다. 따라서 $2^{10} = 1024$ 라는 사실을 응용하여 계산이 가능한 값으로 변환하여 처리할 필요가 있다. 즉, $2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 = 16 \times (1,024)^6 \times 10^{18}$ 처럼 소수점을 이용하여 계산하면 $(18.4467440737) \times 10^{18}$ (초)와 같이 오차에 영향을 덜 받는 뒷자리는 수는 사라지더라도 앞자리 수는 그대로 나타낼 수 있다. 이를 년으로 환산하면 약 ()년이 된다.

2.(전설의 성취여부) 과연 하노이 탑의 전설은 이루어졌나요?

(해설) [아직도 이루어지지 않았다.(Not Yet!)]

3.(문제해결) (여러 가지 가설에 따라 다르지만 일단) 우주는 150억년, 지구는 45억년, 인류는 1만년의 역사를 가진다고 합시다. 우주, 지구, 인류, 그리고 내가 탄생한 이래로 64개의 원판 중 아직 한 번도 움직이지 않은 원판은 각각 몇 개나 될지 구하시오.(모두이 나 짝끼리 분담하여 이 중 하나씩만 구해도 됨)

시점을 기준으로	(1) 30년	(2)인류 1만년	(3)지구 역사 45억년	(4)우주 탄생 150억년
초로 계산	9.46억(초)	3조1536억(초)	14경1912조(초)	47경3040조(초)
(비교값)	$2^{30} = 10억7374만1824$	$2^{40} = 1조0995억162만7776$	$2^{60} = 115경2921조$	$2^{60} = 115경2921조$
현재 움직이고 있는 원판의 번호는?				
아직 한 번도 움직이지 않은 원판의 개수는?				

Think+

$1 = 365(\text{일}) \times 24(\text{시간}) \times 60(\text{분}) \times 60(\text{초}) = 31536000 = 0.315 \times 10^8 = 0.315\text{억}(\text{초})$ 이므로 10년은 약 3.15억(초)이다. 30개의 원판을 옮기는 데 $2^{30} - 1 \approx 1024 \times 1024 \times 1024 \approx 1.07 \times 10^9$ (초), 즉 10.7억초는 대략 30년 이상이다.

n 개의 원판을 옮기는데 걸리는 시간과 $n-1$ 개의 원판을 옮기는데 걸리는 시간을 비교해 보자.

학습 정리

1. 원판의 최소이동 횟수는 $a_n = 2^n - 1$ 인

하노이 탑은 3개의 기둥에 크기가 다른 64개의 원판을 한 기둥에 끼워넣고 작은 원판이 큰 원판보다 항상 위에 놓이도록 하면서 원판을 하나씩 움직여 모두 다른 기둥으로 옮기는 인도의 바라문교 전설에서 기원한 수리퍼즐 교구이다. 많은 학생들이 원판이 n 개일 때의 최소이동 횟수 ($a_n = 2^n - 1$)는 알고 있지만 그것을 시간으로 표현하거나 실제로 옮기는 방법, 그리고 그와 관련된 다양한 문제해결에는 익숙하지 않다.

2. 각 원판의 번호가 옮겨가는 순서는 프랙털

하노이탑의 각 원판을 옮길 때 움직이는 원판의 순서를 아래와 같이 표로 나타내면 좌우의 대칭형일 뿐만 아니라 프랙털(자기동형과 무한반복성)이 나타나고 있다.

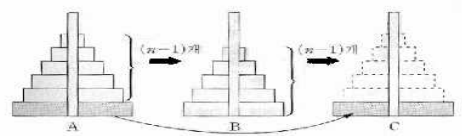
5번															5																		1
4번							4												4														2
3번				3							3							3								3							4
2번		2			2			2				2				2			2			2			2				2				8
1번	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	16	
순서	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	31	

이를 통해 원판의 개수가 n 일 때 1번부터 n 번까지 각 원판이 움직이는 횟수를 모두 합하면 다음과 같다.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

3. 각 원판이 옮겨가는 기둥의 번호는 원판의 개수에 따라 반복

원판의 개수(n)가 홀수일 때 홀수번째 원판들은 모두 처음부터 목표 기둥(C)으로 가야하고 이를 위해서는 짝수번째 원판들은 중간 기둥(B)에 비켜 있어야 한다. 마찬가지로 원판의 개수(n)가 짝수일 때는



짝수번째 원판들은 모두 처음부터 목표 기둥(C)으로 가야하고 이를 위해서는 홀수번째 원판들은 중간 기둥(B)에 비켜 있어야 한다. 원판들이 놓인 위치에 따라 목표기둥과 중간기둥의 역할은 바뀔 수 있다. 즉, 아래 그림에서 B기둥으로 옮겨간 $n-1$ 개의 원판들은 이제 B기둥에서 C기둥으로 옮겨가야 한다. 따라서 처음 절반 동안은 목표점이 C에서 B로 바뀌었고, 절반이후로는 시작점이 A에서 C로 그 역할이 바뀐다.

4. 참고문헌/참고사이트

특허청(2009). **발명으로의 몰입 2.0**.(고급) 학생용.

참고 자료



1. 지음, 서혜영 옮김(2003). 하노이의 탑. 도서출판 해나무.
2. 하노이 탑의 유래
http://kin.naver.com/open100/db_detail.php?d1id=11&dir_id=110203&eid=2xIVb96/EVaoAR/QPT2zWuSWerrusLIR&_url=L29wZW4xMDAvZGlyX2pc3QucGhwP2Rpd9pZD0xMTAyMDM=
3. 하노이탑의 의미와 수학적 원리
http://kin.naver.com/db/detail.php?d1id=9&dir_id=90207&eid=04hgxcWc79rWG4BcrTE2WjchcBXlha/N



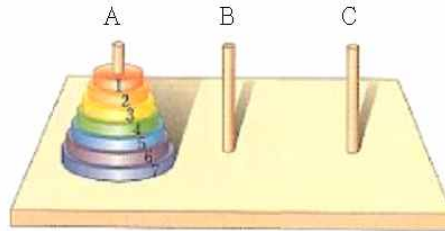
학습 평가

1. 기둥이 3개인 하노이탑의 한 기둥에 크기가 다른 60개의 원판이 꽂혀 있다고 하자. 원판을 1초에 하나씩 옮긴다고 할 때 60개를 모두 옮기는 데 걸리는 시간으로 가장 가까운 것은?

- ① 1년 ② 365년 ③ 365억년 ④ 1000억년 ⑤ 5849억년

2. 기둥이 3개인 하노이탑의 크기가 다른 원판 7개가 A기둥에 꽂혀있다. 작원 원판부터 1, 2, 3, ...의 번호를 매겨서 하나씩 모두 C기둥으로 최소이동횟수로 옮겨갈 때 100번째의 이동은 몇 번째 원판이고 어느 기둥으로 옮겨가는지 바르게 짚지은 것은?

	원판의 번호	-	기둥의 번호
①	1	-	A
②	2	-	B
③	3	-	A
④	4	-	B
⑤	5	-	C

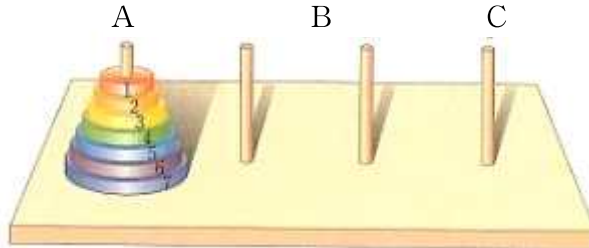


3. 기둥이 3개인 하노이탑의 한 기둥에 64개의 절반인 32개의 원판이 꽂혀있다고 하자. 1초에 하나씩 옮긴다고 가정할 때 10년이 지나도록 아직 한 번도 움직이지 원판의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

23차시: 하노이탑을 통한 규칙성 지도

학습 안내



<당신은 바라문교의 현자로 부름 받았다.>

1 현자는 기둥이 3개인 하노이탑의 원판 64개를 모두 옮기는 데 걸리는 시간이 5849억년이라고 이론적으로만 계산해 내고 그 원판을 실제로 옮기는 방법을 탐구했지만 64개의 원판을 모두 옮기지는 못하고 죽었다.

그 후 2대 현자가 나타났다. 그는 원판을 더 빨리 옮기기 위해 무공을 수련하기로 했다. 그 결과 1초에 1000개를 옮길 수 있는 염력이 생겼다. 그러나 시간은 겨우 1/1000로 줄일 뿐이었다. 2대 현자는 인간 몸의 한계를 느끼고 고생만 하다 죽었다.

3대 현자가 나타났다. 그는 신을 직접 만나기 위해 영성훈련을 했고 그 결과 신을 만났다. “신이시여 우리에게 자비를 베푸소서. 이 원판의 개수는 너무 많으니 당신을 감탄하는 중생들을 위해 원판을 줄이는 것이 가능할지요?” 신은 “내가 중생들에게 자비를 베푸노라.”고 하면서 제언에 동의했다. 3대 현자는 원판을 하나 줄일 때마다 시간이 절반으로 줄어들지만 여전히 너무나 많은 시간이 걸린다는 것을 알았다. 그래서 다시 말했다. “우리의 고생함이 너무 심하니 원판을 10개, 아니 20개 줄여주시는 것도 가능한지요?” 신은 흔쾌히 승낙했다. “30개? 아니, 확 절반으로 줄여 32개라면?” 갑자기 욕심이 생기자 현자는 신으로부터 확답을 듣지 못했다. “그렇다면 한 번만 더 용서하소서. 원판 64개의 개수는 그대로 두되 원판을 한꺼번에 2개씩 옮길 수도 있도록 허락해 주시면 안될까요?” 신은 승낙했다. 하지만 이 현자가 살아있는 동안 아직도 그 전설은 이루어지지 않았다.

4대 현자가 나타났다. 그도 역시 신을 찾아갔다. 신이 먼저 물었다. “내가 네게 무엇을 하여 주기를 원하느냐?” 4대 현자는 조용히 말했다. “신이시여, 원판의 개수를 줄여지도 말고 원판도 하나씩 원래대로 옮기겠습니다. 다만 이곳 당신의 보좌 옆에 기둥을 하나만 더 만들어 두시고 제가 이곳에 왕래하면서 그 4번째 기둥도 사용할 수 있게 해주소서.”

그러하여 하노이탑의 전설은 신의 보좌 옆에 만든 4번째의 새로운 기둥을 사용하니 금세 임무를 완수할 수 있을 것 같았다. 걸리는 시간은 대략 5시간보다 조금 더 될 것으로 추측했다.

그렇다면 그 원판들을 실제로 어떻게 옮기자? 어떤 원판을 어떤 기둥으로 옮겨야 한단 말인가? 원판을 실제로 옮길 수만 있다면, 당신이 바로 바라문교의 새로운 현자가 된다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) 하노이탑 원판의 이동 규칙을 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. (기능과 조작) 원판의 개수와 기둥의 개수, 그리고 원판을 옮기는 규칙이 정해지면 그 하노이탑을 실제로 옮길 수 있습니다.
3. (수학적 사고) 수학적 규칙과 수량들 사이의 관계를 추론할 수 있습니다.
4. (태도와 의지) 하노이탑에 담긴 여러 가지 수학적 성질과 변형 하노이탑을 탐구하려는 태도와 호기심을 가지게 됩니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 하노이탑 전설 소개

아래와 같은 적절한 Math Fiction을 구성하여도 좋다.

(Math Fiction)

多神의 대표적인 나라인 일본에는 1백만의 신이 있다고 하지만 인도에는 1억 이상의 신이 있다. 그 중 한 신을 믿는 인도의 바라문교에는 다음과 같은 전설이 전해지고 있다.

“우리의 신이 천지와 인간을 만든 후 그것을 기념하여 갠지즈 강변에 3개의 큰 다이아몬드 기둥을 세우고 64개의 황금원판을 만들어 가운데 부분에 똑같은 크기의 구멍을 뚫어 한 기둥에 꽂아 두었다. 신은 안식여행을 떠나면서 인간에게 독수리처럼 하늘을 날 수 있는 날개나 코끼리처럼 무거운 물건을 들 수 있는 힘은 주지 않았지만 당면한 문제를 해결할 수 있는 지혜와 함께 신을 만날 수 있는 영성을 주었다고 한다. 인간들이 이 원판을 모두 다른 기둥으로 옮기는 그 날에 신은 다시 이 땅에 내려와 인간을 맞이할 것이며 인간과 함께 영원히 살기로 약속했다.”

이 전설이 언제 이루어질 지는 간단한 수학 계산만으로도 가능하지만 그것의 실제적 성취를 바라는 바라문교의 사람들은 그 원판을 실제로 옮겨야 한다. 그런데 문제는 아래에 놓인 황금 원판들은 보통의 사람이 들 수 있는 무게가 아니어서 실제로 그것들을 다 옮기는 데는 이론적인 계산보다 더 많은 시간이 걸린다는 것이다. 이제 여러분의 지식과 지혜, 그리고 영성을 활용하여 이 바라문교가 당면한 문제를 해결해 주길 바란다.

[주의] 하노이탑의 전설이 이루어지기까지 걸리는 시간은 교사가 직접 알려주기보다 학생들이 탐구한 후 직접 계산해 보도록 한다.

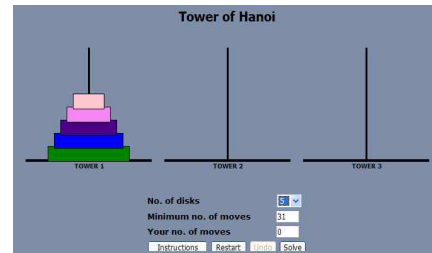
Think⁺ 이 하노이탑의 전설은 실제로 이루어졌을까? 그렇지 않다면 그 원인은 무엇이라고 생각하는가?

2. 하노이탑 교구 탐색

1) 하노이탑 전설이 이루어지기까지 어느 정도의 시간이 걸릴지를 먼저 1분 동안만 대략 예상하여 학습지에 기록하고, 그것을 발표하도록 하여 몇 가지의 추측하는 값들을 칠판에 적어둔다.

2) 나머지 사람들도 자신이 생각하는 가장 가까운 값에 손을 들도록 하여 통계조사를 실시하고 나중에 실제로 계산한 값과 얼마나 차이가 있는지를 확인해 보도록 한다.

3)(개별 대항) 기둥이 3개, 원판이 4~5개인 웹프로그램을 프로젝터를 사용하여 화면으로 띄워놓고 각 학생들에게 컴퓨터와 빨리 옮기기 시합을 하면서 원판을 옮기는 규칙을 찾아야 할 필요를 느낀다.



<http://people.revoledu.com/kardi/tutorial/ReinforcementLearning/Tower-of-Hanoi-Game.htm>

4) 원판의 개수가 많으면(5개 이상) 그 원판들을 실제로 옮기기 힘들므로 복잡한 경우는 단순화(원판이 3개)하여 생각해 보도록 한다.

5) 표를 통해 귀납 추측한 값은 불완전하므로 일반적인 관계식(점화식)을 찾아보도록 한다.

3. 모둠별로 토론하며 상호 가르치기

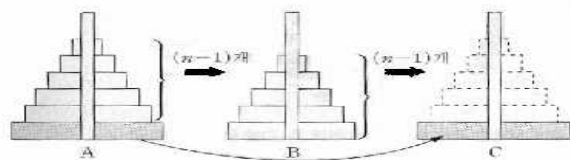
1) (모둠별 대항) : 지정한 원판(기둥)의 개수를 이용하여 각 조원들이 모두 해결(가장 느린 한 사람을 제외할 수도 있음)하는 데 걸린 시간 순으로 승패를 결정한다.

2) 개인적으로 빨리 완성하는 것보다 느린 사람이 더 늦지 않도록 서로 협력하여 도와주어야 한다. 이를 위해서는 원판을 옮기는 원리를 다른 사람에게 설명할 수 있어야 한다.

정보 더하기

Information

□ 개수를 n 이라 할 때 최소이동횟수를 a_n 이라고 하자. n 개의 원판을 옮기려면 위쪽에 있는 $(n-1)$ 개의 원판을 모두 다른 막대로 옮긴 후에 맨 아래 원판을 빈 막대로 옮기고, 다시 그 위에 $(n-1)$ 개의 원판을 옮겨 놓으면 된다. 곧, n 개의 원판을 이동하는 방법을 다음과 같다.



{A→B로 $(n-1)$ 개 이동} + {A→C로 1개 이동} + {B→C로 $(n-1)$ 개 이동}

이것을 식으로 나타내면, $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2), a_1 = 1$ 이므로 $a_n = 2^n - 1$ 이 됨을 알 수 있다. (출처: http://www.aistudy.co.kr/problem/hanoi_tower.htm)

- 1) 움직이는 원판의 번호와 각 원판이 옮겨가는 기둥을 기호화하여 나타내어 보면서 최소이동횟수(畵)보다는 원판을 옮기는 방법에 주목하도록 한다.
- 2) 원판의 번호에서는 프랙털의 아름다움과 이를 통한 최소이동횟수를, 기둥의 번호에서는 기둥 관계식의 규칙을 먼저 찾고 이를 통한 최소이동횟수를 각각 구할 수 있도록 한다.

Information

[illegible]
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

n번째 원판이 C기둥으로 가려면 n-1번째 원판은 B기둥에 비껴있어야 한다. 그렇다면 그 위의 원판과 또 그 위의 원판은 어디에 가 있어야 하는가? 결국 첫 번째 원판은 어느 기둥으로?

예를 들어, 원판이 5개일 때 처음 4개를 옮기는 동안에는 A는 고정, B와 C의 역할이 바뀌어 옮긴 다음 가운데의 가장 큰 원판은 C로 옮기고 나서, 원판이 4개일 때 A에서 C로 옮기던 것을 B에서 C로 옮기는 경우로 생각해야 한다. 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

원판 개수(n)	옮겨가는 기둥의 번호	각 기둥으로 옮기는 횟수			계
		A_n	B_n	C_n	
3	CBBCACC BCCBABBBCCAACBCC →	1	2	4	7
4	CBBCACCBBAABCBBCCACCABAACCBBCACC	3	5	7	15
5		8	10	13	31
6	BCCBABBBCCAACBCCBABBBACAABBCCBABBBCCAACB.....	18	21	24	63

이제 원판의 개수가 n일 때 A, B, C기둥으로 옮겨가는 원판의 개수를 각각 A_n , B_n , C_n 이라 하면 다음과 같다.

$$A_{n+1} = A_n + B_n$$

$$B_{n+1} = A_n + C_n$$

$$C_{n+1} = B_n + C_n + 1$$

이를 엑셀 프로그램을 이용하여 나타내어 보면 원판의 개수가 많아지면 결국 A, B, C의 세 기둥으로 골고루 분포하면서 1계차와 2계차가 거의 일정함을 알 수 있다.

A_n	B_n	C_n	S_n	$A_n - A_{n-1}$	$E_n - E_{n-1}$	$B_n - B_{n-1}$	$G_n - G_{n-1}$	$C_n - C_{n-1}$	$I_n - I_{n-1}$	C_n / S_n
0	0	1	1	A_n의 1계차	A_n의 2계차	B_n의 1계차	B_n의 2계차	C_n의 1계차	C_n의 2계차	1
0	1	2	3	0	1	1	1	1	1	0.666667
1	2	4	7	1	1	1	0	2	1	0.571429
3	5	7	15	2	1	3	2	3	1	0.466667
8	10	13	31	5	3	5	2	6	3	0.419355
18	21	24	63	10	5	11	6	11	5	0.380952
39	42	46	127	21	11	21	10	22	11	0.362205
81	85	89	255	42	21	43	22	43	21	0.34902
166	170	175	511	85	43	85	42	86	43	0.342466
336	341	346	1023	170	85	171	86	171	85	0.338221
677	682	688	2047	341	171	341	170	342	171	0.336102
1359	1365	1371	4095	682	341	683	342	683	341	0.334799
2724	2730	2737	8191	1365	683	1365	682	1366	683	0.334147
5454	5461	5468	16383	2730	1365	2731	1366	2731	1365	0.333761
10915	10922	10930	32767	5461	2731	5461	2730	5462	2731	0.333567
21837	21845	21853	65535	10922	5461	10923	5462	10923	5461	0.333455
43682	43690	43699	131071	21845	10923	21845	10922	21846	10923	0.333399
87372	87381	87390	262143	43690	21845	43691	21846	43691	21845	0.333368
174753	174762	174772	524287	87381	43691	87381	43690	87382	43691	0.333352
349515	349525	349535	1048575	174762	87381	174763	87382	174763	87381	0.333343
699040	699050	699061	2097151	349525	174763	349525	174762	349526	174763	0.333338
1398090	1398101	1398112	4194303	699050	349525	699051	349526	699051	349525	0.333336
2796191	2796202	2796214	8388607	1398101	699051	1398101	699050	1398102	699051	0.333335
5592393	5592405	5592417	16777215	2796202	1398101	2796203	1398102	2796203	1398101	0.333334
11184798	11184810	11184823	33554431	5592405	2796203	5592405	2796202	5592406	2796203	0.333334
22369608	22369621	22369634	67108863	11184810	5592405	11184811	5592406	11184811	5592405	0.333334

즉, n이 홀수일 때는 $A_{n+2} - A_{n+1} = A_{n+1} - A_n$ 이고

n이 짝수일 때는 $A_{n+2} - A_{n+1} = A_{n+1} - A_n - 1$ 이다.

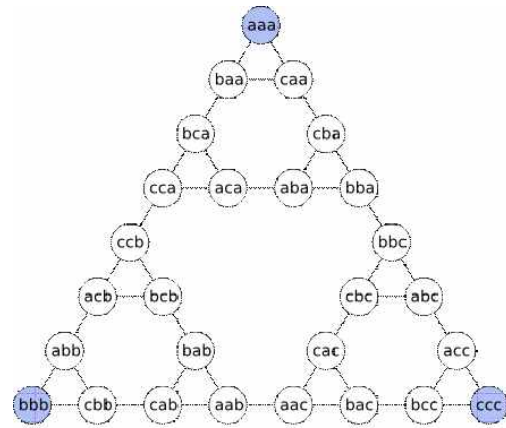
이들은 특성방정식을 이용하여 풀면 일반항을 구할 수 있다.



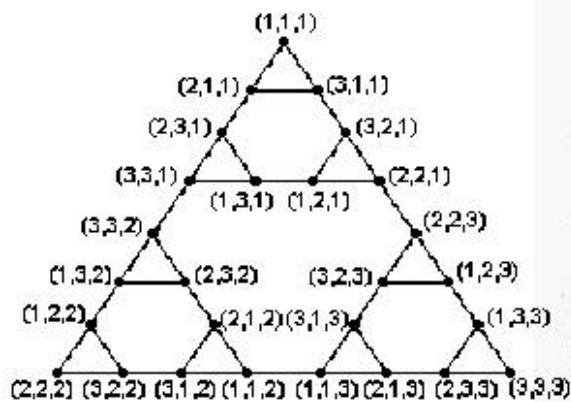
Think* 점화식을 푸는 특성방정식에 대해 알고 있는가?

5. 하노이 탑의 해명도(해법) 찾기

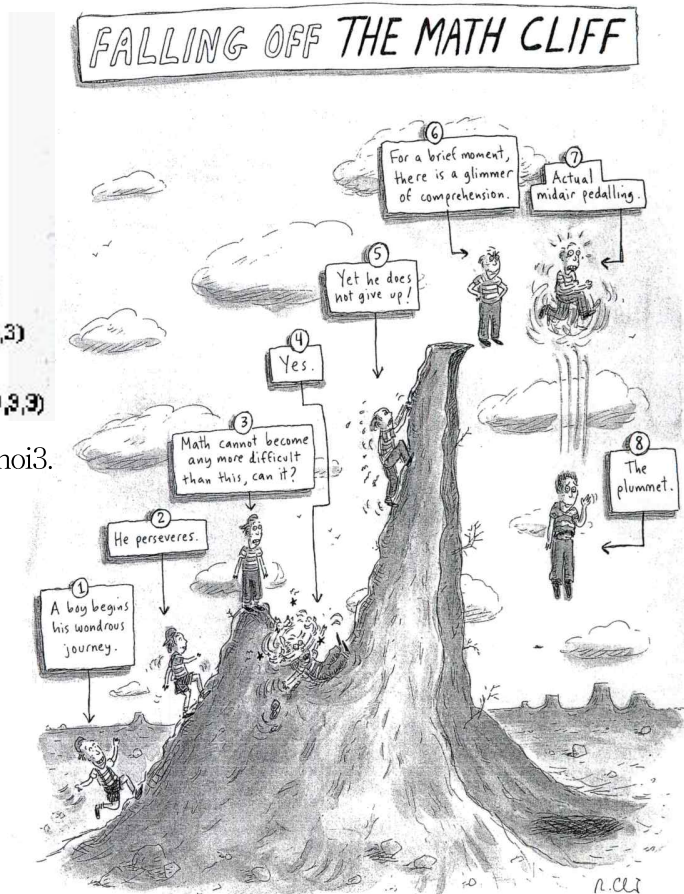
1) 다음은 원판이 3개일 때 각 원판들이 위치할 수 있는 기둥을 각각 그림과 기호로 표시한 것이다. 따라서 원판을 모두 A기둥에서 C기둥으로 옮긴다면 AAA에서 CCC로 이동하는 최소경로를 따르면 되므로 맨 오른쪽 선분을 따라 이동한 7회이다.



http://psycnet.apa.org/journals/amp/48/1/images/amp_48_1_35_fig2a.gif



<http://www.cut-the-knot.org/triangle/hanoi3.gif>



http://math.ucr.edu/home/baez/math_cliff.jpg

※(수학적 표현과 처리의 아름다움) 원판과 기둥에 각각 차례대로 번호를 매겨 움직이는 원판의 번호와 옮겨가는 기둥의 번호를 기록하면서 발견한 규칙을 찾아봅시다.

(인접 통행 하노이 탑: $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$)

1. 3개의 기둥 A, B, C 중에 맨 왼쪽(A)에 4개의 원판이 꽂혀있습니다. 원판을 옮길 때는 바로 이웃하는(인접하는) 기둥으로만 옮길 수 있다고 합니다. 즉, A와 C간에는 왕래할 수 없습니다. 개의 원판을 모두 B기둥으로 옮길 때와 C기둥으로 옮길 때의 최소이동횟수(, Q_n)와 규칙(관계식)을 찾아보시오.

원판개수	B기둥으로 옮길 때의 최소이동횟수(P_n), 움직이는 원판의 번호는 1, 2, 3....으로, 옮겨간 기둥의 번호는 A, B, C로																								각 원판이 옮기는 횟수					옮겨간 기둥			계																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
	1 0				2 0				3 0				4 0				5 0				6 0				1	2	3	4	5	A	B	C																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
1	1 B																								1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									</

원판개수	C기둥으로 옮길 때의 최소이동횟수(Q_n), 움직이는 원판의 번호는 1, 2, 3....으로, 옮겨간 기둥의 번호는 A, B, C로																								각 원판이 옮기는 횟수					옮겨간 기둥			계				
	1 0				2 0				3 0				4 0				5 0				6 0				1	2	3	4	5	A	B	C					
1	1 1																												2					1	1		2
	BC																																				
2	1 1 2 1 1 2 1 1																												6	2				1	4	3	8
	BCBBACBC																																				
3	1 1 2 1 1 2 1 1 3 1 1 2 1 1 3 1 1 2 1 1 2 1 1																												18	6	2			5	13	8	26
4																																					

(발견한 규칙)

2. 원판 개당 1초가 걸린다고 할 때, 64개의 원판을 모두 옮기는 데 걸리는 시간을 구하고, 이를 전통 하노이탑의 경우와 비교하시오

[illegible]

원판개수	목적지: C 기둥, 방향: A→B→C , 움직이는 원판의 번호는 1, 2, 3....으로, 옮겨간 기둥의 번호는 A, B, C로																																																												각 원판이 옮겨지는 횟수					옮겨간 기둥			계																				
	1 0										2 0										3 0										4 0										5 0										6 0										1	2	3	4	5	A	B	C																					
1	1 1 BC																																																																						2						1	1	2										
2	1 1 2 1 2 1 1 BCBACBC																																																																						5	2					1	3	3	7									
3	1 1 2 1 2 1 1 3 1 1 2 1 1 3 1 1 2 1 2 1 1																																																																						14	5	2				5	8	8	21									
4																																																																																									
5																																																																																									



6. 하노이 탑의 원판을 옮기는 데 걸리는 시간 계산하고 문제해결하기

- 1) 하나의 원판을 움직이는 데 1초가 걸린다고 가정하고 64개의 원판을 모두 옮기는 데 걸리는 시간을 년으로 직접 계산해 보도록 하자.
- 2) 12자리값까지 나타나는 전자계산기를 사용하여, 계산의 범위를 초과하는 2^{64} 을 계산할 수 있는 방법은?

정보 더하기

Information

□ 답은 $2^{64} - 1$ (초)이지만 이를 년으로 계산해야 하는데 12자리정도밖에 안 나타나는 보통의 전자계산기로는 직접 계산이 불가능하다. 따라서 $2^{10} = 1024$ 라는 사실을 응용하여 계산이 가능한 값으로 변환하여 처리할 필요가 있다. 즉, $2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 = 16 \times (1.024)^6 \times 10^{18}$ 처럼 소수점을 이용하여 계산하면 $(18.4467440737) \times 10^{18}$ (초)와 같이 오차에 영향을 덜 받는 뒷자리는 수는 사라지더라도 앞자리 수는 그대로 나타낼 수 있다. 이를 년으로 환산하면 약 5849억년이 된다. 따라서 하노이탑의 전설은 아직 성취되지 않았음을 알 수 있다.

- 3) 시간을 달리하면서, 우주 150억년, 지구 45억년, 인류 1만년, 그리고 고등학교 1학년(18살)의 역사 동안 64개의 원판 중 아직 한 번도 움직이지 않은 원판의 개수를 구해보도록 한다.(모듬이나 짝끼리 분담하여 이 중 하나씩만 구하고 그값을 서로 비교해 보아도 됨)
참고로, 1년=365(일)*24(시간)*60(분)*60(초)=31536000(초), 약 0.315억(초)이고, 1억년은 $3153.6 \times 10000 \times 10000 \times 10000$ (초), 약 3153경(초)이다. $2^{10} = 1024$ 이므로 원판의 개수가 10개 더 늘어도 시간은 약 1000배(세 자리 수)만 증가한다.

시점을 기준으로	나의 탄생 후 (18)년	인류 1만년	지구 역사 45억년	우주 탄생 150억년
계산	5억6744만(초)	3조1536억(초)	14경1912조(초)	47경3040조(초)
비교값	$2^{30} = 10$ 억 7374만 1824	$2^{40} = 1$ 조 0995억 1162만 7776	$2^{60} = 115$ 경 2921조	$2^{60} = 115$ 경 2921조
현재 움직이고 있는 원판	28번을 지나 29번째 원판이 움직이고 있음	40번째를 지나 41번째 원판이 움직이고 있음	2^{60} (초)의 1/8에 못 미치므로 56번째 원판	2^{60} (초)의 1/4을 지나므로 58번째 원판
아직 한 번도 움직이지 않은 원판의 개수	35	23	8	6

□ 주의: $a_n = 2^{n+1} - 1$ (초)이므로 40개의 원판을 모두 옮기는 데 $2^{41} = 2$ 조 2천억(초)가 걸림.

07. 변형 하노이탑 탐색

- 1) 'What if~(not)?'이라는 기법을 활용하여 변형하노이탑을 만든 몇 가지 사례를 소개한다.
[참고자료 다운]
- 2) 변형 하노이탑을 사용하여 만들 수 있는 수학 문제를 만들어 보도록 한다.
- 3) 변형 하노이탑을 만들 때 재미뿐만 아니라 수학적 아이디어와 철저한 분석이 중요함을 강조한다.

생각 더하기

Question

- ▶ 'What if~?' 또는 'What if~not?' 전략이란 무엇인가?
- ▶ 변형하노이탑을 활용한 게임 규칙이나 조건을 바꾸어 새롭게 변형해 볼거리가 있는지 찾아보자.
- ▶ 변형 하노이탑을 만들고자 할 때 무엇을 바꿀 것인가?



학습 정리

1. 하노이탑의 전설이 이루어지기까지 걸리는 시간을 계산하는 것도 중요하지만 실제로 하노이탑을 옮길 때 원판이 옮기는 순서와 옮겨가는 기둥의 번호를 직접 적어보면 그 속에서 신비로운 수학적 규칙과 다양한 성질들을 찾을 수 있다. 수학영재들이 최소이동횟수는 쉽게 계산해 내지만 원리를 알지 못하면 실제로 원판을 옮기는 데는 많은 어려움을 겪을 수 밖에 없다. 따라서 계산값보다는 원판을 옮기는 원리에 대한 탐구가 중요하다.
2. ‘What if ~(not)’의 전략을 사용하면 다양한 변형 하노이탑을 만들 수 있다. 귀납과 연역, 유추, 일반화 및 발전적인 생각 등의 수학적인 생각을 유발하면서 옮기는 원판의 번호와 옮겨가는 기둥의 번호를 탐구해 보면 수학적인 규칙과 질서의 아름다움을 느낄 수도 있고, 해법에 대해서는 왜 그런지 이유를 따져 물어보려는 태도를 형성하는데 유용하게 사용할 수 있다.
3. 변형 하노이탑 중 기둥이 4개인 하노이 탑에 대해 귀납적으로 추측한 일반화는 존재하지만 그것의 수학적인 일반해법은 아직 증명되지 않아서 영재들을 위한 ‘골드바하의 추측’이나 ‘페르마의 마지막 정리’ 처럼 수학사의 한 가지 소재로 활용할 수 있다.

4. 참고문헌/참고사이트

특허청(2009). **발명으로의 물입 2.0**.(고급) 학생용.

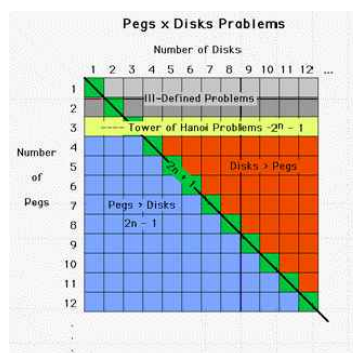
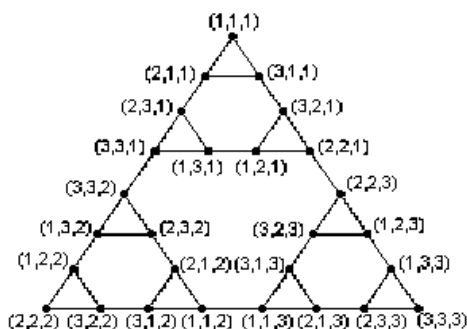
하노이의 탑 변형 퍼즐

http://kin.naver.com/bridge.php?type=rd&rd_i=i:100000506&rd_c=c:37932&ret_url=aHR0cDovL2tpbi5uYXZlcj5ib2V3BlBjEwMC9kY19kZXRhaWwucGhwP2QxaWQ9MlEmZGlyZ2kPTExMDIwMyZlaWQ9anVXOGppWQdrVlZ66kZjTEUvdC94aXNhMBVNakN0bmks

하노이탑을 옮기는 과정을 프랙털로 표현한 그림(영국의 수학자 ‘이언 스튜어트’가 제안한 풀이법)

http://kin.naver.com/db/detail.php?dId=11&dir_id=110203&eid=BLqoy8mABEQ2BFRaxyUuzYpO7ZSFS

2진코드를 그레이코드로 변환하는 과정 <http://ns.shingu-c.ac.kr/~nsbaek/comp/gray.htm>





학습 평가

1. 하노이탑을 지도하는 활동으로 가장 거리가 먼 것은?

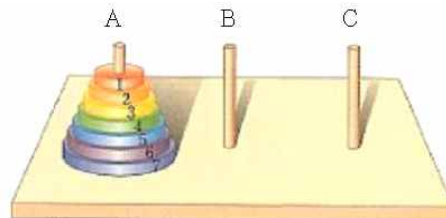
- ① 하노이탑의 전설을 통해 흥미를 유발하면서 그 전설이 이루어지기까지 걸리는 시간을 확인시켜준다.(하노이탑 전설의 비밀 알려주기)
- ② 교구나 웹사이트의 자바애플릿을 직접 조작해 보면서 원판을 옮기는 규칙을 찾아본다.(조작/체험하면서 규칙찾기)
- ③ 학습활동을 위해 원판 하나를 옮기는 데 걸리는 시간은 똑같이 1초라고 가정한다.(수학적 이상화)
- ④ 원판의 개수를 규칙적으로 변화시키면서 움직이는 원판의 번호와 옮겨가는 기둥의 번호를 표로 만들고 이를 더 우아하게 표현해 보도록 한다.(보다 나은 풀이에 대한 모색)
- ⑤ 하노이탑의 조건을 변경시키면서 다양한 응용문제를 해결하거나 직접 새로운 문제를 만들어 보도록 안내한다.(응용 및 발전적인 생각)

2. 기둥이 3개인 하노이탑에 크기가 다른 32종의 원판이 2개씩 64개가 꽂혀 있다. 원판을 1초에 하나씩 옮긴다고 할 때 64개를 모두 옮기는 데 걸리는 시간으로 가장 가까운 것은?

- ① 7시간 ② 5년 ③ 300년 ④ 2억년 ⑤ 6000억년

3. 기둥이 4개인 하노이탑의 한 기둥에 64개의 원판이 1초에 하나씩 옮긴다고 가정할 때 64개를 모두 옮기는 시간으로 가장 가까운 것은?

- ① 1시간 ② 5시간 ③ 1년 ④ 5년 ⑤ 1000년



놓여 있다.
데 걸리는

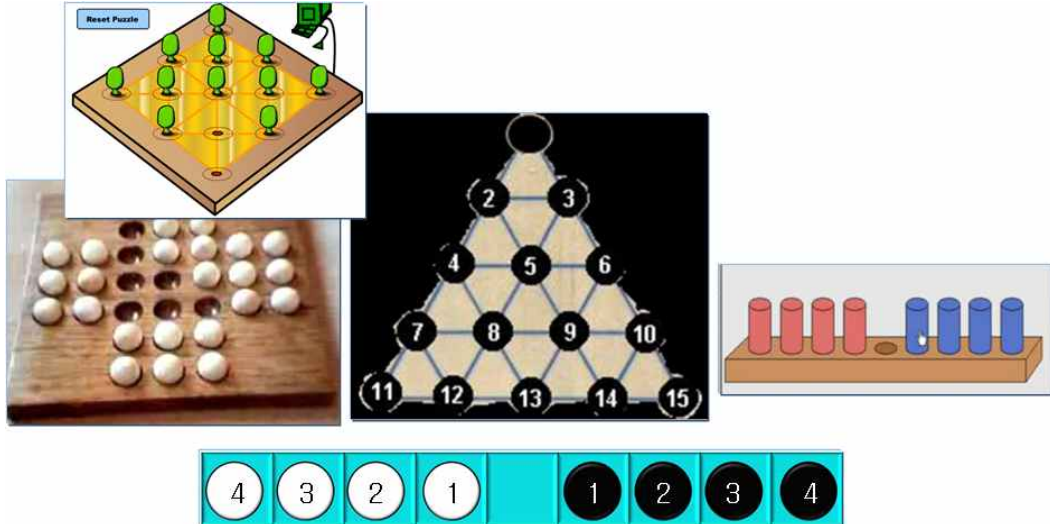


[탐구문제] 기둥의 모양을 삼각(원)형으로 배치했을 때 발견하기 쉬운 규칙(또는 좋은 점)을 알아봅시다.



24차시: 페그퍼즐

학습 안내



이번 차시는 ‘페그퍼즐’이라는 과제에 대해 살펴보겠습니다. ‘페그(peg)’란 원래 ‘말뚝’을 의미하는 데 말뚝을 옮기면서 탐구하는 과제들에는 여러 가지가 있습니다.

- (1)페그 판의 모양에 따른 분류: 사각(십자)형, 삼각(피라미드)형, 직선형
- (2)페그의 제거 방식에 따른 분류: 추월당한 페그제거형, 최소 이동형

이 중 몇 가지에 대해 살펴본 다음 이번 시간에 집중적으로 탐구할 거리인 ‘직선 모양의 최소이동’ 페그퍼즐에 대해 집중적으로 살펴보겠습니다.

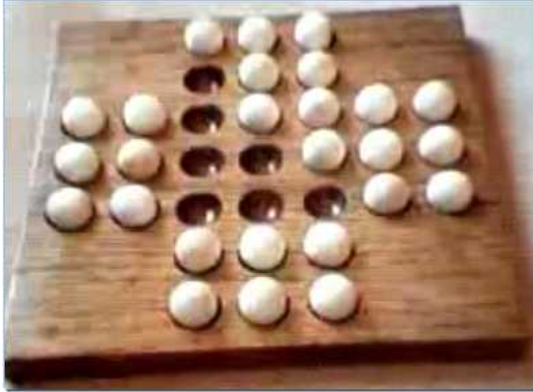
학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

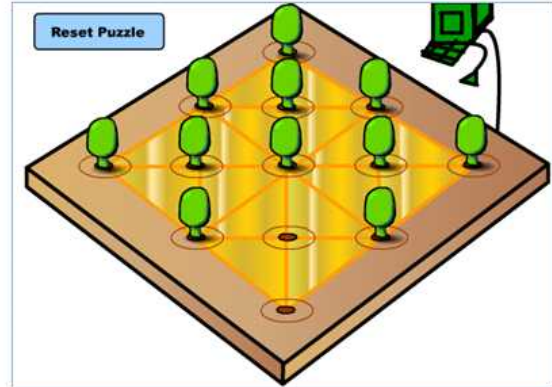
1. **(지식과 이해의 측면)** 개정 수학과 교육과정의 목표와 수학적 사고 및 태도에 대해 이해하게 됩니다.
2. **(기능과 활동의 측면)** 페그퍼즐 과제에서 최소이동횟수를 구하는 공식을 알고 실제로 특정 횟수의 차례에 이동할 바둑돌의 원 위치와 색깔, 이동방법을 쉽게 찾아내게 됩니다.
3. **(수학적 사고의 측면)** 바둑돌을 최소한으로 이동하는 효율적인 방법과 다양한 해법을 탐구해 보게 됩니다.
4. **(태도와 의지의 측면)** 페그퍼즐 과제의 속성에 ‘What if ~(not)’의 전략을 적용하여 보다 일반화되고 확장된 변형 페그퍼즐을 만들어 보려는 태도를 갖게 됩니다.

학습 내용

1. 사각(십자)판의 제거형 페그(solitaire)

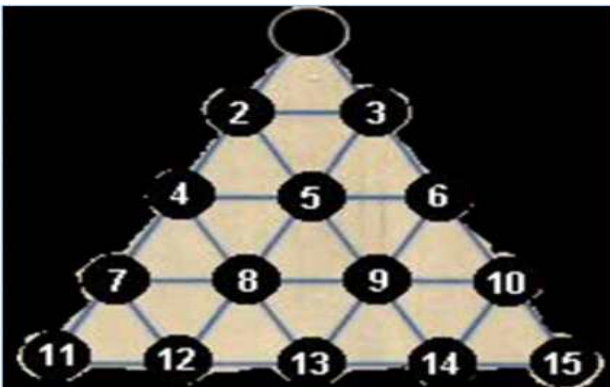


http://www.youtube.com/watch?v=qQ_wdw3_yrQ&feature=related



<http://www.addictinggames.com/pegpuzzle.html>

2. 삼각(피라미드)판의 제거형 페그(pyramid peg)



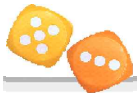
<http://www.youtube.com/watch?v=vfz90jP676s&feature=related>

3. 일직선 최소이동형 페그퍼즐(line peg puzzle)

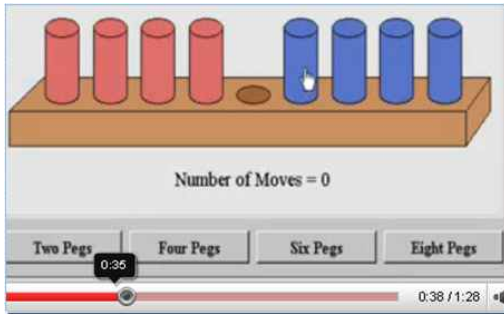
3-1) Arni의 두뇌 게임 웹사이트 중 KROSSOVER



http://www.mindgames-arni.com/ARNI_GAMES_TABLE/Crossover/crossover.html



3-2) 페그의 개수를 늘려가는 동영상



한쪽 페그의 개수(n)	1	2	3	4	5	6	7	10	n
최소이동 횟수(a_n)	3	8	15	24	?			...	?

http://www.youtube.com/watch#playnext=1&playnext_from=TL&videos=FSJ8KQTNVbc&v=aAh4JIKbeD8

3-3) 바둑돌로 직접 체험해 보기



(W, B)=(4, 4) move # 24 (#는 실제로 움직이는 횟수를 말함)

(W, B)=(3, 3) move # 15



순번	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
방향	R	L	L	R	R	R	L	L	L	R	R	R	L	L	R
색깔	W	B	B	W	W	W	B	B	B	W	W	W	B	B	W
돌번호	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	1
방향	S	J	S	J	J	S	J	J	J	S	J	J	S	J	S
돌번호	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

(W, B)=(4, 4) move # 24

순번	1	2 3	4 5 6	7 8 9 10	11 12 13 14	15 16 17 18	19 20 21	22 23	24
방법	S	JS	JJS	JJJS	JJJJ	SJJJ	SJJ	SJ	S
방향	R	LL	RRR	LLLL	RRRR	LLLL	RRR	LL	R
색깔	W	BB	WWW	BBBB	WWWW	BBBB	WWW	BB	W
돌번호	1	12	123	1234	1234	1234	234	34	4

미는(S) 횟수: $4 \times 2 = 8$

건너뛰는(J) 횟수: $4^2 = 16$

한쪽바둑돌의 개수(n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
미는(S)	2	4	6	8	10	12	14		$2n$
건너뛰기(J)	1	4	9	16	25	36	49		n^2



1. 페그퍼즐(Peg Puzzle) 과제

1.정보제공단계(페그퍼즐 과제/문제 도출)

아래와 같이 검은색과 흰색의 바둑들이 각각 4개씩 일정한 간격으로 놓여있습니다. 바둑들을 한 번에 하나씩 바로 옆 빈 칸으로 밀거나 이웃하는 바둑들을 하나씩 건너뛰어 이동할 수 있습니다. 검은색과 흰색의 위치를 모두 바꾸려고 합니다.



1. 위 상황에서 문제(수학적 질문)를 직접 만드시오.
2. 위의 문제를 해결하시오.
3. 자신이 사용한 사고 전략을 적어보시오.
4. 더 알아보고 싶은 것은 무엇입니까?

(탐구) 최소이동을 위한 효율적 이동 조건들

◆ 내가 발견한 사실들을 적어 봅시다.

•(예) 뒤로 물러나면 손해다.

◆ 다른 사람이 발견한 사실들 중 나에게 도움이 되는 방법

(약속하기) 페그퍼즐 과제를 해결하기 위해 필요한 기호들의 약속

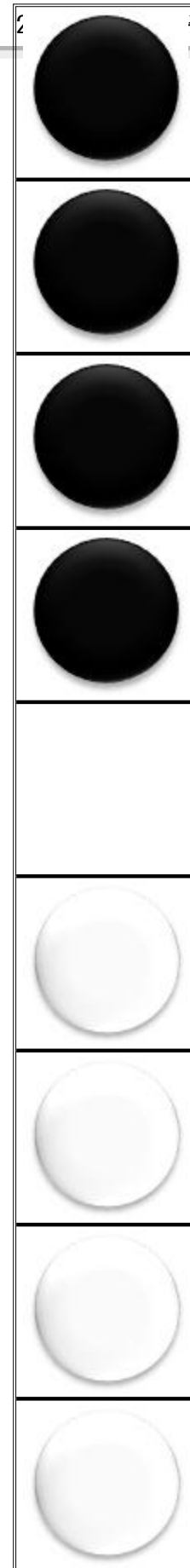
검은 돌(B), 흰 돌(W), 밀기(S), 건너뛰기(J),

첫 번째 검은 돌(B1), 세 번째 흰 돌(W3),

검은 돌과 흰 돌이 각각 n 개씩일 때의 최소이동횟수 $LM(n, n)$ 등

흰 돌부터 움직인다.

(규칙) 페그퍼즐 과제를 해결하는 동안 발견한 규칙들



<활동판>



학습 정리

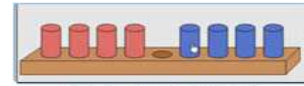
1. ‘페그(peg)’란 원래 ‘말뚝’을 의미하는 데 말뚝을 옮기면서 탐구하는 과제들에는 다음과 같은 것들이 있습니다.

- (1)페그 판의 모양에 따른 분류: 사각(십자)형, 삼각(피라미드)형, 직선형
- (2)페그의 제거 방식에 따른 분류: 주월 당한 페그 제거형, 최소 이동형



일직선 최소이동형(2)
(바둑돌 옮기기)

2. 일직선 최소이동형 페그퍼즐의 최소이동횟수에 대한 일반식뿐만 아니라 그것의 자세한 이동방법을 요구하면 학습자들의 다양한 수학적 사고를 자극할 수 있습니다.



일직선 최소이동형(1)
(line peg puzzle)

- (1) $(W, B)=(n, n)$ 의 최소이동횟수: $n^2 + 2n = n(n+2) = (n+1)^2 - 1$
- (2) 수학적 해법을 탐구하기 위해 페그(바둑돌)에 번호를 붙이고 움직이는 페그의 색깔 (W, B) 과 방향 (R, L) , 옮기는 방법 (S, J) 에 대한 표현, 기호화, 해법의 일반화 등을 탐구할 수 있습니다.

순번	1	2 3	4 5 6	7 8 9 10	11 12 13 14	15 16 17 18	19 20 21	22 23	24
방법	S	JS	JJS	JJJS	JJJJ	SJJJ	SJJ	SJ	S
방향	R	LL	RRR	LLLL	RRRR	LLLL	RRR	LL	R
색깔	W	BB	WWW	BBBB	WWWW	BBBB	WWW	BB	W
돌번호	1	12	123	1234	1234	1234	234	34	4



학습 평가

1. '페그퍼즐'에 대한 설명 중 가장 옳지 못한 것을 하나 고르시오.

- ① 페그는 말뚝이라는 뜻입니다.
- ② 페그판의 모양은 삼각형, 사각형, 일직선형 등이 있습니다.
- ③ 페그를 옮기는 규칙은 제거형과 최소이동형 등이 있습니다.
- ④ 개수가 n 개이고 가운데 한 칸을 비운 일직선 최소이동형 페그퍼즐의 최소이동횟수는 $n^2 + 2n$ 입니다.
- ⑤ 말뚝 페그에 색깔과 번호를 붙여놓으면 페그를 옮기는 과정을 탐구하는 동안 다양한 표현과 해법의 일반식을 구하는 데 도움이 됩니다.

[2-3] 아래와 같이 백색(White)과 흑색(Black)의 바둑돌이 각각 $(W, B)=(n, n)$ 개씩 놓여 있고 밀기(Slide)와 건너뛰기(Jump)의 방법으로 최소한으로 이동하면서 두 색깔 바둑돌의 위치를 모두 바꾸려고 합니다. 백색부터 움직인다고 할 때 각 물음에 답하십시오.

2. 페그를 옮기는 과정에 대한 설명으로 잘못된 것을 고르시오.

- ① 뒤로 물러나면 횟수가 많아져서 손해이다.
- ② 두 번 연달아 밀면 건너뛰기가 불가능하다.
- ③ 중간에 같은 색이 연달아 놓이면 뒤로 물려야 하므로 안 된다.
- ④ 이동횟수 단축하려면 최대한 많이 건너뛰기 위해 징검다리식으로 만들어야 한다
- ⑤ 같은 색을 연달아 움직이되 새로운 돌보다는 이미 움직이고 있던 돌부터 다 움직여야 한다.

3. $(W, B)=(4, 4)$ 일 때 20번째에 움직이는 바둑돌의 색깔과 그 때의 움직이는 방법을 바르게 짝지은 것을 고르시오.

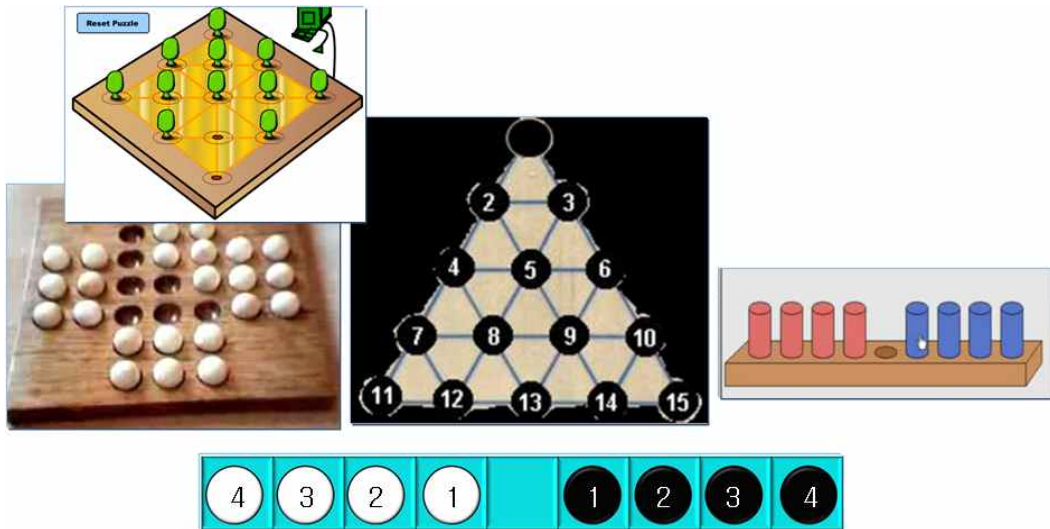


- | | | |
|-----------|----------------|---------|
| ① 흑색 - 밀기 | ② 흑색- 뛰기 | ③ 백색-밀기 |
| ④ 백색-뛰기 | ⑤ 경우에 따라 달라진다. | |



25차시: 페그퍼즐을 통한 수학적 사고 지도

학습 안내



이번 차시는 앞 차시의 ‘페그퍼즐 과제’를 체험하면서 탐구해보았던 내용들을 수학과 개정 교육과정의 목표와 수학적 사고라는 측면에서 살펴보고자 합니다. 이를 위해 우선 개정 수학과교육과정에서의 강조점인 ‘수학적 사고’를 기존의 7차 교육과정 목표와 비교하여 해석해 보고 나서 ‘수학적 사고와 태도’에 대해 간략히 개관하겠습니다. 이는 페그퍼즐 과제를 이해하는 중요한 도구이기 때문입니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해의 측면) 개정 수학과 교육과정의 목표와 수학적 사고 및 태도에 대해 이해하게 됩니다.
2. (기능과 활동의 측면) 페그퍼즐 과제에서 최소이동횟수를 구하는 공식을 알고 실제로 특정 횟수의 차례에 이동할 바둑돌의 원 위치와 색깔, 이동방법을 쉽게 찾아내게 됩니다.
3. (수학적 사고의 측면) 바둑돌을 최소한으로 이동하는 효율적인 방법과 다양한 해법을 탐구해 보게 됩니다.
4. (태도와 의지의 측면) 페그퍼즐 과제의 속성에 ‘What if ~(not)’의 전략을 적용하여 보다 일반화되고 확장된 변형 페그퍼즐을 만들어 보려는 태도를 갖게 됩니다.
5. (학습지도의 측면) 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

1. 수학과목의 총괄목표

수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

학교급	초등학교	중학교	고등학교
인지적	가. 생활주변에서 일어나는 현상을 수학적 으로 관찰하고 조직하는 경험을 통하여 수 학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하 는 능력을 기른다.	사회현상이나 자연현상을 기본적인 법칙과 이들 사이의 관계를	여러 가지 현상을 발전된 법칙과 이들 사이의 관계를
수학적 사 고력/의사 소통능력	나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능 력을 길러, 생활 주변에서 일어나는 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.	사회현상이나 자연 현상의	여러 가지
정의적	다. 수학에 대한 관심과 흥미를 가지고 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기 른다.		

2. 수학적 사고(방법적 사고): 해결 과정에서 발생하는 방법과 관련된 사고들

- 귀납: 규칙의 일반성을 추측
- 유추: 이미 알과 있는 것과 관련
- 연역: 논리적 법칙을 사용하여 필연적 사실 도출
- 통합: 보다 넓은 관점에서의 본질적 공통성 추구
- 발전: 통합을 넘어 보다 넓은 범위에 적용
- 단순화: 간단화하여 구조나 해결방안을 모색
- 추상화: 외연을 고정시키고 내포를 명확히
- 일반화: 내포를 고정시키고 외연을 명확히/확장
- 특수화: 보다 작은 경우로 국한시켜 통찰을 얻음
- 명확화: 간결하고 명확히 표현하고 해석

3. 수학적 사고(내용적 사고): 해결 과제의 수학적 내용과 관련된 사고들

- 기호화/도형화: 수학적인 기호나 도형으로 표현



- 단위: 수량의 단위나 도형의 구성 요소(점, 선, 면)에 주목
- 표현: 수식이나, 그림, 그래프 등으로 표현
- 연산과 조작(operation): 연산이나 도형의 이동을 다룸
- 알고리즘(algorithm): 지식, 기능, 조작방법을 공식화
- 개괄적 파악: 어림, 예상, 추측하며 이해에 도움
- 기본성질: 수학의 기본법칙이나 성질에 착안
- 함수적: 대응규칙에서 관계에 주목
- 식: 식으로 나타내거나 제시된 식을 해석

4. 수학적 태도 : 사고를 유발하거나 떠받치는 힘

- 1) 자신의 문제나 목적-내용을 스스로 명확히 하려는 태도: 의문을 가지려는 태도/문제의식을 가지려는 태도/수학적 문제를 발견하려는 태도 문제의 형성-파악 단계
- 2) 내용을 간결하고 명확하게 나타내려는 태도: 수량, 기호 등으로 명확히 표현(기록, 전달)하려는 태도/분류하고 정리하여 나타내려는 태도 문제의 형성-파악, 해결실행 단계
- 3) 이치에 닿으며 조리있는 행동을 하려는 태도: 목적에 부합하는 행동을 하려는 태도/해결방안이나 결과를 개괄적으로 예상해 보려는 태도/이미 알고 있는 것을



활용하려는 태도 해결 방안의 구상, 해결 실행 단계, 논리적 조직화 단계

- 4) 보다 나은 것을 알아보려는 태도: 사고-노력을 절약하면서 보다 확실하고 아름다운 것, 색다르고 새로운 것을 추구하며 세련되게 손질하려는 태도 논리적 조직화, 반성 단계

5. 페그퍼즐 과제 해결에 나타나는 수학적 사고의 분석

페그퍼즐 탐구활동의 단계별 진행(요약)

- 1.정보제공단계: 문제(과제) 제시→ 문제 발견/이해
- 2.지정탐구단계: 실제 조작(활동)→ 옮기는 규칙, 조건탐색, 단순화의 필요성 인식, 해법을 모색하며 개괄적 구상/파악
- 3.설명단계: 용어/표현의 약속, 간략한 해설→ 공통성 탐구
- 4.자유탐구단계: 문제해결 전략(단순화, 규칙성 찾기, 귀납, 유추, 연역) 찾기→ 수량화/기호화, 표현화, 다른 방법 찾기, 구조파악
- 5.통합단계: 일반화(공식) 탐색→ 반성, 유추를 통해 주축하고 나서 증명(연역), 더 나아가 보다 나은 방법 추구
- 6.확장/발전단계: What if ~(not)? 전략 → Re-Creation 만약 ~라면? ~가 아니라면?(개수, 배열, 형식, 구조 등)

1.정보제공단계(페그퍼즐 과제/문제 도출)

아래와 같이 검은색과 흰색의 바둑돌이 각각 4개씩 일정한 간격으로 놓여있습니다. 바둑돌을 한 번에 하나씩 바로 옆 빈 칸으로 밀거나 이웃하는 바둑돌을 하나씩 건너뛰어 이동할 수 있습니다. 검은색과 흰색의 위치를 모두 바꾸려고 합니다.



1. 위 상황에서 문제(수학적 질문)를 직접 만드시오.
2. 위의 문제를 해결하시오.
3. 자신이 사용한 사고 전략을 적어보시오.
4. 더 알고보고 싶은 것은 무엇입니까?

2.지정탐구단계(실제로 조작(활동)해 보기)

질문을 확인하기

- (1) 옮기면서 이동 횟수를 세어 보았습니까?
- (2) 그것이 최소이동횟수라고 확신합니까?
그 답이 맞는지 알려면 어떻게 해야 할까요?



- 답이 금방 나올 것 같은가?
- 바둑돌의 개수가 너무 많아 복잡하다면 좀 더 간단히 생각해 보면 어떨까?(단순화의 사고를 유도)

3.설명단계(효율적 이동 조건, 규칙 찾기)

(조작하는 사람들이 직접 발견하고 발표할 것들)

이동 방법을 함께 확인하기 : 옮기는 방법을 보면서 최소 이동이 되도록 하기 위한 이동 규칙은 무엇인지 찾아봅시다.



1. 용어의 약속(정의, 기호화, 수량화)
 - 옆 빈 칸으로 밀다(Slide). 하나를 건너뛰다(Jump).
 - 흰색(W_{hite})은 오른쪽(R_{ight}), 검은색(B_{lack})은 왼쪽(L_{eft})으로만 이동
 - 바둑돌에 색깔별로 왼쪽부터 번호 붙이기
2. 움직이는 방법 탐색
 - 뒤로 물러나면 X(횟수가 많아져서 손해)
 - 중간에 같은 색이 연달아 놓이면 뒤로 물러야 하므로 X.
 - 징검다리식 건너 뛰기 O(이동횟수 단축하려면)
 - 두 번 연달아 밀면 X(건너뛰기가 불가.)
 - 같은 색을 먼저, 가능한 경우 새로운 돌부터 움직임.

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

- (1) 옮기는 방향에 주목(표현/기호화의 사고)



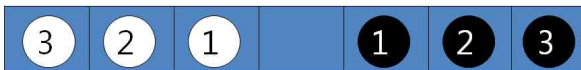
R L L R R R L L L R R R L L R
1 2 3 3 3 2 1

⇒ $3^2 + 3 \times 2$

R L L R R R L L L R R R L L R
1 2 3 4 4 3 2 1
⇒ 4×6 ⇒ 유추하면 $n^2 + 2n$ 또는 $n(n+2)$

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

- (2) 색깔에 주목(흰색 W, 검정 B)



W B B W W W B B B W W W B B W
1 2 3 3 3 2 1

W B B W W W B B B W W W B B B W W W B B W
1 12 123 1234 1234 1234 234 34 4

결국, W는 오른쪽, B는 왼쪽으로 가므로

(1)방향의 경우와 동일함

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

18

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

19

(3) 밀기, 뛰기 **횟수**에 주목(조작적 사고→구조파악) (4) 밀기, 뛰기의 **방법**에 주목(구조→유추, 일반화)

S J S J J S J J J S J J S J S

S J S J J S J J J S J J S J S

3	2	1		1	2	3
---	---	---	--	---	---	---

바둑돌의 개수	1	2	3	4	5				n
말기(S)	2	4	6	8	10	이것도 퀘임이 지만 식의 구조 를 보기에는 용			2n
견너귀(γ)	1	4	9	16	25				n ²

이것도 귀납적이지만 식의 구조를 보기에는 유리하다는 장점

J → 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3 × 3 (대칭형, 일정하게 늘어났다가 줄어듦.)

S→3x2(대칭형으로 좌우에 각각 3회씩)

J → 1+2+3+4+3+2+1 (늘려가며 최대 4회) → 가우스법으로 일반화

S→4x2(계산한 결과값보다 **관계식이 중요**)→**일반화**

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

20

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

(5) 색깔과 방법, 순서까지 통합, 직사각형(구조→유추, 일반화)

(6)수량으로 표현, 다른 방법 (수량화의 사고)

빈 칸의 위치를 좌표로 나타내고 공통부분을 찾아볼까?

Diagram showing a sequence of nodes: B4, B3, B2, B1, followed by a gap, then W1, W2, W3, W4. B1 is highlighted with a red border.

S₁ S₂ S₃ S₄

J ₁	J ₂	J ₃	J ₄
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄

S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₁
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	S ₂
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	S ₃
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	S ₄
J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	

$$\mathbf{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4} \quad n(n+2) \quad n^2 + 2n \quad (n+1)^2 - 1$$

- 표현의 사고(좌표로 나타냄)

0 -1 1 -2 0 2 -3 -1 1 3 2 0 -2 1 -1 0

- 추상화/수량화의 사고

~~(1)~~ (2) (3) (4) (3) (2) (1) : $4^2 - 1$

구조적으로 통일(균형, 확장가능)

- 일반화의 사고 $\rightarrow (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$

4.자유탐구단계(정당화, 일반화 시도)

(7) 각 바둑돌별 움직임은 횟수에 주목

각각의 바둑돌에 번호를 붙여 S, J 윗수를 조사

연번	회차정보	회차
1	W1 W2 W3	W1 S S B1 J
2	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15 W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24 W25 W26 W27 W28 W29 W30 W31 W32 W33 W34 W35 W36 W37 W38 W39 W40 W41 W42 W43 W44 W45 W46 W47 W48 W49 W50 W51 W52 W53 W54 W55 W56 W57 W58 W59 W60 W61 W62 W63 W64 W65 W66 W67 W68 W69 W70 W71 W72 W73 W74 W75 W76 W77 W78 W79 W80 W81 W82 W83 W84 W85 W86 W87 W88 W89 W90 W91 W92 W93 W94 W95 W96 W97 W98 W99 W100 W101 W102 W103 W104 W105 W106 W107 W108 W109 W110 W111 W112 W113 W114 W115 W116 W117 W118 W119 W120 W121 W122 W123 W124 W125 W126 W127 W128 W129 W130 W131 W132 W133 W134 W135 W136 W137 W138 W139 W140 W141 W142 W143 W144 W145 W146 W147 W148 W149 W150 W151 W152 W153 W154 W155 W156 W157 W158 W159 W160 W161 W162 W163 W164 W165 W166 W167 W168 W169 W170 W171 W172 W173 W174 W175 W176 W177 W178 W179 W180 W181 W182 W183 W184 W185 W186 W187 W188 W189 W190 W191 W192 W193 W194 W195 W196 W197 W198 W199 W200 W201 W202 W203 W204 W205 W206 W207 W208 W209 W210 W211 W212 W213 W214 W215 W216 W217 W218 W219 W220 W221 W222 W223 W224 W225 W226 W227 W228 W229 W230 W231 W232 W233 W234 W235 W236 W237 W238 W239 W240 W241 W242 W243 W244 W245 W246 W247 W248 W249 W250 W251 W252 W253 W254 W255 W256 W257 W258 W259 W260 W261 W262 W263 W264 W265 W266 W267 W268 W269 W270 W271 W272 W273 W274 W275 W276 W277 W278 W279 W280 W281 W282 W283 W284 W285 W286 W287 W288 W289 W290 W291 W292 W293 W294 W295 W296 W297 W298 W299 W300 W301 W302 W303 W304 W305 W306 W307 W308 W309 W310 W311 W312 W313 W314 W315 W316 W317 W318 W319 W320 W321 W322 W323 W324 W325 W326 W327 W328 W329 W330 W331 W332 W333 W334 W335 W336 W337 W338 W339 W340 W341 W342 W343 W344 W345 W346 W347 W348 W349 W350 W351 W352 W353 W354 W355 W356 W357 W358 W359 W360 W361 W362 W363 W364 W365 W366 W367 W368 W369 W370 W371 W372 W373 W374 W375 W376 W377 W378 W379 W380 W381 W382 W383 W384 W385 W386 W387 W388 W389 W390 W391 W392 W393 W394 W395 W396 W397 W398 W399 W400 W401 W402 W403 W404 W405 W406 W407 W408 W409 W410 W411 W412 W413 W414 W415 W416 W417 W418 W419 W420 W421 W422 W423 W424 W425 W426 W427 W428 W429 W430 W431 W432 W433 W434 W435 W436 W437 W438 W439 W440 W441 W442 W443 W444 W445 W446 W447 W448 W449 W450 W451 W452 W453 W454 W455 W456 W457 W458 W459 W460 W461 W462 W463 W464 W465 W466 W467 W468 W469 W470 W471 W472 W473 W474 W475 W476 W477 W478 W479 W480 W481 W482 W483 W484 W485 W486 W487 W488 W489 W490 W491 W492 W493 W494 W495 W496 W497 W498 W499 W500 W501 W502 W503 W504 W505 W506 W507 W508 W509 W510 W511 W512 W513 W514 W515 W516 W517 W518 W519 W520 W521 W522 W523 W524 W525 W526 W527 W528 W529 W530 W531 W532 W533 W534 W535 W536 W537 W538 W539 W540 W541 W542 W543 W544 W545 W546 W547 W548 W549 W550 W551 W552 W553 W554 W555 W556 W557 W558 W559 W560 W561 W562 W563 W564 W565 W566 W567 W568 W569 W570 W571 W572 W573 W574 W575 W576 W577 W578 W579 W580 W581 W582 W583 W584 W585 W586 W587 W588 W589 W590 W591 W592 W593 W594 W595 W596 W597 W598 W599 W600 W601 W602 W603 W604 W605 W606 W607 W608 W609 W610 W611 W612 W613 W614 W615 W616 W617 W618 W619 W620 W621 W622 W623 W624 W625 W626 W627 W628 W629 W630 W631 W632 W633 W634 W635 W636 W637 W638 W639 W640 W641 W642 W643 W644 W645 W646 W647 W648 W649 W650 W651 W652 W653 W654 W655 W656 W657 W658 W659 W660 W661 W662 W663 W664 W665 W666 W667 W668 W669 W670 W671 W672 W673 W674 W675 W676 W677 W678 W679 W680 W681 W682 W683 W684 W685 W686 W687 W688 W689 W690 W691 W692 W693 W694 W695 W696 W697 W698 W699 W700 W701 W702 W703 W704 W705 W706 W707 W708 W709 W710 W711 W712 W713 W714 W715 W716 W717 W718 W719 W720 W721 W722 W723 W724 W725 W726 W727 W728 W729 W730 W731 W732 W733 W734 W735 W736 W737 W738 W739 W740 W741 W742 W743 W744 W745 W746 W747 W748 W749 W750 W751 W752 W753 W754 W755 W756 W757 W758 W759 W760 W761 W762 W763 W764 W765 W766 W767 W768 W769 W770 W771 W772 W773 W774 W775 W776 W777 W778 W779 W780 W781 W782 W783 W784 W785 W786 W787 W788 W789 W790 W791 W792 W793 W794 W795 W796 W797 W798 W799 W800 W801 W802 W803 W804 W805 W806 W807 W808 W809 W810 W811 W812 W813 W814 W815 W816 W817 W818 W819 W820 W821 W822 W823 W824 W825 W826 W827 W828 W829 W830 W831 W832 W833 W834 W835 W836 W837 W838 W839 W840 W841 W842 W843 W844 W845 W846 W847 W848 W849 W850 W851 W852 W853 W854 W855 W856 W857 W858 W859 W860 W861 W862 W863 W864 W865 W866 W867 W868 W869 W870 W871 W872 W873 W874 W875 W876 W877 W878 W879 W880 W881 W882 W883 W884 W885 W886 W887 W888 W889 W890 W891 W892 W893 W894 W895 W896 W897 W898 W899 W900 W901 W902 W903 W904 W905 W906 W907 W908 W909 W910 W911 W912 W913 W914 W915 W916 W917 W918 W919 W920 W921 W922 W923 W924 W925 W926 W927 W928 W929 W930 W931 W932 W933 W934 W935 W936 W937 W938 W939 W940 W941 W942 W943 W944 W945 W946 W947 W948 W949 W950 W951 W952 W953 W954 W955 W956 W957 W958 W959 W960 W961 W962 W963 W964 W965 W966 W967 W968 W969 W970 W971 W972 W973 W974 W975 W976 W977 W978 W979 W980 W981 W982 W983 W984 W985 W986 W987 W988 W989 W990 W991 W992 W993 W994 W995 W996 W997 W998 W999 W1000 W1001 W1002 W1003 W1004 W1005 W1006 W1007 W1008 W1009 W1010 W1011 W1012 W1013 W1014 W1015 W1016 W1017 W1018 W1019 W1020 W1021 W1022 W1023 W1024 W1025 W1026 W1027 W1028 W1029 W1030 W1031 W1032 W1033 W1034 W1035 W1036 W1037 W1038 W1039 W1040 W1041 W1042 W1043 W1044 W1045 W1046 W1047 W1048 W1049 W1050 W1051 W1052 W1053 W1054 W1055 W1056 W1057 W1058 W1059 W1060 W1061 W1062 W1063 W1064 W1065 W1066 W1067 W1068 W1069 W1070 W1071 W1072 W1073 W1074 W1075 W1076 W1077 W1078 W1079 W1080 W1081 W1082 W1083 W1084 W1085 W1086 W1087 W1088 W1089 W1090 W1091 W1092 W1093 W1094 W1095 W1096 W1097 W1098 W1099 W1100 W1101 W1102 W1103 W1104 W1105 W1106 W1107 W1108 W1109 W1110 W1111 W1112 W1113 W1114 W1115 W1116 W1117 W1118 W1119 W1120 W1121 W1122 W1123 W1124 W1125 W1126 W1127 W1128 W1129 W1130 W1131 W1132 W1133 W1134 W1135 W1136 W1137 W1138 W1139 W1140 W1141 W1142 W1143 W1144 W1145 W1146 W1147 W1148 W1149 W1150 W1151 W1152 W1153 W1154 W1155 W1156 W1157 W1158 W1159 W1160 W1161 W1162 W1163 W1164 W1165 W1166 W1167 W1168 W1169 W1170 W1171 W1172 W1173 W1174 W1175 W1176 W1177 W1178 W1179 W1180 W1181 W1182 W1183 W1184 W1185 W1186 W1187 W1188 W1189 W1190 W1191 W1192 W1193 W1194 W1195 W1196 W1197 W1198 W1199 W1200 W1201 W1202 W1203 W1204 W1205 W1206 W1207 W1208 W1209 W1210 W1211 W1212 W1213 W1214 W1215 W1216 W1217 W1218 W1219 W1220 W1221 W1222 W1223 W1224 W1225 W1226 W1227 W1228 W1229 W1230 W1231 W1232 W1233 W1234 W1235 W1236 W1237 W1238 W1239 W1240 W1241 W1242 W1243 W1244 W1245 W1246 W1247 W1248 W1249 W1250 W1251 W1252 W1253 W1254 W1255 W1256 W1257 W1258 W1259 W1260 W1261 W1262 W1263 W1264 W1265 W1266 W1267 W1268 W1269 W1270 W1271 W1272 W1273 W1274 W1275 W1276 W1277 W1278 W1279 W1280 W1281 W1282 W1283 W1284 W1285 W1286 W1287 W1288 W1289 W1290 W1291 W1292 W1293 W1294 W1295 W1296 W1297 W1298 W1299 W1300 W1301 W1302 W1303 W1304 W1305 W1306 W1307 W1308 W1309 W1310 W1311 W1312 W1313 W1314 W1315 W1316 W1317 W1318 W1319 W1320 W1321 W1322 W1323 W1324 W1325 W1326 W1327 W1328 W1329 W1330 W1331 W1332 W1333 W1334 W1335 W1336 W1337 W1338 W1339 W1340 W1341 W1342 W1343 W1344 W1345 W1346 W1347 W1348 W1349 W1350 W1351 W1352 W1353 W1354 W1355 W1356 W1357 W1358 W1359 W1360 W1361 W1362 W1363 W1364 W1365 W1366 W1367 W1368 W1369 W1370 W1371 W1372 W1373 W1374 W1375 W1376 W1377 W1378 W1379 W1380 W1381 W1382 W1383 W1384 W1385 W1386 W1387 W1388 W1389 W1390 W1391 W1392 W1393 W1394 W1395 W1396 W1397 W1398 W1399 W1400 W1401 W1402 W1403 W1404 W1405 W1406 W1407 W1408 W1409 W1410 W1411 W1412 W1413 W1414 W1415 W1416 W1417 W1418 W1419 W1420 W1421 W1422 W1423 W1424 W1425 W1426 W1427 W1428 W1429 W1430 W1431 W1432 W1433 W1434 W1435 W1436 W1437 W1438 W1439 W1440 W1441 W1442 W1443 W1444 W1445 W1446 W1447 W1448 W1449 W1450 W1451 W1452 W1453 W1454 W1455 W1456 W1457 W1458 W1459 W1460 W1461 W1462 W1463 W1464 W1465 W1466 W1467 W1468 W1469 W1470 W1471 W1472 W1473 W1474 W1475 W1476 W1477 W1478 W1479 W1480 W1481 W1482 W1483 W1484 W1485 W1486 W1487 W1488 W1489 W1490 W1491 W1492 W1493 W1494 W1495 W1496 W1497 W1498 W1499 W1500 W1501 W1502 W1503 W1504 W1505 W1506 W1507 W1508 W1509 W1510 W1511 W1512 W1513 W1514 W1515 W1516 W1517 W1518 W1519 W1520 W1521 W1522 W1523 W1524 W1525 W1526 W1527 W1528 W1529 W1530 W1531 W1532 W1533 W1534 W1535 W1536 W1537 W1538 W1539 W1540 W1541 W1542 W1543 W1544 W1545 W1546 W1547 W1548 W1549 W1550 W1551 W1552 W1553 W1554 W1555 W1556 W1557 W1558 W1559 W1560 W1561 W1562 W1563 W1564 W1565 W1566 W1567 W1568 W1569 W1570 W1571 W1572 W1573 W1574 W1575 W1576 W1577 W1578 W1579 W1580 W1581 W1582 W1583 W1584 W1585 W1586 W1587 W1588 W1589 W1590 W1591 W1592 W1593 W1594 W1595 W1596 W1597 W1598 W1599 W1600 W1601 W1602 W1603 W1604 W1605 W1606 W1607 W1608 W1609 W1610 W1611 W1612 W1613 W1614 W1615 W1616 W1617 W1618 W1619 W1620 W1621 W1622 W1623 W1624 W1625 W1626 W1627 W1628 W1629 W1630 W1631 W1632 W1633 W1634 W1635 W1636 W1637 W1638 W1639 W1640 W1641 W1642 W1643 W1644 W1645 W1646 W1647 W1648 W1649 W1650 W1651 W1652 W1653 W1654 W1655 W1656 W1657 W1658 W1659 W1660 W1661 W1662 W1663 W1664 W1665 W1666 W1667 W1668 W1669 W1670 W1671 W1672 W1673 W1674 W1675 W1676 W1677 W1678 W1679 W1680 W1681 W1682 W1683 W1684 W1685 W1686 W1687 W1688 W1689 W1690 W1691 W1692 W1693 W1694 W1695 W1696 W1697 W1698 W1699 W1700 W1701 W1702 W1703 W1704 W1705 W1706 W1707 W1708 W1709 W1710 W1711 W1712 W1713 W1714 W1715 W1716 W1717 W1718 W1719 W1720 W1721 W1722 W1723 W1724 W1725 W1726 W1727 W1728 W1729 W1730 W1731 W1732 W1733 W1734 W1735 W1736 W1737 W1738 W1739 W1740 W1741 W1742 W1743 W1744 W1745 W1746 W1747 W1748 W1749 W1750 W1751 W1752 W1753 W1754 W1755 W1756 W1757 W1758 W1759 W1760 W1761 W1762 W1763 W1764 W1765 W1766 W1767 W1768 W1769 W1770 W1771 W1772 W1773 W1774 W1775 W1776 W1777 W1778 W1779 W1780 W1781 W1782 W1783 W1784 W1785 W1786 W1787 W1788 W1789 W1790 W1791 W1792 W1793 W1794 W1795 W1796 W1797 W1798 W1799 W1800 W1801 W1802 W1803 W1804 W1805 W1806 W1807 W1808 W1809 W1810 W1811 W1812 W1813 W1814 W1815 W1816 W1817 W1818 W1819 W1820 W1821 W1822 W1823 W1824 W1825 W1826 W1827 W1828 W1829 W1830 W1831 W1832 W1833 W1834 W1835 W1836 W1837 W1838 W1839 W1840 W1841 W1842 W1843 W1844 W1845 W1846 W1847 W1848 W1849 W1850 W1851 W1852 W1853 W1854 W1855 W1856 W1857 W1858 W1859 W1860 W1861 W1862 W1863 W1864 W1865 W1866 W1867 W1868 W1869 W1870 W1871 W1872 W1873 W1874 W1875 W1876 W1877 W1878 W1879 W1880 W1881 W1882 W1883 W1884 W1885 W1886 W1887 W1888 W1889 W1890 W1891 W1892 W1893 W1894 W1895 W1896 W1897 W1898 W1899 W1900 W1901 W1902 W1903 W1904 W1905 W1906 W1907 W1908 W1909 W1910 W1911 W1912 W1913 W1914 W1915 W1916 W1917 W1918 W1919 W1920 W1921 W1922 W1923 W1924 W1925 W1926 W1927 W1928 W1929 W1930 W1931 W1932 W1933 W1934 W1935 W1936 W1937 W1938 W1939 W1940 W1941 W1942 W1943 W1944 W1945 W1946 W1947 W1948 W1949 W1950 W1951 W1952 W1953 W1954 W1955 W1956 W1957 W1958 W1959 W1960 W1961 W1962 W1963 W1964 W1965 W1966 W1967 W1968 W1969 W1970 W1971 W1972 W1973 W1974 W1975 W1976 W1977 W1978 W1979 W1980 W1981 W1982 W1983 W1984 W1985 W1986 W1987 W1988 W1989 W1990 W1991 W1992 W1993 W1994 W1995 W1996 W1997 W1998 W1999 W2000 W2001 W2002 W2003 W2004 W2005 W2006 W2007 W2008 W2009 W2010 W2011 W2012 W2013 W2014 W2015 W2016 W2017 W2018 W2019 W2020 W2021 W2022 W2023 W2024 W2025 W2026 W2027 W2028 W2029 W2030 W2031 W2032 W2033 W2034 W2035 W2036 W2037 W2038 W2039 W2040 W2041 W2042 W2043 W2044 W2045 W2046 W2047 W2048 W2049 W2050 W2051 W2052 W2053 W2054 W2055 W2056 W2057 W2058 W2059 W2060 W2061 W2062 W2063 W2064 W2065 W2066 W2067 W2068 W2069 W2070 W2071 W2072 W2073 W2074 W2075 W2076 W2077 W2078 W2079 W2080 W2081 W2082 W2083 W2084 W2085 W2086 W2087 W2088 W2089 W2090 W2091 W2092 W2093 W2094 W2095 W2096 W2097 W2098 W2099 W2100 W2101 W2102 W2103 W2104 W2105 W2106 W2107 W2108 W2109 W2110 W2111 W2112 W2113 W2114 W2115 W2116 W2117 W2118 W2119 W2120 W2121 W2122 W2123 W2124 W2125 W2126 W2127 W2128 W2129 W2130 W2131 W2132 W2133 W2134 W2135 W2136 W2137 W2138 W2139 W2140 W2141 W2142 W2143 W2144 W2145 W2146 W2147 W2148 W2149 W2150 W2151 W2152 W2153 W2154 W2155 W2156 W2157 W2158 W2159 W2160 W2161 W2162 W2163 W2164 W2165 W2166 W2167 W2168 W2169 W2170 W2171 W2172 W2173 W2174 W2175 W2176 W2177 W2178 W2179 W2180 W2181 W2182 W2183 W2184 W2185 W2186 W2187 W2188 W2189 W2190 W2191 W2192 W2193 W2194 W2195 W2196 W2197 W2198 W2199 W2200 W2201 W2202 W2203 W2204 W2205 W2206 W2207 W2208 W2209 W2210 W2211 W2212 W2213 W2214 W2215 W2216 W2217 W2218 W2219 W2220 W2221 W2222 W2223 W2224 W2225 W2226 W2227 W2228 W2229 W2230 W2231 W2232 W2233 W2234 W2235 W2236 W2237 W2238 W2239 W2240 W2241 W2242 W2243 W2244 W2245 W2246 W2247 W2248 W2249 W2250 W2251 W2252 W2253 W2254 W2255 W2256 W2257 W2258 W2259 W2260 W2261 W2262 W2263 W2264 W2265 W2266 W2267 W2268 W2269 W2270 W2271 W2272 W2273 W2274 W2275 W2276 W2277 W2278 W2279 W2280 W2281 W2282 W2283 W2284 W2285 W2286 W2287 W2288 W2289 W2290 W2291 W2292 W2293 W2294 W2295 W2296 W2297 W2298 W2299 W2300 W2301 W2302 W2303 W2304 W2305 W2306 W2307 W2308 W2309 W2310 W2311 W2312 W2313 W2314 W2315 W2316 W2317 W2318 W2319 W2320 W2321 W2322 W2323 W2324 W2325 W2326 W2327 W2328 W2329 W2330 W2331 W2332 W2333 W2334 W2335 W2336 W2337 W2338 W2339 W2340 W2341 W2342 W2343 W2344 W2345 W2346 W2347 W2348 W2349 W2350 W2351 W2352 W2353 W2354 W2355 W2356 W2357 W2358 W2359 W2360 W2361 W2362 W2363 W2364 W2365 W2366 W2367 W2368 W2369 W2370 W2371 W2372 W2373 W2374 W2375 W2376 W2377 W2378 W2379 W2380 W2381 W2382 W2383 W2384 W2385 W2386 W2387 W2388 W2389 W2390 W2391 W2392 W2393 W2394 W2395 W2396 W2397 W2398 W2399 W2400 W2401 W2402 W2403 W2404 W2405 W2406 W2407 W2408 W2409 W2410 W2411 W2412 W2413 W2414 W2415 W2416 W2417 W2418 W2419 W2420 W2421 W2422 W2423 W2424 W2425 W2426 W2427 W2428 W2429 W2430 W2431 W2432 W2433 W2434 W2435 W2436 W2437 W2438 W2439 W2440 W2441 W2442 W2443 W2444 W2445 W2446 W2447 W2448 W2449 W2450 W2451 W2452 W2453 W2454 W2455 W2456 W2457 W2458 W2459 W2460 W2461 W2462 W2463 W2464 W2465 W2466 W2467 W2468 W2469 W2470 W2471 W2472 W2473 W2474 W2475 W2476 W2477 W2478 W2479 W2480 W2481 W2482 W2483 W2484 W2485 W2486 W2487 W2488 W2489 W2490 W2491 W2492 W2493 W2494 W2495 W2496 W2497 W2498 W2499 W2500 W2501 W2502 W2503 W2504 W2505 W2506 W2507 W2508 W2509 W2510 W2511 W2512 W2513 W2514 W2515 W2516 W2517 W2518 W2519 W2520 W2521 W2522 W2523 W2524 W2525 W2526 W2527 W2528 W2529 W2530 W2531 W2532 W2533 W2534 W2535 W2536 W2537 W2538 W2539 W2540 W2541 W2542 W2543 W2544 W2545 W2546 W2547 W2548 W2549 W2550 W2551 W2552 W2553 W2554 W2555 W2556 W2557 W2558 W2559 W2560 W2561 W2562 W2563 W2564 W2565 W2566 W2567 W2568 W2569 W2570 W2571 W2572 W2573 W2574 W2575 W2576 W2577 W2578 W2579 W2580 W2581 W2582 W2583 W2584 W2585 W2586 W2587 W2588 W2589 W2590 W2591 W2592 W2593 W2594 W2595 W2596 W2597 W2598 W2599 W2600 W2601 W2602 W2603 W2604 W2605 W2606 W2607 W2608 W2609 W2610 W2611 W2612 W2613 W2614 W2615 W2616 W2617 W2618 W2619 W2620 W2621 W2622 W2623 W2624 W2625 W2626 W2627 W2628 W2629 W2630 W2631 W2632 W2633 W2634 W2635 W2636 W2637 W2638 W2639 W2640 W2641 W2642 W2643 W2644 W2645 W2646 W2647 W2648 W2649 W2650 W2651 W2652 W2653 W2654 W2655 W2656 W2657 W2658 W2659 W2660 W2661 W2662 W2663 W2664 W2665 W2666 W2667 W2668 W2669 W2670 W2671 W2672 W2673 W2674 W2675 W2676 W2677 W2678 W2679 W2680 W2681 W2682 W2683 W26	

5. 통합단계(포괄적 예시)

***색깔과 이동 방법, 순서를 모두 통합(통합,표현 사고)**

Diagram illustrating the recursive step in calculating the number of ways to climb stairs. It shows two states: #1 (current step) and #2 (previous step). For #1, the number of ways to reach step i is the sum of ways to reach step $i-1$ and step $i-2$. For #2, the number of ways to reach step i is the sum of ways to reach step $i-1$ and step $i-2$. The diagram shows the transition from state #1 to state #2, where the number of ways to reach step $i-1$ becomes the number of ways to reach step i , and the number of ways to reach step $i-2$ becomes the number of ways to reach step $i-1$.

5	W1 B1 B2 W1 W2 W3 W4 W1 B1 B2 B3 B4 W1 W2 W3 W4 W5 B1 B2 B3 B4 B5 W1 W2 W3 W4 W5 B2 B3 B4 B5 W3 W4 W5 B4 B5 W5															
	원색				윤건 방법				검은색				윤건 방법			
	W1				S J J S				B1				J J J			
	W2				J J J				B2				S J J S			
	W3				S J J S				B3				J J J			
	W4				J J J				B4				S J J S			
5	W5				S J J S				B5				J J J			



* What if ?

6. 확장단계: B&W의 개수가 서로 다르다면?

(3,2)일 때의 예시를 통한 관찰(탐구)



S J S J J S J J S J S

S → 3+2=5 J → 1+2+2+1=6
(4,2)구조: S J S J J S J J S J S

S → 4+2=6 J → 1+2+2+2+1=8
(5,2)구조: S J S J J S J J S J S

S → 5+2=7 J → 1+2+2+2+2+1=12

6. 확장단계(1): 정당화, 특수화, 유추

(2)한 색(B)을 고정하고 확장, 일반화



S1 S2	S1 S2 S3	S1 S2 S3 S4
J1 J2 J3 J4 J5 J6	J1 J2 J3 J4 J5 J6	J1 J2 J3 J4 J5 J6
J1 J1 J3 J1 J5 J2	J1 J2 J3 J2 J5 J3	J1 J2 J3 J3 J5 J4
S3 S2 S5 S4 S1 S1	J1 J2 J1 J4 J2 J6	J1 J2 J2 J4 J3 J6
(B, W)의 바둑돌을 B부터 움직여	S1 S5 S3 S1 S5 S3	J1 J1 J3 J2 J5 J4
(6, 2)개의 바둑돌을 움기는 과정	→S: m+n? (귀납/유추) →J: mxn?	(6, 4)개의 바둑돌을 움기는 과정

참고: (일반화, 증명(연역적 사고))

*이동하는 칸의 수에 주목해 보려는 생각



확장/유추적으로 접근 / 또는
n=m일 때의 특수화 사고 적용

(미는 횟수)=(밀어서 이동하는 칸의 총 수)
=(이동하는 칸의 총 수 - 건너뛰는 이동하는 칸의 수)

$$n = m$$

$$\Rightarrow (n + n) \times (n + 1) - 2n^2$$

$$n \neq m$$

$$\Rightarrow \{(n + 1) \times m + (m + 1) \times n\} - 2m \times n$$

Jump	W1	W2	W3	...	Wm
B1					
B2					
B3					
B4					
...					
Bn					

(m, n)개의 바둑돌이
서로 교차하는 횟수는 m×n

6. 확장단계(1) : 정당화, 특수화, 유추

(1)차이가 일정한 경우로 확장, 일반화

(4, 2), (5, 3) (특수화를 통해 유추해 보려는 생각)



S J S J J S J J S J S

S : 4 + 2 = 6 → m+n? (귀납/유추)

J : 1+2+2+2+1 = 2x4 → mxn?

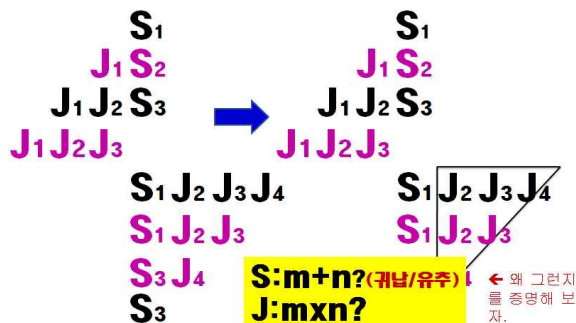
흰색 5개와 검은색 3개(차이가 2개일 때의 구조에 주목)

S J S J J S J J S J J S J J S J J S J J S

6. 확장단계(1): 정당화, 유추, 일반화

(3)밀기(S)의 위치를 고정

(B, W)을 (4, 3)으로 포괄적 예시 무 일반화



* What if ?

6. 확장단계(2): 모양을 바꾸면?

*자원을 확장/발전시켜보려는 생각

왜 직선형이어야만 하지?
(What if ? What if ~not?)

- 1) 정사각형모양 배열이라면?
- 2) 직사각형모양 배열이라면?

→확장/발전, 유추, 일반화

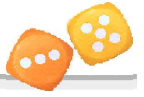
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	X	X	
X	X	X	X	X
X	X	X	X	X

O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O	O
O	O	O	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X



학습 정리

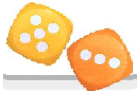
- 1.정보제공단계: 문제(과제) 제시 문제 발견/이해
- 2.지정탐구단계: 실제 조작(활동) 옮기는 규칙, 조건탐색, 단순화의 필요성 인식, 해법을 모색하며 개괄적 구상/파악
- 3.설명단계: 용어/표현의 약속, 간략한 해설 공통성 탐구
- 4.자유탐구단계: 문제해결 전략(단순화, 규칙성 찾기, 귀납, 유추, 연역) 찾기 수량화/기호화, 표현화, 다른 방법 찾기, 구조파악
- 5.통합단계: 일반화(공식) 탐색 반성, 유추를 통해 주측하고 나서 증명(연역), 더 나아가 보다 나은 방법 추구
- 6.확장/발전단계: What if ~(not)? 전략 Re-Creation
만약 ~라면? ~가 아니라면?(개수, 배열, 형식, 구조 등)



학습 평가

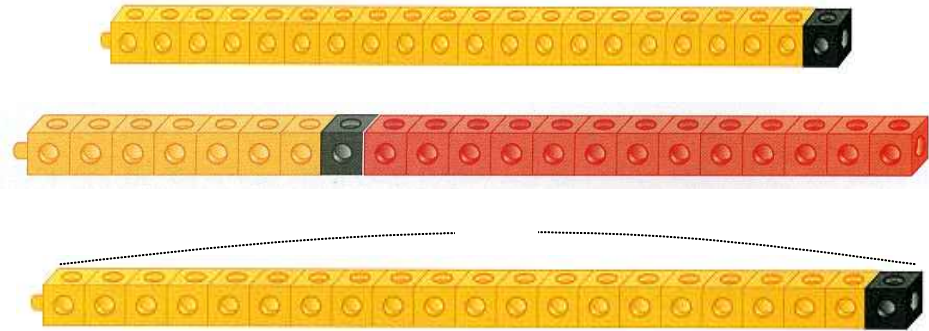
- 반힐레(van Hiele)의 수업모형 단계에 페그퍼즐을 적용한 방법에 대한 설명 중 가장 잘못 된 것을 고르시오.
 - 반힐레의 수업모형 단계 순서는 '정보제공-지정탐구-설명-자유탐구-통합'이다.
 - 설명단계에서는 용어/표현의 약속과 간략한 해설을 통해 공통성을 탐구하도록 한다.
 - 자유탐구 단계에서는 학습자들은 문제해결 전략(단순화, 규칙성 찾기, 귀납, 유추, 연역 등)을 찾는 과정에서 수량화/기호화, 표현화, 다른 방법 찾기, 구조파악 등을 시도하게 된다.
 - 통합단계에서는 일반화(공식)를 탐색하면서 반성, 유추를 통해 추측하고 나서 증명(연역), 더 나아가 보다 나은 방법 추구하도록 지도한다.
 - 확장/발전단계에서는 What if ~(not)? 전략을 통해 페그의 개수를 늘려보도록 한다.
- $m+n+1$ 개의 칸에서 양쪽에 백색 바둑돌 m 개와 흑색 바둑돌 n 개를 놓고 두 색깔의 경계되는 가운데 부분에 한 칸을 비워놓았습니다. 한 칸씩 밀거나 다른 바둑돌을 하나씩 건너뛰는 방법으로 최소이동횟수로 백색과 흑색의 위치를 모두 바꾸려고 합니다. 최소한의 횟수로 이동하기 위해 움직이는 방법을 잘못 설명한 것을 고르시오.
 - 뒤로 물러나는 바둑돌이 있으면 최소이동횟수에서 손해이다.
 - 밀기는 두 번 연달아 일어날 수 없다.
 - 밀기의 횟수는 $m+n$ 이다.
 - 바둑돌이 움직이는 모든 칸의 수는 $mm+m+n$ 이다.
 - 두 가지 색깔의 바둑돌이 모두 움직일 수 있을 때는 아직 한 번도 움직이지 않은 바둑돌을 먼저 움직인다.
- $(W, B)=(3, 6)$ 일 때 15번째에 움직이는 바둑돌의 색깔과 그 때의 움직이는 방법을 바르게 짚지은 것을 고르시오.

 - ① 흑색-밀기-5번 ② 흑색-뛰기-5번
 - ③ 백색-밀기-2번 ④ 백색-뛰기-2번 ⑤ 경우에 따라 달라진다.



26차시: NIM 게임

학습 안내



‘배스킨 라빈스 31’ 게임이란 여러 명이 둘러 앉아 시작하는 사람부터 오른쪽으로 돌아가면서 1개부터 3개까지의 수를 부르다가 31을 부르는 사람이 지는 게임입니다. 이 게임에서 이기기 위한 필승전략이 있을까요? 아쉽게도 ‘배스킨 라빈스 31 게임’은 이기기 위한 게임이 아니라 내가 지지 않기 위해 피해가거나 내 옆의 사람을 선택적으로 구제해 주는 게임입니다. 즉, 내가 이길 수 있는 필승전략은 없다는 뜻입니다. 하지만 ‘배스킨 라빈스 31 게임’은 주어진 조건에 따라서는 반드시 이길 수 있는 전략이 있는 ‘NIM게임’이라고 하는 것의 변형입니다. 이번 차시는 ‘NIM게임’을 통해 다양한 변형 ‘NIM게임’을 만들어 보도록 하겠습니다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. (지식과 이해) NIM게임의 구성원리를 알고 관련 문제를 해결할 수 있습니다.
2. (기능과 조작) 유사 NIM게임에서 거의 대부분 이길 수 있습니다.
3. (수학적 사고) NIM게임의 종류와 해법을 일반화시킬 수 있고, ‘What if (not)’전략을 통해 변형 NIM게임을 만들 수 있습니다.
4. (태도와 의지) NIM게임과 변형 NIM게임을 해결하겠다는 의지와 도전감을 갖게 됩니다.



학습 내용

본 차시에서 다루는 Nim게임을 필요에 따라서는 “큐브 가져가기 게임”이라 부르기로 합니다. Nim게임은 대수적 사고를 분석하는 전통적인 방법으로 자주 사용되어왔습니다. 본 차시의 “큐브 가져가기 게임”은 기존의 Nim게임을 재구성한 것입니다.

전통적인 Nim게임은 진주나 바둑돌, 성냥개비 등을 모둠별로 나열해 놓고 몇 개씩 가져가므로 가져가는 활동은 행하고 있지만 구슬의 개수가 많을 때는 사실 몇 개나 남았는지를 다시 일일이 세어야 하는 불편함이 있고 문제가 해결되는 과정을 시각적으로 확인하기도 어려웠습니다. 하지만 색큐브를 이용하면 큐브의 구성에 의하여 제거된 큐브의 개수와 남아 있는 큐브의 개수의 파악과 추적이 용이하여 문제 해결에 필요한 전략 및 해결 과정을 설명하기에도 쉽습니다. 예를 들어, 마지막에 가져갈 목표 큐브를 다른 색으로 끼워놓고 한 쪽 방향 또는 양방향, 셋 또는 네 방향으로 큐브를 끼워두면서 탐구하기 때문에 과제에 대한 구조를 파악하기가 쉬워서 일차인 Nim 게임을 2차, 3차 이상 까지도 확장시키기 쉽습니다.

< 용어의 정의 >

	(정의)하기: 설명
NIM게임	주어진 대상을 정해진 규칙에 따라 두 명이 서로 번갈아 가져가는 실행을 하면서 승패를 내는 게임
선수(先手)	먼저 가져감
후수(後手)	나중에 가져감
필승전략	내 차례에서의 행위로 반드시 이길 수 있는 전략
선수필승	먼저 가져가는 사람이 반드시 이김
선수필패	먼저 가져가는 사람이 반드시 짐
필승수 (必勝數)	필승전략을 계속 사용한다고 할 때 최초에 가져가는 개수
수학적 게임	필승전략이 있어서 수학적으로 설명 가능한 명확한 해법이 존재하는 게임

본 연구의 “큐브 가져가기 게임”에서는 학습자에게 문제의 수준을 3단계로 달리하여 단계적으로 과제를 제시하였으며, 각 단계에서 조건을 변경하여 어느 수준의 문제까지 반응을 보이는 지를 분석하였다. 또한 과제 해결 중에 학습자에게서 볼 수 있는 일반화 사고를 분석하였다.

1) 투입 문제의 단계 구분

본 연구에 투입할 과제의 단계를 구분하면 [표 III-2]와 같다. 투입할 과제의 수준은 크게 4수준으로 분류한다. 각 수준은 마지막으로 가져가야 할 큐브를 중심으로 연결된 큐브의 방향에 따라 나눈다. 즉 1-방향 Nim 게임은 1수준, 2-방향 Nim 게임은 2수준, 3-방향 이상의 Nim 게임은 3수준으로 나눈다. 이때 3-방향 이상의 Nim 게임을 3수준으로 분류하는 이유는 필승전략을 구하기 위한 해법의 구조가 본질적으로 같기 때문이다. 4수준은 3-방향 Nim 게임 중 가져갈 수 있는 개수에 제한을 두지 않거나, 1수준부터 3수준까지의 모든 Nim 게임에 대한 해법에 대하여 종합적인 접근이 필요한



과제이다. 특히 3수준까지의 문제는 주어진 개수와 가져갈 개수에 대한 함수적인 사고와 변수의 통제를 다루면서 필승전략에 접근해야 하지만, 4수준의 문제는 2진법을 이용한 보다 체계적이고 수학적인 사고가 요구된다.

각 수준은 다시 크게 구체와 일반 두 가지 성격의 문제로 구분된다. 즉 문제에서 주어지는 총 큐브의 개수와 가져갈 수 있는 큐브의 개수가 구체적인 수로 제시된 경우와 특정한 문자(L, M, N ...)의 일반적 개수로 제시된 경우로 구분된다. 기본적으로 구체적인 개수를 이용한 필승전략과 일반화는 암시적 일반화의 형태를 요구하며, 문자를 이용한 임의의 수로 제시된 문제의 일반화는 형식적 일반화를 요구한다.

각 활동지별로 문제의 수준과 성격을 분류하면 다음과 같다.

[활동 1-□]은 1수준, [활동 3-□]은 2수준, [활동 4-□]은 3수준, [활동 5-□]은 4수준의 문제이다. 단, [활동 2-□]은 1수준과 2수준의 문제에 대한 새로운 문제 만들기 활동이다. [활동 □-1]은 문제의 성격이 구체적이며, [활동 □-2]는 일반적인 성격의 문제이다. 이 때, 4수준에서 다루는 문제와 같이 가져가는 큐브의 개수를 무제한으로 할 경우 3-방향 이상의 큐브에 대한 문제는 5수준으로 구분할 수도 있다.

<표 III-2> 문제의 단계 구분

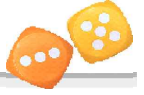
문제의 수준	문제의 성격					문제의 사례
	성격	방향	주어진 개수	가져가는 큐브 개수	일반화 유형	
1수준	구체	1-방향	구체적 (20 개)	구체적 (1~3개)	암시적	[활동 1-1]
	일반	1-방향	N개	k개	형식적	[활동 1-2]
2수준	구체	2-방향	구체적 (10-10 개)	구체적 (1~3개)	암시적	[활동 3-1]
	일반	2-방향	M, N개	k개	형식적	[활동 3-2]
3수준	구체	3-방향 이상	구체적 (5-5-5 개)	구체적 (1~2개)	암시적	[활동 4-1]
	일반	3-방향 이상	L, M, N ...개	k 개	형식적	[활동 4-2]
4수준	구체	3-방향	구체적 (3-4-5 개)	무제한	암시적	[활동 5-1]
	일반 종합	3-방향	L, M, N 개	무제한	형식적	[활동 5-2] [활동 5-3] [활동 6]

※ ()안의 수는 특정한 수로 예를 든 것임

2) 투입 과제의 문제 수준

(가) 수준1의 문제

게임의 이해를 위해 제시한 <과제1>은 아래의 [그림 III-1]이다. 또한 <과제1>의 풀이에 필요한 필승



전략 및 풀이를 기록하도록 하였다.

[활동 1-1] 큐브 가져가기 게임의 필승전략 찾기

1.(게임의 이해) 두 사람이 짝을 지어 아래의 <게임 1>을 하면서 각자 승리할 수 있는 방법을 찾아봅시다.

게임 1: 노란색 20개와 검은색 1개의 연결큐브를 서로 끼워둔다. 두 사람이 가위바위보로 순서를 정하고 번갈아 가면서 최소 1개에서 최대 3개까지의 큐브를 가져간다. 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 이긴다.



[그림 III-1] Nim 게임의 기본 과제-문제 수준1

이 과제는 일반화를 위한 출발점이 되는 단계, 일반화를 형성하는 단계, 일반화를 명확하게 하는 단계, 정당화를 위한 단계를 바탕으로 규칙의 일반화와 정당화를 요구하고 있다. 본 과제의 제시와 함께 학생들이 문제를 이해한 뒤 문제의 필승 전략 및 해결전략을 어떻게 일반화 하는지를 살펴보았다. <과제1> 후에 제시되는 <과제2>([그림III-2])는 조건변경을 통하여 문제 상황에서 주어진 변수를 파악하여 일반화를 위한 변수의 처리를 요구하고 있다. 여기서는 학습자들이 문제의 어떤 요소들을 변형하며, 수준1의 문제를 보고 어느 수준의 문제까지 확장하여 변형하는지를 분석하였다.

[활동 2-1] 각자의 생각대로 변형 게임 만들기

(원래의 게임만 보고 내가 변형하여 만들기) 앞의 ‘[활동 1]’에 주어진 게임에서 여러 가지 조건들을 바꾸거나 자신이 생각하는 조건들을 추가하여 변형 게임이나 문제를 만들어 보시오.

[그림 III-2] Nim 게임의 변형문제 만들기 과제-문제 수준1

(나) 수준2의 문제

<과제1>, <과제2>의 수준1의 문제를 1-방향 Nim 게임이라 한다면, <과제3>([그림III-3])에서 제시되는 문제는 2-방향 Nim 게임이다. 1-방향 Nim 게임에서 사용되는 다양한 변수 중에서 가져갈 수 있는 큐브의 방향성을 좀 더 세분화한 것이다. 2-방향 Nim 게임으로 사고의 범위가 확장됨으로서 이



에 요구되는 규칙의 발견 및 풀이의 일반화에 보다 복잡하고 다양한 사고 수준이 요구된다.

[활동 2-2] 예시를 보고 새로운 게임이나 문제 만들기

1.(사례 소개) 다음은 어떤 학생이 만든 변형 게임의 예입니다.

변형 게임의 예(1)

- (1) 가운데에 검은색 큐브를 두고 왼쪽에는 노란색 큐브 7개, 오른쪽에는 빨간색 큐브 13개를 연결한다.



- (2) 두 사람이 번갈아 가면서 왼쪽 또는 오른쪽 중 어느 한쪽 방향에서만 최소 1개에서 최대 3개까지의 같은 색 큐브를 빼간다.
(3) 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.

2.(예시를 보고나서 내가 변형하여 만들기) 위에서 만든 다른 학생의 예를 보면서 힌트를 얻어 새로운 변형 게임이나 문제를 만들어 보시오.

[그림 III-3] Nim 게임의 변형문제 만들기 과제-문제 수준2

(다) 수준3의 문제

<과제1>, <과제2>, <과제3>이 1방향 또는 2방향의 Nim 게임이었다면, 3방향 이상의 Nim 게임의 문제 수준을 수준3이라고 보았다. 이론적 배경 및 선행연구에서 보였던 Nim 게임의 2진수를 활용한 풀이법적 접근은 수학적 추론 및 증명 등의 과정에서 수준2까지의 접근법과는 다른 매우 복잡한 사고 과정이 요구된다.

3) 일반화된 필승전략 찾기 과제

문제수준에 따른 과제의 탐구와 변형문제 만들기 활동을 한 뒤, 각 수준의 과제에 대한 일반화 및 필승전략을 탐구하기 위한 과제를 다음과 같이 제시한다. 이 과제해결 과정에서 보이는 일반화 과정을 관찰·분석하며, 학생 및 집단의 수준에 따라 나타나는 일반화의 유형을 분석한다.

(가) 1-방향 Nim 게임의 일반화

하나의 예로서 제시된 1-방향 Nim 게임에 대하여, n 개의 큐브와 가져갈 큐브의 개수를 k 개로 확장시킬 경우의 <과제4>(그림III-4)를 제시한다.



[활동 1-2] 1-방향 NIM게임의 일반화된 필승 전략

앞에 제시한 게임의 몇 가지 조건을 바꾸어 보면서 1-방향 NIM 게임의 보다 일반화된 필승전략을 찾아 설명해봅시다.

1-방향 NIM 게임의 일반화

<게임 1>의 일반화:

(문제) 위 게임의 **필승전략**과 **필승수**를 찾아 그 해법을 설명하십시오.

[그림 III-4] 1-방향 Nim 게임의 일반화 과제

(나) 2-방향 Nim 게임의 일반화

문제의 수준이 2인 2-방향 Nim 게임을 제시할 경우, 아동의 수준에 따라서 문제를 해결하는 반응 정도가 다르다. 따라서 2-방향의 Nim 게임을 제시한 후의 문제 만들기 활동을 하고, <과제5>(그림 III-5)를 제시하여 모든 참여 학생들이 일반화 과정으로 사고 수준을 높이기 위해 필승수와 필승전략을 먼저 탐구해 보도록 한다.

[활동 3-1] 2-방향 NIM 게임의 필승 전략 찾기

2-방향 NIM 게임

게임 2: 가운데에 검은색 큐브를 두고 왼쪽에는 노란색 큐브 7개, 오른쪽에는 빨간색 큐브 13개를 연결한다. 두 사람이 번갈아 가면서 왼쪽 또는 오른쪽 중 어느 한쪽 방향에서만 최소 1개에서 최대 3개까지의 같은 색 큐브를 빼간다. 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.



(문제) 위 게임의 **필승전략**과 **필승수**를 찾아 그 해법을 설명하십시오.

[그림 III-5] 2-방향 Nim 게임의 일반화 과제 1

이와 같이 필승전략과 필승수를 찾는 과정에서 학습자들은 일반해법 즉, 2-방향 Nim 게임에 대한 일반화를 위한 간단한 규칙이나 전략들에 대하여 사고할 기회를 가진다. 이 과정을 거친 후 곧바로 2-방향 Nim 게임의 일반화를 요구하는 <과제6>인 [그림 III-6]을 제시한다.

**[활동 3-2] 2-방향 NIM게임의 일반화된 필승 전략****2-방향 NIM 게임의 일반화**

<게임 2>의 일반화: 2-방향 NIM 게임에서 좌우에 각각

(문제) 위 게임의 **필승전략**과 **필승수**를 찾아 그 해법을 설명하시오.

[그림 III-6] 2-방향 Nim 게임의 일반화 과제 2

(다) 3-방향 Nim 게임의 일반화

2-방향 Nim 게임과는 다르게 3-방향 이상의 Nim 게임은 필승전략 및 일반화를 위한 사고에 매우 복잡한 규칙이 적용되며, 아주 많은 시간이 소요된다. 그러나 3-방향, 4-방향 등의 배열에 대한 필승전략의 기본 아이디어는 같은 유형의 사고를 필요로 하기 때문에 문제의 수준을 나눌 때에도 모두 같은 3수준의 문제로 분류하였다. 따라서 [그림 III-7]과 같이 3-방향을의 Nim 게임에서도 특정한 수에 대한 필승전략과 필승수를 찾는 사고 과정을 <과제7>에서 경험하도록 하였다. <과제 8>은 각 방향의 큐브 개수를 l , m , n 개, 가져갈 수 있는 큐브의 개수를 k 개로 확장한 [그림 III-8]에서 일반화된 전략을 찾아보도록 하였다. 만약 제한된 시간에 <과제 8>까지의 사고 과정이 전개 되었을 경우에는 일반적으로 널리 알려진 Nim 게임인 XOR해법의 Nim 게임의 원리와 같은 게임의 <과제9>(그림 III-9)를 제시한다. <과제 9>는 가져갈 수 있는 큐브의 개수를 제한하지 않은 게임으로서, <과제 9>의 구조를 전통적인 Nim 게임과 같은 유형의 게임으로 볼 수 있다.

[활동 4-1] 3-방향 NIM 게임의 필승 전략 찾기

1.(확장하기) 가져가는 방향(또는 색)의 개수를 늘려봅시다.

3-방향 NIM게임

게임 3 : 가운데에 검은색 큐브를 두고 세 방향에서 각각 3, 4, 5개의 큐브를 연결한다. 두 사람이 번갈아 가면서 어느 한쪽 방향에서만 1개 또는 2개를 가져간다. 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.



2.(확장된 전략 탐색) 위의 3-방향 NIM게임에서 각 방향에 있는 큐브의 개수와 한 사람이 가져가는 최대 개수를 다양하게 변화시키면서 **필승전략**을 찾아 설명하시오.

[그림 III-7] 3-방향 Nim 게임의 일반화 과제 1



[활동 4-2] 3-방향 NIM게임의 일반화된 필승 전략

3-방향

<게임 3>의 일반화: 가운데에 검은색 큐브를 두고 세 방향에서 각각

(문제) 위 게임의 일반화된 **필승전략**을 찾아 설명하시오.

[그림 III-8] 3-방향 Nim 게임의 일반화 과제 2

또한 <과제 9>(그림 III-9)까지 해결하는 아동이 있을 수 있지만, 대부분의 초등학생이라면 <과제 9>의 해결에 어려움을 보일 것이다. 따라서 <과제 9>에 대한 해법과 관련된 문제의 풀이를 <과제 10>(그림 III-10)에서 제시하도록 한다. 제시된 <과제 10>에서는 Nim Sum의 과정을 이용하여 필승 전략을 구한 2진법적 해결을 토대로 문제해결 및 탐색에 도움을 주고자 하였다.

[활동 5-1] 3-방향 NIM 게임의 또 다른 변형

1.(변형하기) 한 사람이 가져가는 최대 개수에 제한을 두지 않는다면 어떨까?

3-방향 무제한 NIM게임

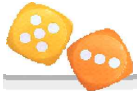
1. 가운데에 검은색 큐브를 두고 세 방향에서 각각 3, 4, 5개의 큐브를 연결한다.
2. 두 사람이 번갈아 가면서 어느 한쪽 방향에서만 자신이 원하는 만큼 마음대로 가져간다.
3. 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.



2.(전략 탐색) 위의 3-방향 NIM게임의 **필승전략**을 찾아봅시다.

[그림 III-9] 3-방향 무제한 Nim 게임

또한 3-방향에 대하여 <과제 7>부터 <과제 10>까지의 종합적인 사고 과정을 통한 3-방향 Nim 게임



에 대한 일반적인 필승전략을 <과제 11>(그림 III-11)에서 기술해 보도록 한다.

[활동 5-2] 3-방향 NIM게임의 해법을 보고 왜 그런지 설명하기

다음은 동재라는 어떤 학생이 발견했다고 하는 해법입니다.

<어떤 풀이> 세 방향으로 주어진 큐브의 개수가 3, 4, 5개일 때 각 큐브의 개수를 2진법으로 나타낸다. 이들을 각 자리값끼리 더하면서 1의 개수가 홀수 개이면 1, 짝수 개이면 0으로 쓴다. 이제 각 자리의 합을 모두 000으로 만들 수 있는 3, 4, 5의 이진법 수에 해당하는 수를 지운다. 그것이 바로 내가 가져갈 큐브의 개수이다.

1. 위의 풀이는 옳은지, 어떤 부분에 잘못되었거나 부족한 부분은 없는지 판단하시오. 옳은 풀이라면 왜 이진법을 사용하였는지 생각해 보시오. 부족한 부분이 있다면 당신이 직접 보충하거나 고쳐 쓰시오.
2. 3-방향의 큐브에서 가져가는 최대 개수가 무제한일 때 선수필승이 될 수 있는 또 다른 조건을 찾아보고 그들의 공통점을 알아봅시다.

[그림 III-10] 3-방향 Nim 게임의 2진법적 풀이 과제

끝으로 <과제 1>부터 <과제 11>까지의 Nim 게임에 대한 활동에서 학생이 갖게 된 생각 및 풀이를 적는 활동을 <과제 12>(그림 III-12)에서 제시하여 활동을 정리하도록 한다.

[활동 5-3] 3-방향 NIM게임의 일반화된 필승 전략 찾기

(일반화) 주어진 큐브의 개수를 늘려가면서 사람이 가져가는 최대 개수에 제한이 없는 3-방향 NIM게임의 일반적인 필승전략을 찾아봅시다.

[그림 III-11] 3-방향 Nim 게임의 일반화된 필승전략 과제



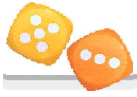
[활동 6] 종합: 큐브 가져가기 NIM게임의 일반화된 필승 전략 찾기

(정리하기) 주어지는 방향의 개수와 큐브의 개수, 한 사람이 갈 수 있는 최대 개수의 제한 여부, 마지막 큐브를 가져가는 사람이 이기는 경우와 지는 경우 등등을 모두 고려하여 앞에서 했던, 큐브 가져가기 NIM게임의 **일반적인 필승전략**을 정리하여 봅시다.

[그림 III-12] Nim 게임에 대한 정리과제

이와 같은 과제들의 과정에서 학습자는 문제에서 제시된 미지수를 조건 변경을 통하여 접근하게 된다. 즉 $N=kQ+r$ 의 조건 속에서 학습자의 특성에 따라서 어떤 곳의 조건 변경을 더 선호하며, 먼저 접근하려 하는지 관찰할 수 있다. 이 때 학습자가 변경할 수 있는 조건 변경의 경우는 정보변경과 구조변경이라는 2가지로 구분할 수 있다. 이에 대한 학습자의 반응을 살펴보고 보다 확장적인 대수적 사고를 위한 반응과 교수-학습 방안들에 대하여 생각해 볼 수 있을 것이다.

본 연구에서 사용된 기본과제는 가져갈 수 있는 큐브의 개수가 3개까지 일 경우, 서로 빼 갈 수 있는 큐브의 수를 n, m 이라 할 때, $n-m$ 이 4의 배수가 되도록 하면 게임에 이길 수 있다. 따라서 학습자가 n, m 과 같은 용어를 사용하지 않더라도 차가 4의 배수가 되는 것을 알아내고, 그것을 어떻게 확장하여 나가는가를 보기로 한다. 이때 문제 해결과정에서 보이는 대수적 사고의 특징들을 관찰하며 주어진 문제의 어떤 조건에 주목을 하여 사고하며, 이러한 사고가 문제 풀이에 어떻게 영향을 주는지 알아본다. 또한 문제를 만드는 전략에서 어떻게 반응을 하는지 알아본다. 아울러 어떠한 조건들을 변경하려 하고, 어떠한 조건 변경을 선호하며 또한 변경된 조건의 문제를 어떻게 해결해 나가는지의 사고 과정을 알아볼 수 있을 것이다.



27차시: NIM 게임을 통한 문제 만들기 지도

1. 모둠 Nim 게임의 해법

모둠 Nim 게임은 두 사람이 번갈아 정해진 규칙에 따라 돌을 가져가다가 마지막돌을 가져가는 사람이 이기는 게임이다. 돌은 몇 개의 모둠에 가로로 몇 개씩 늘어 놓여 있고, 돌을 가져가는 규칙은 한 모뎀을 택해 그 모뎀에서만 원하는 만큼(1개 이상 몇 개라도) 가져갈 수 있습니다. (예)를 들어 설명해 봅시다.

(예) A, B 두 모뎀에 돌이 다음과 같이 각각 3, 5개 놓여있고 갑과 을이 게임을 한다고 하자.

A: OOO

B: OOOOO

갑이 먼저 B 모뎀에서 2개를 가져갔다.

A: OOO

B: OOO

을도 B 모뎀에서 2개를 가져갔다.

A: OOO

B: O

이번엔 갑이 A 모뎀에서 2개를 가져갔다.

O

O

그러면 을이 어느 쪽 돌을 가져가도 갑이 마지막돌을 가져가면서 이기게 된다. 이렇게 두 모뎀인 Nim 게임은 두 모뎀의 길이(개수)를 계속 똑같이 맞추는 사람이 이기게 된다.

여기서 'Nim sum'이란, 세 모뎀의 돌 수를 이진수로 나타낸 다음 그것들의 XOR연산을 구하는 것이다. XOR 연산은 각 자리의 이진수들을 더하여, 이진수의 0 또는 1이 짝수개이면 0이고, 홀수개이면 1이 되도록 약속하는 연산규칙이다.

$$0 \text{ xor } 0 = 1 \text{ xor } 1 = 0,$$

$$1 \text{ xor } 1 = 1 \text{ xor } 0 = 1.$$

이 XOR의 결과를 Nim sum이라한다.

모뎀이 3개 이상인 Nim 게임에서는 일반적으로 Nim sum을 이용하여 계산한다. 예를 들어, 처음 3, 5, 7을 이진수로 나타내면 각각 011, 101, 111이고, 이 셋의 XOR, 즉 nim sum은 001인 것이다.

$$\begin{array}{r} 011 \\ 101 \\ 111 \text{ (xor합)} \\ \hline 001 \end{array}$$

이제 다음과 같이 3개의 모뎀에 돌이 각각 3, 5, 7개 있는 경우에 대해 살펴보자.

OOO

OOOOO

OOOOOOO



모둠이 3개 이상 있는 Nim 게임의 전략은, 각 모둠의 돌의 개수를 2진법으로 쓴 후 그 수들을 같은 자리끼리 더한 XOR합이 0이 되도록 계속 맞추는 것이다.

3, 5, 7의 XOR 연산에서 2^0 의 자리에는 1이 세 개, 즉 홀수이므로 XOR합은 1이 되고, 10의 자리와 100의 자리에는 1이 두 개씩 있으므로 짝수 개여서 XOR합이 0이 된 것이다. 즉, 이 경우에는 XOR합이 000이 되도록 7개 있는 모둠에서 돌을 1개 가져가야 한다.

$$\begin{array}{r} 011 (=3) \\ 101 (=5) \\ 110 (=6) \text{ (xor합)} \\ \hline 000 \end{array}$$

만일 다음 상대방이 가운데 모둠에서 4개를 가져갔다면

000
O
000000
의 상황이 되고, 이것은

$$\begin{array}{r} 011 \\ 001 \\ 110 \text{ (xor합)} \\ \hline 100 \end{array}$$

으로 계산되므로 마지막 모둠의 6개에서 4개를 가져가 xor합이 0이 되도록 만들어야 한다.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 01 \\ 10 \text{ (xor합)} \\ \hline 00 \end{array}$$

이제 돌은 각 모둠에 각각 3, 1, 2개 있고, 이제는 상대방이 어떻게 가져가든 모둠이 2개인 Nim 게임으로 만들어 굳이 계산하지 않더라도 쉽게 이길 수 있다. 모둠이 2개인 Nim 게임에서 두 모둠의 돌의 개수를 똑같이 만든다는 것도 xor합이 0이 되도록 하는 것과 같은 원리이다.

정리: Nim게임은 zero sum 게임의 일종입니다. 즉, 이길 수 있는 최종 결과(zero, 평형상태)를 만들어 놓고 상대방이 어떻게 게임을 하던 나에게 주어진 것을 조절하면서 계속 최종 결과(zero, 평형상태)에 맞춰갈 수만 있으면 이기는 것입니다.

Nim게임은 zero sum 게임의 일종입니다. 즉, 이길 수 있는 최종 결과(zero, 평형상태)를 만들어 놓고 상대방이 어떻게 게임을 하던 나에게 주어진 것을 조절하면서 계속 최종 결과(zero, 평형상태)에 맞춰갈 수만 있으면 이기는 것입니다.

일반적인 Nim 게임은 마지막돌을 가져가는 사람이 이기는 것이었는데 반해, 마지막돌을 가져가는 사람이 지는 것으로 한다면 어떨까요?

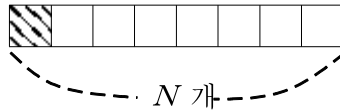
마지막 돌을 가져가는 사람이 지는 Nim 게임의 전략은 일반적인 Nim 게임과 같은 전략인 'xor합을 0으로 만들기'를 계속 쓰다가 모든 모둠의 돌의 개수를 처음으로 모두 1개 이하로 만들게 될 때, 짝수 개의 1이 아닌 홀수 개의 1을 남기는 것으로 바꾸면 됩니다. 간단한 경우로 모둠이 2개일 때에는, 계속 두 모둠의 돌의 개수를 똑같이 맞추다가, 상대방이 어느 한 모둠의 돌의 개수를 0개 혹은 1개로 만들면 내 차례에서 그 모둠과 같은 개수로 만드는 것이 아닌 다른 모둠의 돌의 개수를 1개 혹은 0개로 만들면 됩니다.



2. 방향 Nim 게임의 해법 분석

방향 Nim 게임은 가운데 큐브(검은색)을 하나 두고 여러 방향으로 큐브를 쫓아 모듈로 구분하는 방식으로 결국은 모듈로 Nim 게임의 해법과 동일하다. 하지만 좀 더 구체적인 해법을 탐구해 볼 수 있습니다.

가) 1-방향 Nim 게임의 필승전략(단, 검은색을 가져가야 이기는 게임일 때)



※ 한 번에 가져갈 수 있는 최대 개수 : k 개일 때

$N = (k+1)Q + r$ 에서

i) $r > 0$; 先手필승전략 있음. 필승수 = r .

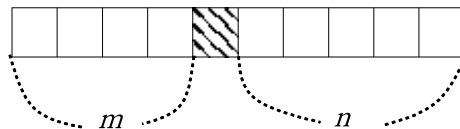
先手が r 개만큼 가져가고 後手로부터 넘겨받고 남은 개수(N')에 대하여 $N' = (k+1)Q' + r'$ 의 r' 개만큼 가져간다. 즉 상대가 가져간 개수(l)와 내가 가져갈 개수(m)에 대하여 $l + m = k+1$ 이 되도록 한다.

ii) $r = 0$; 後手필승전략 있음.

먼저 상대방이 가져가도록 하여 $N' = (k+1)Q' + r' (r' > 0)$ 인 상황을 만든 뒤 r' 개만큼 가져간다. 그 뒤부터는 상대가 가져간 개수(l)와 내가 가져갈 개수(m)에 대하여 $l + m = k+1$ 이 되도록 가져가면 된다.

(보충) '마지막 큐브를 가져가는 사람이 지는 게임'이라면 검은 색을 제외한 $N-1$ 개의 큐브 중 마지막 큐브를 가져가는 사람이 이기는 게임의 해법과 동일하므로 가운데 검은색 큐브를 뺀 개수만 세어도 됨.

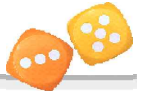
나) 2-방향의 큐브 배열 (단, 검은 색을 가져가면 지는 게임일 때)



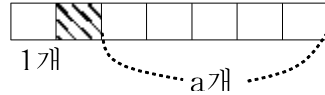
※ 한 번에 가져갈 수 있는 최대 개수 : k 개일 때

$|m - n| = (k+1)Q + r$ 에서

i) $r > 0$; 선수필승전략 있음. 필승수 = r .



($N = m + n$ 이라고 할 때) 선수가 r 개만큼 가져가고, 후수로부터 넘겨받고 남은 개수(N')에 대하여 $N' = (k+1)Q' + r'$ 의 r' 개씩 가져간다. 이 때, 가져가는 위치는 $m = (k+1)Q_1 + r_1$, $n = (k+1)Q_2 + r_2$ 중에서 $r_1 - r' = r_2$ 또는 $r_2 - r' = r_1$ 이 되는 쪽에서 가져간다. 매번 이와 같은 방법으로 계속 가져가면 된다. 단, 한 쪽의 큐브가 없어졌을 때, 즉 마지막으로 가져가야 할 1개의 큐브와 a 개의 큐브가 남았다면(아래의 그림)



$a+1 = (k+1)Q_n + r_n$ 의 r_n 개씩 가져가야 한다.

ii) $r = 0$; 후수필승전략 있음.

먼저 상대방이 가져가도록 하여 $N' = (k+1)Q' + r' (r' > 0)$ 인 상황을 만든 뒤 $r > 0$ 인 경우의 해법대로 해결한다.

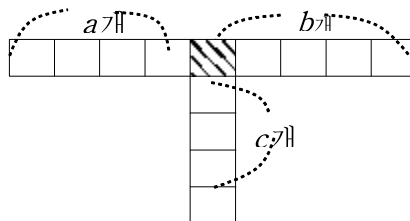
(보충)한 번에 가져갈 수 있는 개수가 무제한이라면 나머지만 따져도 됨.

즉, $|m - n| = r$ 에서

i) $r \neq 0$ 인 경우 ; 선수필승. 필승수 = r .

ii) $r = 0$ 인 경우 ; 후수필승.

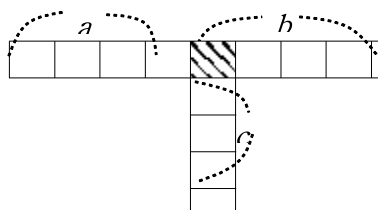
3-1. 3-방향의 큐브 배열(단, 가운데 큐브를 가져가면 질 때)



※가져갈 수 있는 큐브의 최대 개수: k 개 일 때

- (1) 세 방향 중에서 한 방향의 큐브 개수가 $(k+1)$ 의 배수이면 2-방향 Nim 게임과 같아진다. 따라서 한 방향의 나머지가 0이 되도록 한 다음, 나머지는 2방향의 Nim 게임 해법을 응용하면 이길 수 있다. 이와 같은 상태를 안정된 상태라고 볼 수 있다.
- (2) 세 방향의 나머지가 0이 아니더라도 두 방향의 나머지가 같으면 이 둘은 이미 평형을 이루므로 한 방향 게임과 같다.
- (3) 세 방향의 나머지가 모두 서로 다른 경우만 해결하면 된다. 이 경우는 내 차례에서 평형을 깨뜨리지 않도록 해야 한다.

3-2. 3-방향의 큐브 배열 (단, 검은 색을 가져가야 이기는 게임일 때)



**(1) 개수를 마음대로 가져갈 수 있을 때****[방법1]** X-O-R게임의 이론적 해법에 근거한 풀이2진수에 대한 연산 $\oplus$ 와 $\&$ 를 다음과 같이 정의하자.

$\wedge$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\&$	0	1
0	0	0
1	0	1

(1) a 개, b 개, c 개의 큐브가 있다고 할 때, $a \wedge b \wedge c = X$ 라 하자.

$X \& a$, $X \& b$, $X \& c$ 중에서 가장 큰 수에서 큐브를 가져간다. 이 때 가져갈 큐브의 개수는 다음과 같다. 가령, $X \& a$, $X \& b$, $X \& c$ 중에서 가장 큰 수가 $X \& a$ 라고 한다면, a 개의 큐브에서 $(a - b \wedge c)$ 개의 개수만큼 제거하면 된다. 이와 같은 방식으로 계속 진행하면 이길 수 있다.

예) 3, 4, 5개의 큐브가 있다.

$$3_2 = 011$$

$$4_2 = 100$$

$$5_2 = 101$$

$$\begin{array}{r} X = 3 \wedge 4 \wedge 5 = 011 \\ 100 \\ + 101 \\ \hline 010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X \& 3 = 010 \\ + 011 \\ \hline 010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X \& 4 = 010 \\ + 100 \\ \hline 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X \& 5 = 010 \\ + 101 \\ \hline 000 \end{array}$$

010, 000, 000의 세 수중 가장 큰 수가 $X \& 3$ 이므로, 3개의 큐브에서 $3 - (4 \wedge 5) = 3 - (001)_2 = 3 - 1 = 2$ 개의 큐브를 빼낸다. 결과적으로 큐브의 배열이 "145"가 되고, 상대방이 몇 개의 큐브를 어디에서 빼가든 0-k-k(큐브가 $a=0$ 개, $b=k$ 개, $c=k$ 개)의 배열이 되도록 만들어서 넘기면 반드시 이길 수 있다. 이는 $(3)_2$, $(4)_2$, $(5)_2$ 의 합 즉 $3 \wedge 4 \wedge 5$ 의 값이 '0'이 되도록 만들어야 이길 수 있기 때문이다.

[방법2] 2진수로 간단히 생각하여 풀기

예를 들어 설명하면,

3, 4, 5개의 큐브가 있다고 하자. 각각의 2진수 표기는

$$3_2 = 011$$

$$4_2 = 100$$



$$5_2 = 101 \text{ 이다.}$$

이 때, 세 수의 합(Nim sum)은

$$\begin{array}{r} 011 \\ 100 \\ + 101 \\ \hline 010 \end{array}$$

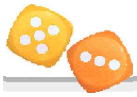
여기서 합인 '010'에서 둘째자리의 '1'이 '0'이 되기 위해서 바꿔 줘야할 큐브의 위치를 결정한다. 그러면 3의 2진수인 '011'의 수를 조정해야만 하며, 이때 가능한 방법으로 '011'을 '001'로 바꾸는 것을 생각할 수 있다. 2진수의 둘째자리의 1은 $2^1=2$ 이므로, 3개인 큐브에서 2개의 큐브를 먼저 제거하면 된다. 즉, 선수필승이 가능하며, 필승수는 2이다.

4. n-방향의 큐브 배열(단, 가운데 큐브를 가져가면 질 때)

(1) 가져갈 수 있는 큐브의 최대 개수가 k 개 일 때 : 몫과 나머지 방법

큐브의 개수가 각각 $l, m, n \dots$ 개. $(l+m+n+\dots) = (k+1)Q + r_a$, $|l-m|$
 $= (k+1)Q_1 + r_1$, $|m-n| = (k+1)Q_2 + r_2$, $|l-n| = (k+1)Q_3 + r_3$, $\dots$ 이라 하고,
 $r_1, r_2, r_3, \dots$ 에 대하여 $(k+1)$ 의 배수가 되는 수를 r_p , 배수가 되지 못하는 수를
 r_q 라 하자. (이 때 4개 이상의 수에 대하여 차가 $(k+1)$ 의 배수가 되는 수들이 존재한
 다.) 여기서 그 차가 $(k+1)$ 의 배수가 되지 않는 r_p 관계의 수를 제외한 나머지 큐브의
 개수를 조절하여 안정된 상태의 배열로 만들어 간다.

(2) 가져갈 수 있는 큐브의 최대 개수가 무제한 일 때 : 이진수 XOR방법



28차시: 러시아워게임

학습 안내



본 활동은 전후좌우로 막혀 있는 교통체증 상황에서 빨간 자동차를 출구로 빼내는 ‘러시아워 게임(Rush Hour Traffic Jam Game)’입니다.

‘러시아워 게임’은 1997년 멘사(Mensa)에서 선정하는 올해의 게임으로 추천되기도 했으며, 교통 체증이라는 실생활 상황과 자동차라는 친숙한 소재를 사용하여 제작된 보드게임입니다. 이 게임은 초급, 중급, 고급의 수준별로 구성된 문항카드로 제시된 문제 상황을 거꾸로 풀기라는 논리사고력, 의사결정력, 기억력을 활용하여 집중력과 인내심을 가지고 해결해야만 하는 재미있는 게임입니다. 적용 대상의 수준이나 상황에 맞게 이 게임의 조건이나 규칙을 여러 가지 방식으로 변경하여 나만의 창의적인 게임도 고안해 봅시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 기능의 측면)** 러시아워 게임의 규칙을 이해하고 각 단계별 문제 상황 카드에 제시된 러시아워 상황을 해결 할 수 있습니다.
2. **(기능과 활동의 측면)** 기억력과 판단력, 의사결정력을 발휘하여 문제를 해결할 수 있게 됩니다.
3. **(수학적 사고의 측면)** 거꾸로 풀기라는 논리사고력이 향상되며 ‘What if ~(not)?’ 전략을 활용하여 창의적인 러시아워 게임을 만들고 평가할 수 있습니다.
4. **(태도와 의지의 측면)** 러시아워 문제 상황을 해결하는 과정을 통하여 집중력과 인내심, 문제 해결의 성취감을 가지게 되고, 변형 러시아워 게임에 대한 개발 의지와 태도를 갖게 됩니다.



학습 내용

1. 러시아워(Rush Hour Traffic Jam Game) 게임

‘러
대로
사에
Yosh
내에
많은
받았
천되



Sam Loyd 상(퍼즐 관련 상)을 받고 있는
Nob Yoshigahara

사 용
의 적

활동을 통하여 다양한 사고력을 함양할 수 있어 미국과
엘 초등학교에서 학생들의 사고력 훈련 프로그램으로 많
있다고 합니다.

게임 방법은 전후좌우로 막혀 있는 교통체증 상황에
차를 출구로 빼내어 탈출 시키면 됩니다. 단순한 게임 규
양한 러시아워 상황을 문제 카드에 초급, 중급, 고급의
성하여 제시하고 있어 각 단계별로 집중력과 인내심을 가지고 해결해야만 합니다. 이러한 게임 활동
을 통하여 논리사고력, 의사결정력, 작업 기억 이용 능력, 계획과 실행능력, 문제 해결의 성취감 등
을 획득할 수 있는 재미있는 게임입니다.

시아워 게임(Rush Hour Traffic Jam Game)은 단어의 뜻 그
‘교통 체증’을 소재로 한 게임으로 미국의 두뇌 게임 전문회
서 일본의 유명 퍼즐 발명가인 노부 요시가하라(Nob
igahara)라는 사람이 만들었습니다. 게임이 제작된 이후 미국
서 매년 높은 판매율을 자랑하고 있을 뿐만 아니라 전 세계
어린이들의 사랑을 받고 있습니다. 또한 각종 퍼즐 관련 상을
는데 1997년 멘사(Mensa)에서 선정하는 올해의 게임으로 추
기도 했습니다.

교통 체증이라는 실생활 상황과 자동차라는 친숙한 소재를
하여 제작된 보드
인 문제 해결을



게임으로, 창
모색 해 보는
유럽, 이스라
이 활용되고

서 빨간 자동
칙이지만 다
수준별로 구

2. 러시아워의 구성과 게임방법

- (1) 구성: 문제 상황 카드(초급, 중급, 전문가급 각 10매씩 총 40매), 교통 도로판,
자동차 16대, 제품 보관 상자 및 보관용 주머니





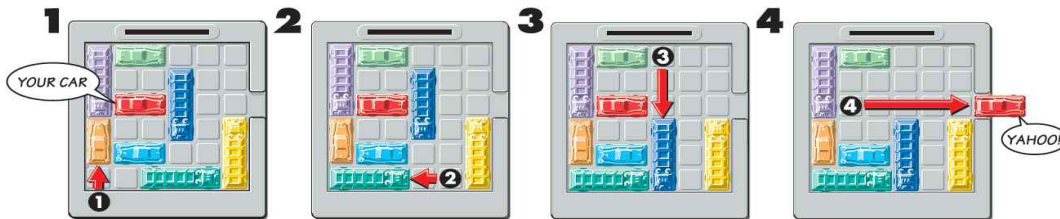
(2) 게임 방법

1 각 수준별 문제 상황 카드 중 원하는 것을 한 장 선택한 후 교통 도로판 위 에 쏙습니다.
(단, 수준은 단계별로 도전하는 것이 좋습니다.)

2 문제 상황 카드 안에 있는 똑같은 모양과 색깔을 가진 자동차를 카드 그림 서 위치에 맞게 올려놓습니다. 특히 빨간 차의 위치에 유의합니다.

3 자동차들을 상하좌우로 움직여서 빨간 차를 교통 도로판 오른쪽에 있는 출구로 빼내면 탈출 성공입니다.(단, 모든 자동차들은 교통 도로판 위에 놓인 위치에서 전진, 후진으로만 움직일 수 있습니다.)

<탈출 성공의 예>



※게임 방법 소개 동영상: <http://www.puzzles.com/products/RushHour/RushHourVideo.htm>

※ 게임 방법 소개 애니메이션: <http://www.puzzles.com/products/RushHour/RushHourAnm.htm>

3. 러시아워 게임 체험하기

(1) 기본 게임

<http://www.puzzles.com/products/RushHour/RHfromMarkRiedel/Jam.html>

<게임 방법>

1 화면의 하단 부분에 제시된 수준 별 문제 상황 중 한 개를 골라서 클릭합니다.

Beginner	Intermediate	Advanced	Expert
Jam 1	Jam 11	Jam 21	Jam 31
Jam 2	Jam 12	Jam 22	Jam 32
Jam 3	Jam 13	Jam 23	Jam 33
Jam 4	Jam 14	Jam 24	Jam 34
Jam 5	Jam 15	Jam 25	Jam 35
Jam 6	Jam 16	Jam 26	Jam 36
Jam 7	Jam 17	Jam 27	Jam 37
Jam 8	Jam 18	Jam 28	Jam 38
Jam 9	Jam 19	Jam 29	Jam 39
Jam 10	Jam 20	Jam 30	Jam 40

2 자동차들을 전진, 후진으로 움직여서 빨간 차를 교통 도로판 오른쪽에 있는 출구로 빼내면 탈출 성공입니다.

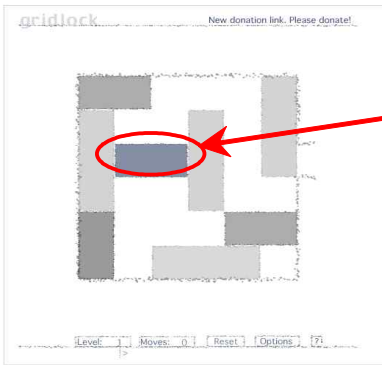




(2) 이동 횟수를 알 수 있는 러시아워 게임

<http://www.corwin.ca/gridlock/>

<게임 방법>

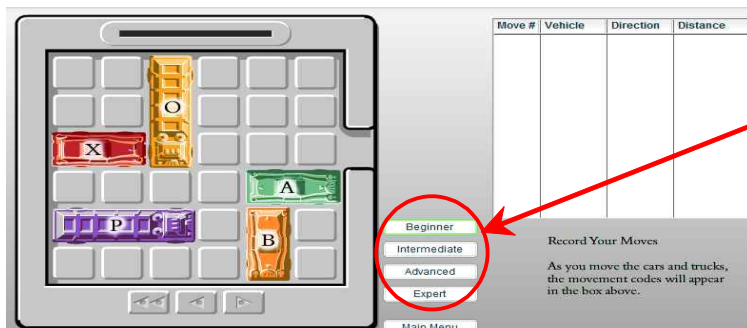


러시아워와 방법은 같습니다. 이 게임에서는 블록들을 움직여서 파란색 블록을 오른쪽 탈출구로 빼내면 됩니다. 각 블록을 움직일 때마다 이동 횟수가 나타나므로 몇 번 만에 이동하여 탈출하는지 알 수 있습니다.

(3) 최소 이동 거리로 탈출하는 러시아워 게임

<http://puzzler.webfactional.com/RushHour/tester/31,197,283,8/>

<게임 방법>



1 화면의 중앙 부분에 제시된 수준 중 한 개를 골라서 클릭합니다.



2 자동차마다 기호가 기입되어 있으며, 자동차를 움직일 때마다 움직인 자동차의 거리가 자동으로 숫자로 기록됩니다.

★한 마디: 단순히 성공이나 실패의 결과만 아니라 최소이동경로를 통해 가장 좋은 해법을 탐구해 볼 수 있는 서비스를 제공해 주는 것은 게임이나 퍼즐탐구 활동에서 매우 중요합니다.

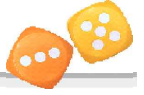


학습 정리

1. ‘러시아워 게임(Rush Hour Traffic Jam Game)은 미국의 두뇌 게임 전문회사에서 일본의 유명 퍼즐 발명가인 노부 요시가하라(Nob Yoshigahara)가 만든 것으로 단어의 뜻 그대로 ‘교통 체증’을 소재로 한 게임이다.
2. 러시아워 게임은 집중력과 인내심을 가지고 각 문제 상황을 해결하는 과정을 통하여 논리사고력, 의사결정력, 기억력, 문제 해결의 성취감 등을 획득할 수 있어 사고력 훈련 프로그램으로 많이 활용되며, 1997년 멘사(Mensa)에서 선정하는 올해의 게임으로 추천되기도 했습니다.
3. 러시아워 게임은 먼저 각 수준별 문제 상황 카드 중 원하는 것을 한 장 선택한 후 교통 도로판 위에 끼고, 문제 상황 카드 안의 그림에 제시된 똑같은 모양과 색깔을 가진 자동차를 위치에 맞게 올려놓고, 자동차들을 전진, 후진 방향으로 움직여서 빨간 차를 교통 도로판 오른쪽에 있는 출구로 빼내면 성공입니다.
4. 기본 게임과 변형된 게임을 통해 게임 해결을 위한 전략과 ‘What if~(not)’ 전략을 배울 수 있습니다.



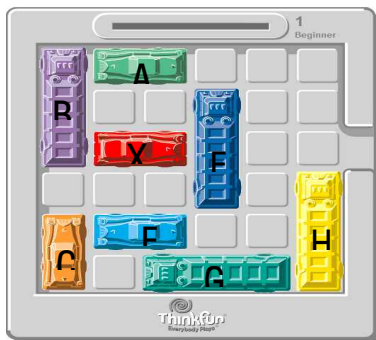
학습 평가



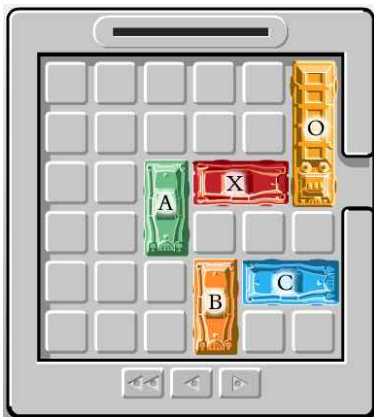
1. 다음 중 러시아워 게임에 대한 설명으로 옳지 못한 것을 고르시오.

- ① 러시아워 게임은 '교통 체증'을 소재로 한 게임이다.
- ② 1997년에 멘사(Mensa)에서 지정하는 올해의 게임으로 선정되기도 했다.
- ③ 빈 칸에서 움직일 공간만 있다면 자동차의 방향도 바꿀 수도 있다.
- ④ 러시아워 상황은 초급, 중급, 고급과정의 단계별로 다른 수준으로 구성되어 제시된다.
- ⑤ 'What if~(not)' 전략에 따라 자동차의 종류나 교통 도로판을 변형하여 다른 종류의 게임으로 재구성 할 수도 있다.

2. 다음 왼쪽 그림에 제시된 러시아워의 문제 상황입니다. 빨간 차의 탈출을 위해 맞게 움직인 것을 고르시오.(단, L은 왼쪽, R은 오른쪽, U는 위쪽, D는 아래쪽 방향, 숫자는 움직인 칸수를 의미합니다.<예>AR1-A를 오른쪽으로 1칸 이동)



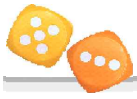
- ① CU1-GL2-ED2-XR5
- ② GL1-CU1-ED1-XR5
- ③ ED1-GL1-CU2-XR5
- ④ HU3-ED2-CU1-XR5
- ⑤ BD1-GL2-ED1-XR5



3. 다음 아래 그림의 최소 이동 거리를 구하시오.

(단, 거리는 움직인 칸수의 합을 말한다.)

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15



29차시: 러시아워게임을 통한 변형 게임 만들기 지도

학습 안내



본 활동은 지난 시간에 학습한 ‘러시아워 게임’을 ‘What if ~(not)’ 전략을 적용하여 새롭게 재구성해 봅시다. 기본 게임으로부터 어떻게 변형 게임을 만들 수 있는 지 그 방법과 기본 요소들을 살펴보면서 학생들에게 나만의 러시아워 게임을 만들게 할 수 있는 지도 방법을 연구해 봅시다.

학습 목표

이 강좌를 통해 여러분은

1. **(지식과 기능의 측면)** 러시아워 게임의 규칙을 이해하고 각 단계별 문제 상황 카드에 제시된 러시아워 상황을 해결 할 수 있습니다.
2. **(기능과 활동의 측면)** 기억력과 판단력, 의사결정력을 발휘하여 문제를 해결할 수 있게 됩니다.
3. **(수학적 사고의 측면)** 거꾸로 풀기라는 논리사고력이 향상되며 ‘What if ~(not)?’ 전략을 활용하여 창의적인 러시아워 게임을 만들고 평가할 수 있습니다.
4. **(태도와 의지의 측면)** 러시아워 문제 상황을 해결하는 과정을 통하여 집중력과 인내심, 문제 해결의 성취감을 가지게 되고, 변형 러시아워 게임에 대한 개발 의지와 태도를 갖게 됩니다.
5. **(학습지도의 측면)** 이상의 학습목표를 학생들도 성취할 수 있도록 지도하는 방법과 수업에서 활용할 수 있는 몇 가지 소재를 배우게 됩니다.



학습 내용

러시아워 게임은 'What if~(not)' 전략에 따라 주인공 차(빨간 차), 탈것들의 종류, 도로 교통판의 크기, 게임 참여 인원, 게임의 경쟁 방식을 수정 또는 변경할 수 있습니다. 자신의 수준이나 학습 상황에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많아 이미 많은 종류의 다른 게임 방식이 제품으로 만들어져 출시되기도 했습니다. 이러한 내용을 수학 수업에 적용하여 다양한 방식으로 활용할 수 있는 Re-Creation 게임입니다. 'What if~(not)' 전략에 따른 각 질문에 따라 가능한 해답을 먼저 생각해 봅시다. 그리고 나서 **(예시)** 아이콘을 눌러 가능한 답안을 확인해 봅시다.

1. 변형 러시아워 게임 만들기

<기본 러시아워 > 초급, 중급, 고급, 전문가의 각 단계별로 10개씩 모두 40개로 구성된 카드에 제시된 문제 상황에서 빨간 차를 오른쪽 출구로 빼내는 것

가. 자동차의 모양 변형하기

(질문 1) 주인공차는 왜 항상 빨간색일까?

(예시) 기본 게임의 주인공 차는 빨간 색입니다. 'What if~(not)' 전략을 적용하여 다른 종류의 주인공 차를 만들어 이미 출시된 제품이 있습니다. 확장판 시리즈라 하여 좀 더 어려운 교통 체증 상황을 주고 주인공 차를 빨간 색의 오픈 카, 기존의 것보다 길이가 좀 더 긴 하얀색의 리무진 카, 노란 택시 등으로 변경하였습니다. 또는 주인공 차를 아이스크림 차로 변경하여 문제 상황을 더 쉽게 만든 것도 있습니다. 여러분이라면 어떤 것으로 변경하고 싶은 지 생각하여 봅시다.



(질문 2) 왜 러시아워에는 자동차들만 등장하지? 자동차 이외의 것들로 변경할 수는 없을까?

(예시) 러시아워 게임의 기본형에서는 트럭(4대), 승용차가(11대)가 등장합니다. 이것을 다른 것으로 변경한다면? 이런 생각을 적용하여 게임 제품으로 출시된 것이 있습니다. 자동차가 아닌 기차로, 교통 체증이 아닌 사과리 체험을 하는 자동차가 동물들로 둘러싸인 곳을 탈출하는 상황으로 변경할 수 있습니다. 재미있는 생각들을 추가하여 새로운 유형의 러시아워 게임을 만들어 봅시다.



(질문 3) 자동차를 좀 더 간단하게 만들 수는 없을까?



(예시) 대부분의 러시아워 게임은 입체로 만들어져 있습니다. 이것을 게임의 규칙은 동일하게 유지하면서 보관하기 편리하도록 좀 더 단순하게 만들 수는 없을까 생각해본 것입니다. 이미 여러분이 체험한 온라인 게임도 이러한 생각을 적용해 만든 것입니다. 온라인 게임뿐 아니라 교실에서 학생들이 직접 자신의 아이디어를 반영한 러시아워 게임을 제작할 수 있습니다.



<http://alpha.uhasselt.be/Research/Algebra/Members/pytraffic/>



여러분이라면
어떻게?



2. 게임판 변형하기

(질문 1) 왜 게임 판의 사이즈는 6×6이어야만 할까? 게임 판의 크기를 변경한다면?

(예시) 러시아워의 게임 판의 크기는 일반적으로 6×6입니다. 이것을 좀 더 크게 확장한다면 또는 축소한다면 게임의 방법은 또 달라 질 수 있습니다. 기차 러시아워 게임은 7×7의 게임 판이 등장합니다. 게임의 변경 내용에 따라 어떻게 상황이 바뀔 수 있을지도 생각해 보세요.

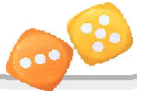


여러분이라면
어떻게?



(질문 2) 출구는 왜 하나 뿐인가?

(예시) 러시아워의 게임 판의 출구는 하나 뿐입니다. 그러나 상하 방향으로 움직이는 어떤 자동차를 먼저 빼내고 여유가 생기도록 하여 오른쪽으로 빼내는 방법도 가능합니다. 따라서 출구를 두 곳으로 둘 수도 있습니다.



3. 게임 규칙 변형하기

(질문 1) 러시아워 게임은 왜 혼자서만 하지?

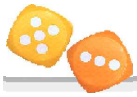
(예시) 원래 러시아워 게임은 혼자서 푸는 퍼즐입니다. 이것을 다른 사람과 경쟁하는 게임 또는 협동하는 게임으로 만들 수 있습니다.

예를 들어, (1)경쟁하는 게임의 경우: 특별히 지정한(홀수, 짝수, 끝자리가 7번 등) 문제 상황 카드를 누가 더 빨리 해결하는 지를 대항합니다. 또는 각자 문제를 만들어 놓고 상대방이 해결하도록 합니다. 이 때 상대방에게 내 톤 문제가 풀리지 않는 것이라면 그 문제를 만든 사람이 벌점을 받습니다.

(2) 협동하는 게임의 경우: 몇 명이 한 조가 되어 같은 문제 상황을 세팅해 놓고 차례대로 문제를 해결해 나갑니다. 이 때 다른 사람의 문제 해결 방법을 보면서 눈으로 익히고 더 좋은 방법을 서로 이야기 하면서 해결할 수 있습니다. 이처럼 다양한 게임 운영 방식을 적용하면 사회적인 대화기술 및 협동력, 성취감을 배가 시킬 수 있습니다.

(질문 2) 좌우 또는 상하의 직선이 아니라 칸이 비어있으면 좌우상하 어디로나 움직일 수 있다면?

(예시) 사파리 러시아워처럼 폭이 넓은 자동차는 좌우, 상하로도 움직일 수 있듯이 폴리큐브 조각들을 배치해 두고 좌우상하로 움직이면서 지정된 모양을 빼 낼 수도 있습니다.



학습 정리

1. 러시아워 게임은 'What if~(not)' 전략에 따라 주인공 차(빨간 차), 탈것 판의 크기, 게임 참여 인원, 게임의 경쟁 방식을 수정 또는 변경할 수 있 수준이나 학습 상황에 맞게 놀이를 재구성할 수 있는 여지가 많습니다.



들의 종류, 게임 습니다. 자신의

2. 러시아워 게임에서 'What if~(not)' 전략을 적용하여 새롭게 변형해 보면 다음과 같습니다.

조건	기본형 러시아워	변형 러시아워
카드 추가하기	초급, 중급, 고급, 전문가용 각 10장 (총 40장)	추가로 문제 상황을 더 만들 수 있음.
자동차 변형하기	2칸의 빨간색 차	주가팩(빨간 오픈카, 흰색 리무진, 노란택시 등)
	2칸의 자동차, 3칸의 트럭	아이스크림차, 사파리 자동차, 기차
	입체형 자동차	평면형으로 보관하기 쉽게 변형
게임판 변형하기	6×6 칸	7×7 칸
	정사각형	직사각형으로 만들거나 구석에 별도의 주차 공간을 둘 수도 있음.
	출구가 한 곳	출구를 두 곳을 둘 수 있음.
규칙 변형하기	카드 번호순으로 혼자 주어진 자동차를 빼냄	카드가 많으므로 시간 내에 홀(짝)수번만 가장 빨리 빼내는 개인 게임이나 4~6명의 모둠원 이 주어진 시간 내에 아무나 만들면 그 카드는 통과하는 단체 게임
	빼내기 성공	최소이동횟수를 구함
	좌우 또는 상하로 이동	폴리큐브의 모양들을 배치하고 지정된 조각을 빼 냄



3. 지금까지 학습한 내용을 바탕으로 그 활동에서 익혔던 'What if ~ (not)?' 전략을 사용하여 생활 속에서 여러 가지 게임의 규칙이나 조건을 바꾸어 새롭게 변형해 볼거리가 있는지 찾아봅시다.



학습 평가

1. What if ~ (not)? 전략을 적용하여 러시아워 게임을 변형하려고 합니다. 다음 <보기>에 제시된 목적에 맞게 변형한 것을 고르시오.

<보기>

각각의 자동차는 꼭 지정된 방향으로만 옮겨야할까? 좌우, 상하의 방향으로 모두 옮길 수는 없을까?

①



②



③



④

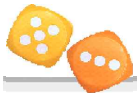


⑤



2. 'what if?/ 'what if ~not?' 전략을 적용하여 러시아워 게임을 만들어 봅시다. 자신이 개발한 게임에 대한 자기평가표입니다. 각 평가 요소에 대한 자신의 성취도를 그 달성 정도에 따라 '상', '중', '하'의 적당한 칸에 '✓' 표시를 하시오.

평가요소	자기평가		
	상	중	하
(1)(기능적인 면) 게임의 놀이 방법을 바르게 이해하고 게임을 할 수 있었다.	3	2	1
(2)(사고적인 면 1) 거꾸로 풀기와 같은 문제해결 전략이나 수학적 사고력을 이용하여 문제를 해결할 수 있었다.	3	2	1
(3)(창의적인 면 2) 변형 게임을 만들 때 구성 요소(자동차, 게임판, 규칙 등)에 'what if (not)?'의 전략을 적용하면서 쉽게 만들 수 있었다.	3	2	1
(4)(태도와 의지적인 면) 생활 속의 다른 놀이에 들어있는 수학적 사실이나 규칙을 변형하여 수학적 재창조(Re-Creation)를 해 보려는 마음가짐과 자신감, 욕구가 생겼다.	3	2	1
(5)(학습지도의 면) 변형 러시아워를 만들 수 있도록 지도하는 방법을 알고 응용할 수 있게 되었다.	3	2	1
원인분석: 가장 낮게 나온 평가 항목에 대해서는 그 원인을 분석해 봅시다.	합계		
	판정	위의 자동행계가 15점이면 탁월 14점이면 훌륭 12-13이면 우수 10-11이면 보통 9이하이면 좀 더 노력	



30차시: Wake up your brain, *fun fun* Re-Creation Math

학습 안내

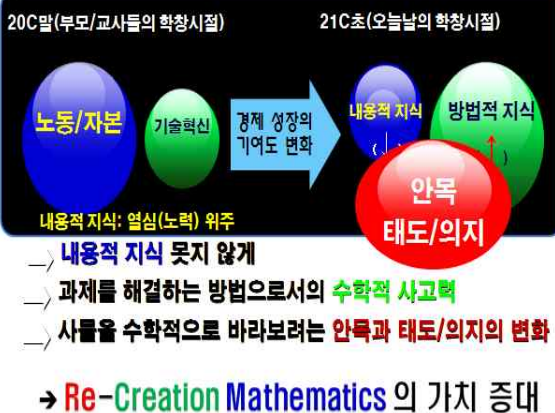
이 강좌는 ‘레크리에이션 활동을 통한 리크리에이션 수학’이라는 주제로 30차시분의 내용으로 구성되어있습니다. 처음과 마지막을 제외한 28개의 차시는 수와연산, 도형과 측정, 규칙성과 문제해결이라는 영역 안에서 14개의 수학적 게임 또는 퍼즐의 주제를 선정하여 첫째는 자신이 직접 경험해보는 **주제별 체험 및 탐구활동**, 둘째는 그 주제를 수학적 내용 및 방법적 사고와 연결하여 어떻게 지도할 수 있을지를 생각해 보는 **주제별 지도 방법**으로 짝을 이뤄 구성하였습니다.

모든 강좌에서 공통적으로 강조하고 있는 것은 수학은 더 이상 ‘내용적 지식만을 습득하기 위한 수동적인 문제풀이’에 그치지 않고 ‘방법적 지식을 계발하기 위한 창조적 사고활동’이라는 것이고 이러한 창조적 사고활동은 ‘~해보려는 태도와 의지’로부터 유발된다는 것이었습니다.

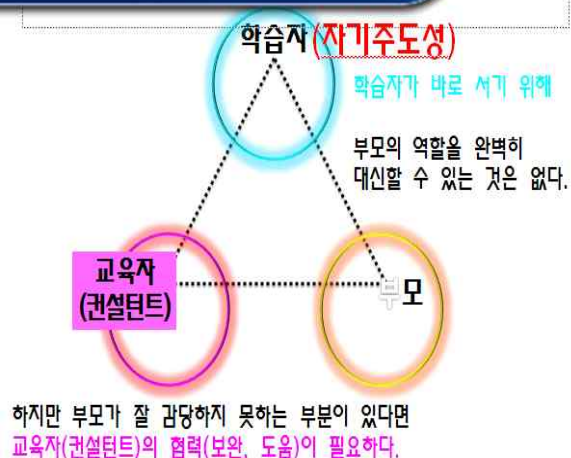
이러한 강조점을 재확인하면서 그것이 가능하도록 하는 학습자의 두뇌 구조를 확인하면서 **Re-Creation Mathematics**의 의미를 정리하고 마치려 합니다. 이제 남은 것은 세상과 수학을 바라보는 여러분이 변화할 뿐만 아니라 여러분에게서 영향을 받는 또 다른 사람들의 관점까지도 변화될 것을 기대해 봅니다.

학습 내용

1. 이 시대에 요구되는 가치의 변화

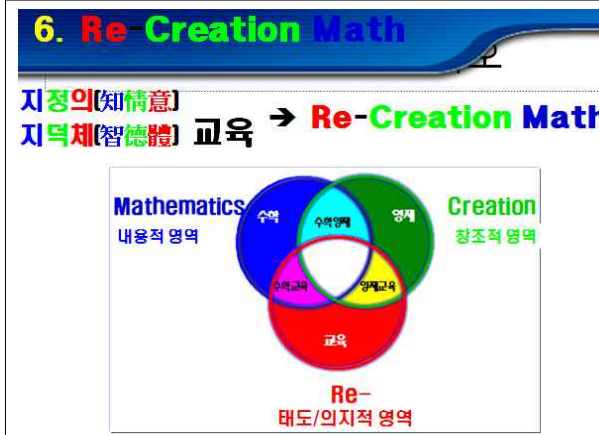
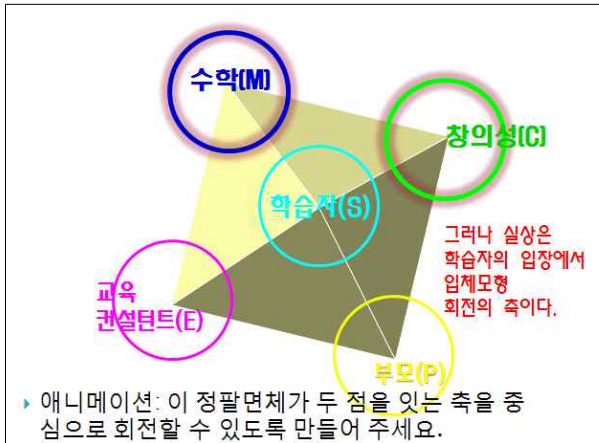
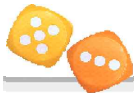


2. 변화를 위한 교육의 3 주체





교육 3주체의 역할 교육자 (컨설턴트) 태도, 의지, 본성, 가치관 미래/수학 안목은 어떻게? 학습자 환경, 지원 학부모 -각 주체들의 인식과 협력이 필요	3. 학습자 두뇌의 구조와 역할 대뇌: 판단, 기억, 지능, 감각, 운동명령 해마 (hippocampus) 기억력세포 편도체 (amygdala) 감정 뇌간 (brainstem) 중뇌: 시각, 청각, 반사 소뇌: 운동, 균형 연수: 심장, 호흡, 소화, 생명중추 행복하고 즐거운 학습 → 웃음(웃음)은 뇌의 숨쉬기운동 중뇌: 시각, 청각, 반사 소뇌: 운동, 균형 연수: 심장, 호흡, 소화, 생명중추 광뇌 (diencephalon) (해운, 청각, 맛각각각각, 물결파사 포함) 태도와 의지 포함
학습자 두뇌의 3가지 주요 역할 좌뇌 (사실, 정보) 우뇌 (감정, 창의성) 간뇌 (의지, 태도, 감정조절) 균형과 조화로운 발달	학습자 3가지 두뇌의 주요 가치 지식 (知, 智) 내용적 사고 창의성 (精, 德, 창조) 방법적 사고 수학적 태도/의지/안목 빛의 삼원색 (RGB) Cast of Mind
이 3가지 두뇌의 역할과 가치를 영재성의 3가지 요소와 관련시켜 봅시다. 비교: Renzulli의 영재성 정의(3요소) 지식 (知, 智) 내용적 사고 창의성 (精, 德) 방법적 사고 수학적 태도/의지/안목 과제집착력 그 동안 우리는 어떤 부분을 더 강조해 왔는가?	4. 교육 컨설팅 모델 (교육의 3주체와 학습자 두뇌의 3요소 결합) 교육자(S) 학부모(P) 학습자(S) 수학(M) 창의성(C) 태도(A) 교육 컨설턴트(E)
교육컨설턴트를 위한 정팔면체 입체 모형 수학(M) 창의성(C) 태도(A) 교육 컨설턴트(E) 학부모(P) 학습자(S) 이 태도는 학습자에게 가장 많이 보인다.	학습자가 어떤 색깔의 능력을 갖출 지는 결국 빛의 3원색인 RGB에 기초하므로 이를 뚜렷이 강화시켜야 한다. RGB R (Red) G (Green) B (Blue) C (Cyan)



경인교대수학영재캠프의 실행 목표

수학 분야에 흥미와 관심이 많고 창의적인 아이디어와 뛰어난 문제해결 능력을 보이는 학생들을 대상으로

(智, 知) 개인적 타고난 수학적 재능 발굴/개발
→ 주제학습, 코너학습, 수리 게임, 과제학습

(德, 精, 창의) 수학관련 분야 리더로서의 품성과 꿈 함양
→ 품성카드, 미래일기, 미션임파서블 과제해결, 수학신문 만들기

(體, 意) 도래 집단의 공동체적 활동 경험, 친구 사귀기
→ 미션임파서블/미래일기발표, 단체수리게임 적극참여, 종합발표, 전시

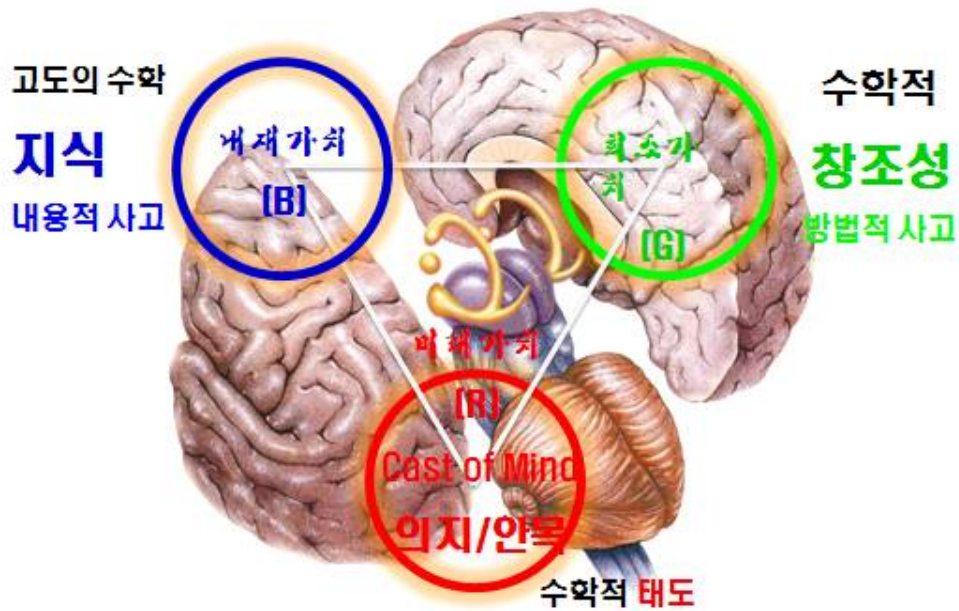
▶ **창조적 지식의 생산자 되기 체험**





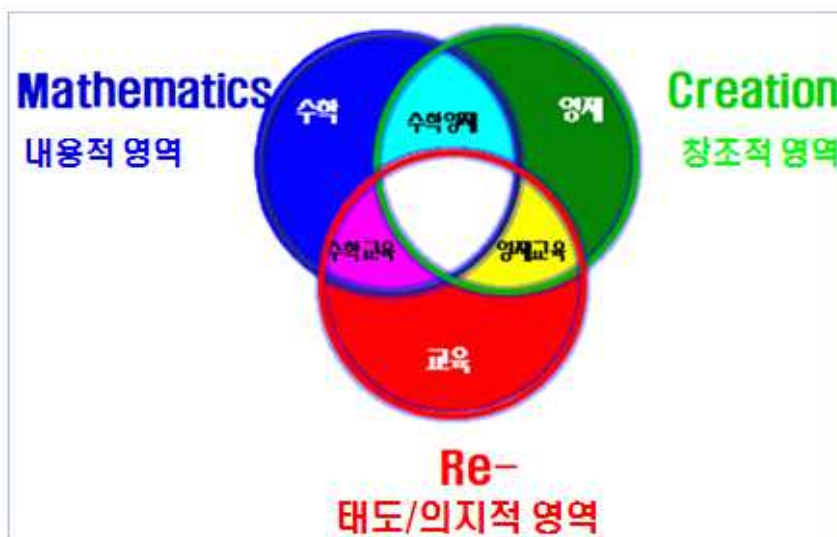
학습 정리

1. 학습자 두뇌의 3가지 역할과 가치



2. 수학영재교육에 비추어 본 학습자 두뇌의 3가지 역할과 가치

Wake up your **RGB** Brain,
fun fun **Re-Creation Mathematics!**





3. **Re-Creation Math**로 인도하는 하늘의 별은 바로 당신(나)

▶ 아래의 그림은 무엇처럼 보이나요?

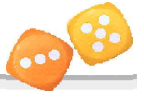
#2 

#1



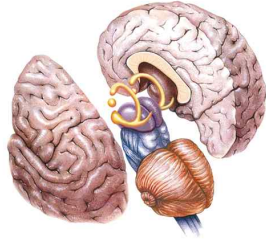
#1진리를 향해 고개를 숙이고 있는 구도자(학생)

#2많은 사람을 바르게 인도하는 존경받는 리더(스승)



학습 평가

1. 아래 뇌 구조의 가운데 갈고리처럼 생긴 노란색 부분의 이름과 그 기능을 바르게 짝지은 것을 고르시오.



- ① 간뇌 - 호르몬 분비 ② 코티졸-장기기억 장치
- ③ 해마-장기기억 담당 ④ 간뇌-학습자의 태도와 의지 조절
- ⑤ 해마-학습자의 태도와 의지 조절

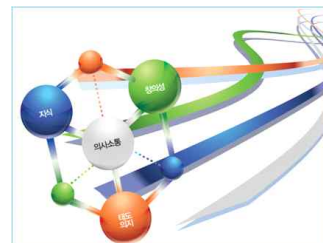
2. 이 강좌의 성격은 물론 특별히 본 차시의 강조점에 따라 아래 로고의 오른쪽 별이 상징하는 것과 가장 가까운 것을 고르시오.

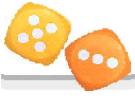


- ① 학습자들이 추구하는 진리 ② 진리를 추구하는 학습자
- ③ 학습자를 진리로 인도하는 스승 ④ Re-creation Math
- ⑤ 미래의 지도자로서 남이 아닌 바로 나

3. RGB의 두뇌를 일깨워 Re-Creation Mathematics를 추구하는 동안 학습목표로 삼는 수학적 내용 지식과 수학적 방법 및 창의성, 그리고 그러한 지식과 사고의 원천이 되는 학습자의 태도와 의지, 의사소통 설명하는 내용으로 가장 잘못 짝지어 진 것을 고르시오.

- ① 좌뇌 - 수학적 내용 및 지식 - Mathematics
- ② 우뇌 - 수학적 방법 및 창의성 - Creation
- ③ 간뇌 - 학습자의 태도와 의지 - Re
- ④ 우뇌 - 그린(Green), 창조성 - Creation
- ⑤ 간뇌 - 의사소통, 화이트실버(White Silver) - Mathematics





부 록



참고자료1. 차시별 평가문항 해설 모음

01-1[정답 해설] ⑤

흔히 말하는 ‘레크레이션’은 잘못된 표현과 발음으로서 한국여가레크리에이션협회에서는 이 용어를 사용하지 않도록 권고하고 있습니다.

01-2[정답 해설] ④

디엔에스(Dienes)의 수학놀이 학습 6단계를 리-크리에이션수학에 활용하여 마지막에 재구성의 단계를 추가할 수는 있겠지만, 원래 디엔에스가 말한 6단계의 네 번째 단계는 ‘표현(표상)단계’입니다. 이것이 빠져있습니다.

01-3[정답 해설] ③

손뼉치기와 발구르기를 동시에 해야 하는 수는 중복되는 것을 제외하면
 첫째, 끝자리에 9가 들어가는 경우: 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99(10개)
 둘째, 30대에서 34, 37, 60대에서 64, 67 (4개)
 셋째, 40대에서 43, 46, 70대에서 73, 76 (4개)
 다섯째, 90대의 모든 수 90부터 98까지 (9개) 에서 모두 27개입니다.

02-1[정답 해설] ②

주사위 윷놀이는 단순한 혼합계산뿐만 아니라 주사위의 눈이 나올 확률과 말판 위에 말이 놓인 위치까지 고려하고 승리를 위해 유리한 전략을 구사해야 하는 전략 게임이다.

02-2[정답 해설] ①, ⑤

가장 작은 값은 (1, 1)일 때 2, 가장 큰 값은 (6, 6)일 때 12

02-3[정답 해설] ②, ③

A, B주사위의 합 (가지수)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C주사위	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

세수의 합	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	계
경우의 수	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	216

**03-1[정답 해설] ②**

단지 이기기 위한 게임 활동 그 자체는 놀이학습의 초기단계에 불과하다. 따라서 각 말의 원활한 이동과 상대방의 말 잡기, 그리고 득점을 높이기 위해 앞으로 나올 주사위 눈 계산값의 확률(가능성)을 세밀히 고려하고 전략적인 접근을 모색하도록 강조하고 격려해 주어야 한다.

03-2[정답 해설] ④

1~6까지의 수 중에서 두 수가 선택될 수 있는 경우는 모두 $6 \times 6 = 36$ 가지이다. 이 중에서 가장 자주 나오는 눈의 합은 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 7로써 6가지이다. 따라서 7이 나올 확률은 $6/36=1/6$ 이다.

03-3[정답 해설] ④

1~6까지의 수 중에서 세 수가 선택될 수 있는 경우는 모두 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 가지. 이 중 두 수만 같은 경우는 (1, 1, ★), (2, 2, ★), (3, 3, ★), (4, 4, ★), (5, 5, ★), (6, 6, ★)에서 ★은 앞의 두 수와 달라야 하므로 각각 5가지씩 총 $6 \times 5 = 30$ 가지이고 세 수가 모두 같은 경우는 ★이 앞의 두 수와 같아야 하므로 6가지. 따라서 더블은 $30/216=5/36$, 트리플은 $6/216=1/36$

04-1[정답 해설] ③

숫자볼링게임은 주사위의 모양이나 개수, 계산방법, 볼링핀의 개수, 그리고 연산 중 일부를 반드시 사용하거나 사용하지 못하도록 조건을 변경하는 등 다양한 방법으로 변형할 수 있듯이 시간이 부족할 경우는 프레임의 개수를 줄일 수도 있으므로 만점을 300점으로 제한할 필요는 없다.

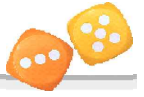
04-2[정답 해설] ①

숫자볼링게임에서 정육면체 주사위 3개를 던져서 나온 세 수로 스트라이크를 만들 수 있는 경우는 1, 2, 4가 유일하다. 차례로 늘어나는 수를 만들 때는 기본적인 수의 배열은 그대로 두고 연산의 종류나 위치만 바꾸어 간다면 다양한 수를 쉽게 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 2 - 1, & 2 &= (4 - 2) \times 1, & 3 &= (4 - 2) + 1 \\ 4 &= 4 \times (2 - 1), & 5 &= 4 + (2 - 1), & 6 &= 4 + 2 \times 1, \\ 7 &= 4 \times 2 - 1, & 8 &= 4 \times 2 \times 1, & 9 &= 4 \times 2 + 1, \\ & & 10 &= (4 + 1) \times 2 \end{aligned}$$

04-3[정답 해설] ③

가장 작은 수는 $12 \div (2 + 4) = 2$, 가장 큰 수는 $(12 \div 2) + 4 = 10$

**05-1[정답 해설] ①**

독특한 방법과 재미있는 방법은 서로 다르다. 평가를 하려면 평가기준을 먼저 제시해 주어 그 기준을 고려하도록 해야 합니다. 어떤 학생들은 재미보다는 수학적으로 의미있는 게임을 만들려고 할 수도 있기 때문입니다. 사례2는 수식만들기는 유지하면서 점수계산법으로 쉬운 것으로 변형한 것이고 사례3, 4는 수학적으로 의미있는 방법을 선택하면서 좀 더 복잡하게 변형했습니다. 사례 5처럼 수업이 게임보다는 의미있는 수학적 토론으로 변질되는 경우라면 큰 문제는 없습니다.

05-2[정답 해설] ⑤

수가 4개라면 둘을 이용하여 하나의 수를 만들면 3개의 수만 가지고 조합하는 경우보다 유리한 것이 사실이다. 하지만 어떤 수는 불필요하므로 수가 많다고 반드시 유리한 것은 아니다. 숫자볼링게임은 계산보다는 식을 만드는 감각이 뛰어난 사람에게 유리하다. 그러나 (6, 6, 6)처럼 주사위의 눈이 나오는 경우에 따라 다양한 식을 만들기 어려운 경우가 존재하므로 실력뿐만 아니라 주사위의 운도 일부 작용한다.

06-1[정답 해설] ②

매지믹서를 이용하는 학습자의 수준에 따라 사칙계산뿐만 아니라 거듭제곱이나 제곱근, 계승 등 자신이 알고 있는 모든 수학식을 사용할 수 있다. 그리고 계산연습교구보다는 식을 만드는 능력을 계발하는 데 더 적합하다.

06-2[정답 해설] ⑤

$4! - (5 - 3 - 2 - 1) = 24 - (-1) = 25$ 이므로 $4! + (5 - 3 - 2 - 1)$ 로 고쳐야 한다.

07-1[정답 해설] ④

특수한 경우의 수들은 요구하는 식을 만들지 못할 수도 있으므로 숫자볼링게임에서처럼 빨리 포기하고 다시 던져서 새로운 식을 만드는 것이 유리한지를 판단하게 할 수도 있다.

07-2[정답 해설] ②

①과 ③에는 나눗셈이 빠져있으며, ④에는 +가 사용되지 않았다.

⑤는

**08-1[정답 해설]** ②, ⑤

①은 연속이기는 하지만 색깔이 다르므로 불가, ②는 순서는 다르지만 정렬하면 가능함. ③은 합이 30보다 작기 때문에 중간 등록은 가능하지만 최초 등록용으로는 불가. ④ 똑같은 색깔의 수가 있으므로 불가

08-2[정답 해설] (1) ①연속 (2) ②그룹**08-3[정답 해설]** ③

현재 타일의 개수가 12개뿐이므로 최초등록은 이미 지났다 조커없이 3쌍의 등록이 불가능한 상태이므로 조커를 사용할 수 밖에 없다. 같은 색깔의 같은 숫자로는 등록이 안되니 (6, 6, ☺)는 불가능하므로 (10, ☺, 12)의 연속이 가능하다.

09-1[정답 해설] ③

해설: 첫째, 연속으로 (6, ☺, 8, 9) 만
둘째, 그룹으로 (11, 11, ☺) 만
셋째, (6, ☺, 8, 9) 와 (11, 11, ☺)를 동시에

09-2[정답 해설] ①

숫자타일을 늘리는 것은 새로운 타일을 만들어 넣어야 하므로 일반인들에게는 거의 불가능하다.

09-3[정답 해설] ⑤

조커의 속성에 대한 나열이나 부정을 넘어 새로운 대안까지 제시하고 있으므로 문제 설정에 해당한다고 봅니다.

10-1[정답 해설] ⑤

계산력이 필요한 것은 사실이지만 수식을 만들어야 하고 연속적인 수를 차지하려는 판단이 중요할 뿐만 아니라 상대방의 실수를 찾거나 허를 찌르면서 대응 전략을 가지고 종합적인 판단을 내려야 하는 전략게임이다.

10-2[정답 해설] ②, ④

① $(2+5) \times 4 = 28$, ③ $(6/3) \times 4 = 8$, ⑤ $(5-3) \times 4 = 8$ 은 연속이기는 하지만 색깔이 다르므로 불가, ②는 순서는 다르지만 정렬하면 가능함. ③은 합이 30보다 작기 때문에 중간 등록은 가능하지만 최초 등록용으로는 불가. ④ 똑같은 색깔의 수가 있으므로 불가

10-3[정답 해설] ③, ⑤

③은 사실적인 기술이며 ⑤는 그 배경을 설명한 것이다.

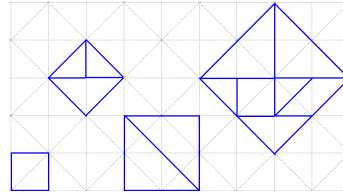
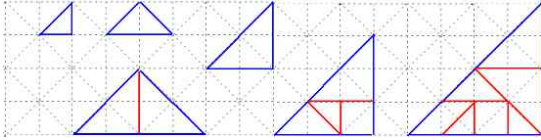
11차시는 서술형



이에 대한 증명은 Fu Tsiang Wang과 Chuan-Chih Hsiung이 1942년 The American Monthly에 "A Theorem on Tangram"이라는 글에서 밝혀놓았다.
(출처: Gardner, M, 1988, p.198; 박교식, 2002, p.98)

12-1[정답 해설] ④

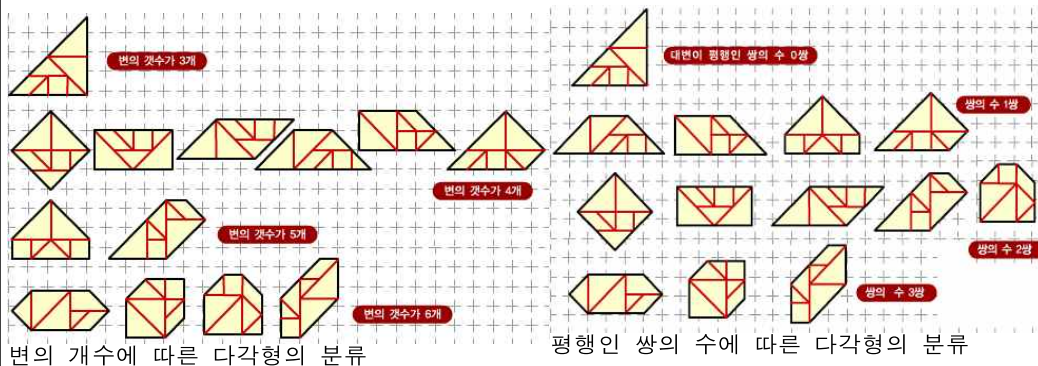
탕그램의 조각으로 만들 수 있는 삼각형은 오직 직각이등변삼각형뿐이다.
직각이등변삼각형의 밑변으로 가능한 길이는 $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 3, 4$ 뿐이므로 넓이는 0.5, 1, 2, 4, 4.5, 8이 되는 6개의 직각이등변삼각형을 만들 수 있다.



12-2[정답 해설] ④

12-3[정답 해설] ③

탕그램 조각들의 한 변의 길이는 $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ 뿐이다. 따라서 탕그램 7조각을 일부 또는
아래 그림과 같은 13개뿐이다. 모두 사용한 도형의 넓이는 8이하의 자연수들(1, 2, 4, 8)뿐이다.

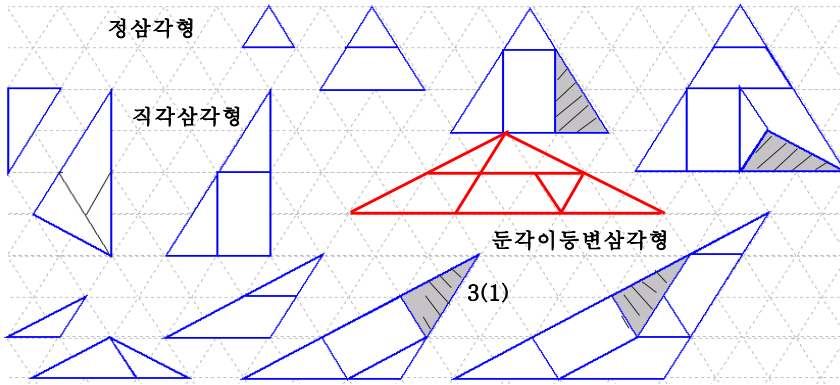


13차시는 서술형



14-1[정답 해설] ④

스핑크스퍼즐 조각들의 각도는 30° 의 배수이므로 정삼각형과 직각삼각형, 둔각이등변삼각형을 만들 수 있다. 모든 조각의 넓이(단위)는 1, 2, 3, 4뿐이므로 이를 사용하여 만든 다각형의 넓이도 자연수의 배수이다. 이제 넓이가 16(단위)이 될 때까지 기준이 되는 한 변의 길이를 차례로 1과 $\sqrt{3}$ 의 배수로 늘려가면서 구하면 그림과 같이 13가지뿐이다.



14-2[정답 해설] ④

가장 단위 정삼각형의 한 변의 길이를 1, 넓이를 1단위($\frac{\sqrt{3}}{4}$)라 할 때 스핑크스퍼즐의 전체 넓이는 16단위($4\sqrt{3}$)이다. 조각의 일부만 사용하면 직각삼각형과 정육각형을 만들 수는 있지만 7조각을 모두 사용할 때 넓이가 16단위인 직사각형과 정육각형은 넓이가 나오지 않고, 정사각형과 정팔각형은 45° 와 $\sqrt{2}$ 를 기본으로 하므로 30° 와 $\sqrt{3}$ 을 기본으로 하는 스핑크스퍼즐로는 만들 수가 없다.

14-3[정답 해설] ③

넓이는 모두 일정하므로 '넓이/둘레'의 값이 가장 크려면 둘레가 가장 작아야 한다. 넓이가 일정할 때 원형에 가까울수록 둘레는 작아진다.

15차시는 서술형

16-1[정답 해설] ③

대칭축이 있는 도형(선대칭 도형)은 그 대칭축을 중심으로 좌우로 뒤집으면 원래의 모양과 합동이다. 따라서 선대칭 도형이 아닌 것을 찾으려면 된다. 6번 평행사변형은 선대칭 도형이 아니다.

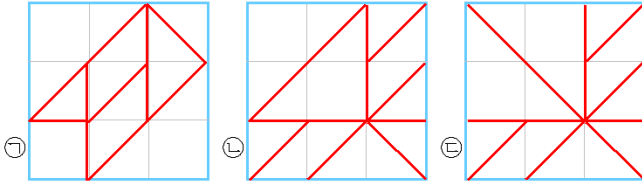
16-2[정답 해설] ④

본문에서 2)번 팔교판 8조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 볼록 다각형 11개(삼각형 1개, 사각형 2개, 오각형 2개, 육각형 5개, 칠각형 1개)를 보여주었다. 그러나 이것이 전부인지 더 찾을 수 있는지는 12차시 전통적인 탱그램이 13가지뿐임을 증명한 것과 유사한 방법으로 확인할 수 있다.



16-3[정답 해설] ②

참인 명제는 증명해야 하지만 거짓인 명제는 반례를 하나만 들어도 된다. 다음은 탕순이의 주장에 대한 한 가지 반례이다. ㉠과 ㉡은 모두 7개의 선분을 사용하고 있다. 이중 ㉡의 가장 큰 직각삼각형의 대각선 위치만 바꾸어서 ㉢을 만들면 선분을 하나 더 줄여 6개의 선분만 사용하고 뒤집은 조각은 없다.



17차시는 서술형

18-1[정답 해설] ④

Blockus는 ‘우리를 막아라.’라고 번역할 수는 있지만 자신의 블록을 막는 것이 아니라 상대방의 블록을 차단해야 하면서 자신의 블록을 내려놓을 적당한 곳을 찾아내는 공간감각능력이 필요한 전략용 게임이다.

18-2[정답 해설] ④

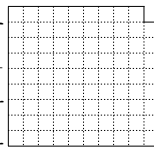
선대칭도형은 대칭축을 중심으로 좌우가 합동이므로 한번 뒤집어 놓더라도 돌리면 원래의 모양과 합동이 된다. 따라서 선대칭이 아닌 도형을 찾으려면 된다. 그런 조각은 12개 중 알파벳모양으로 F, L, P, N, y, Z의 6개이다.

18-3[정답 해설] 38

블로커스 게임에 사용되는 조각들은 모두 21개이다. 이중 정사각형 하나로 만든 타일 1개, 정사각형 두 개로 만든 타일 1개, 정사각형 3개로 만든 타일 2개, 정사각형 4개로 만든 타일 5개, 정사각형 5개로 만든 타일 12개로 정사각형은 모두 89개이다. k값이 최대가 되려면 둘레의 길이는 작고 넓이는 커야 한다. 21조각 89개의 정사각형을 모두 사용하면서 둘레의 길이를 줄이려면 정사각형에 가까워야 한다. 하지만 가로가 10, 세로가 9인 직사각형의 맨 윗줄에서 한 칸이 빠진 경우 $k = \frac{89}{38} \approx 2.342$ 이고 이것이 최대이다. 따라서 둘레는 38이다.

19-3[정답 해설] ③

5개 이하의 정사각형을 번끼리 붙여 만든 폴리오미노 조각 21개에 사용된 정사각형은 모두 89개이다. k값이 최대가 되려면 분모인 둘레의 길이는 작고 분자인 넓이는 커야 한다. 21조각 89개의 정사각형을 모두 사용하면서 둘레의 길이를 줄이려면 정사각형에 가까운 직사각형이어야 한다. 하지만 넓이가 89인 직사각형은 불가능하므로 가로가 10, 세로가 9인 직사각형에서 한 변의 가운데가 아닌 꼭지점 부분이 빠진 모양이어야 하고 그 때 $k = \frac{89}{38} \approx 2.342$ 이다.



19-2[정답 해설] ①

숫자타일을 늘리는 것은 새로운 타일을 만들어 넣어야 하므로 일반인들에게는 거의 불가능하다.

19-3[정답 해설] ⑤

조커의 속성에 대한 나열이나 부정을 넘어 새로운 대안까지 제시하고 있으므로 문제 설정에 해당한다고 봅니다.

**20-1[정답 해설] ③**

정육면체 4개로 이루어진 2층 조각은 3개가 있다. 이것을 먼저 사용하는 것이 유리할 수는 있지만 반드시 그래야 하는 것은 아니다. 다른 사람의 전략을 방해하기 위해 중간이나 마지막에 그 조각을 사용하는 것이 유리할 수도 있다.

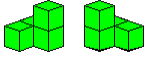
20-2 [정답 해설] ②

① 폴리큐브는 41종이지만 3D블로커스 게임에 사용되는 조각들은 이 중 11종이다.

② 정육면체 4개를 면끼리 연결하여 만들 수 있는 테트라큐브 조각은 1층 구조물 5개, 2층 구조물 3개로 총 8개이다.

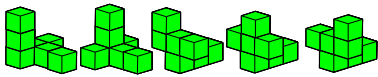


③ 정육면체 5개를 면끼리 연결하여 만들 수 있는 펜타큐브 조각은 29종이다. 1층으로만 된 것이 펜토미노와 같은 12종이다.

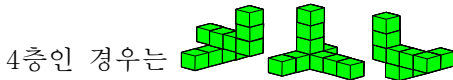
④, ⑤ 테트라큐브 조각들 중에 면대칭이 되지 않는 도형은  뿐(2개)이다. 그리고 이들은 서로 면(거울)대칭의 위치에 있는 모양이다.

20-3[정답 해설] 36

3D블로커스 게임에 사용되는 조각들은 모두 11종 40개의 정육면체로 이루어졌다. 이를 사용하여 $k = \frac{\text{도형의부피}}{\text{도형의겉넓이}}$ 의 값이 최대가 되도록 하려면 겉넓이는 작고 부피는 커야 한다. 가능한 많은 조각을 사용하되 겉넓이를 적게 하기 위해서는 정육면체 모양에 가까운 직육면체여야 한다. 36개를 사용하여 $3 \times 3 \times 4$ 의 직육면체를 만들면 $k = \frac{36}{12 \times 4 + 9 \times 2} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11} \approx 0.54$ 이고 이것이 최대이다.

21-1[정답 해설] ②

등과 같이 7개가 필요합니다.



4층인 경우는 와 같이 10개가 필요합니다.

21-2[정답 해설] ③

5개 이하의 정육면체를 면끼리 붙여 만든 폴리큐브 조각은 41종이며 여기에 사용된 정육면체 큐브의 개수는 186개이다. 따라서, K값이 최대가 되려면 분모인 겉넓이는 작고 분자인 부피는 커야 한다. 41종 186개의 큐브를 가능한 많이 사용하면서 겉넓이를 줄이려면 정육면체에 가까운 모양이어야 한다. 186개의 큐브를 모두 사용해서는 직육면체를 만들 수 없으므로 180개를 사용한 $6 \times 6 \times 5$ 인 직육면체를 만들면 $k = \frac{6 \times 6 \times 5}{6 \times 6 \times 2 + 6 \times 5 \times 4} = \frac{180}{192} = 0.9375$ 이다.

21-3[정답 해설] ② poly + iamonds 는 정삼각형을 여러 개 붙여만든 조각이다. 정삼각형을 6개 이어붙여 만든 것은 헥시아몬드(hexiamonds)이다.





22-1[정답 해설] ③ 원판이 하나씩 줄어들 때마다 시간은 이전의 절반이 된다. 64개의 원판을 옮기는데 걸리는 시간은 $2^{64} - 1$ (초). 즉, 약5849억년이므로 60개의 원판을 옮기는데는 이것의 16분의 1이다.

22-2[정답 해설]

- (1) 원판의 번호들은 가운데 7번 원판을 중심으로 좌우대칭이다. 7개의 원판을 움직이는 최소이동횟수는 $2^7 - 1 = 127$ 회이므로 뒤에서 28번째 또는 앞에서 28번째로 움직이는 원판의 번호와 똑같다. 따라서 원판 5개를 옮기는 31회의 경우로부터 유추하여 뒤에서 4번째로 움직이는 3번 원판이다.
- (2) 127회 중 절반이후의 경우이므로 옮겨가는 기둥의 번호를 구하기 위해서는 7개의 원판을 옮길 때 거꾸로 C번 기둥에 있던 것을 A번 기둥으로 옮길 때 28번째로 움직이게 된 경우를 생각하면 된다.

원판의 개수	28번째로 움직이는 원판의 번호	총이동횟수
5	121312141213121512131214121 3 121	31
6	121312141213121512131214121 3 1216.....	63
7	121312141213121512131214121 3 1216.....7.....6.....	127

원판의 개수	(C기둥에서 A기둥으로 거꾸로 옮겨간다고 가정) 28번째로 옮겨가는 기둥의 번호	총이동횟수
5	ABBACAABBCCBABB A CAACBCCACBB A CA	31
6	BAABCBBAAACCAABAABCBCACCB C AAABCBB B	63
7	ABBACAABBCCBABBACAACBCCACBB A CAAC.....	127

22-3[정답 해설] ④

() 1년=365(일)*24(시간)*60(분)*60(초)=31536000=0.315×10⁸=0.315억(초)이므로 10년은 약 3.15억(초)이다. 30개의 원판을 옮기는 데 $2^{30} - 1 \approx 1024 \times 1024 \times 1024 \approx 1.07 \times 10^9$ (초), 즉 10.7억초는 대략 30년 이상이고 29개를 옮기는 데 15년 이상이 걸린다. 따라서 10년 동안은 작은 것부터 28번째만 움직이고 29번째는 아직 움직이지 않았다.

**23-1[정답 해설] ①**

처음부터 정답을 알려주는 것은 신비감을 떨어뜨리고 수학적인 생각을 유도하는데 걸림이 될 수 있다. 따라서 전설이 실제로 이루어지기까지 걸리는 시간을 처음에 예상한 다음에 그것을 직접 계산해 보면서 자신의 예상과 얼마나 차이가 있는지를 비교해 보면서 의아심 또는 감탄을 유발하도록 한다.

23-2[정답 해설] ④

2개씩 32종의 원판을 옮겨야 하므로 모두 옮기는 데 걸리는 시간은 $(2^{32} - 1) \times 2$ 초이다. $2^{30} = 1,073,741,824$ (초)는 약 34년이므로 $(2^{32} - 1) \times 2$ 는 약 272년이다.

23-3[정답 해설] ②

기둥이 4개라면 그 횃수는 18,433번으로 획기적으로 줄어든다. 이는 원판 하나를 옮기는 데 걸리는 시간을 1초로 가정할 때 5시간 7분 13초면 모두 옮길 수 있는 횃수이다.

원판의 개수(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	55	56	...	64
최소이동 횃수(b _n)	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65					

$+2 \quad +2 \quad +4 \quad +4 \quad +4 \quad +8 \quad +8 \quad +8 \quad +8 \quad +16 \quad +\dots +512 +1024$
2개 2개 4개 3개 8개 4개 16개 5개 32개 16개 1024개 9개

기둥의 개수를 5, 6, 7개로 늘렸을 때의 최소이동횃수를 추측해 보면 다음과 같다.

원판의 개수(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
최소이동 횃수(b _n)	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129	161																			

24-1[정답 해설] ④

페그의 전체 개수가 아니라 한쪽 페그의 개수가 n개일 때의 최소이동횃수가 $n^2 + 2n$ 이다.

24-2[정답 해설] ⑤

이미 움직이고 있던 돌과 새로운 돌이 만났을 때는 새로운 돌을 먼저 밀어놓아야 많이 건너뛸 수 있다.

24-3[정답 해설] ④

색깔별, 움직이는 방법별로 구분하여 쓰면 다음과 같다.

색깔: WBBWWWWBBBBWWWWBBBBWWWWBBW

방법: SJSJSJSJSJSJSJSJSJSJSJSJSJSJS

**25-1[정답 해설] ⑤**

반힐레의 단계에 들어있는 것이 아니며 보다 발전적인 Re-Creation을 시도하도록 지도한다.

25-2 [정답 해설] ④

바둑돌이 움직이는 모든 횟수는 $mm+m+n$ 이며 움직이는 전체 칸 수는 $m(n+1)+n(m+1)$ 이다.

25-3[정답 해설] ②

움직이는 방법과 바둑돌의 색깔, 번호를 통합하여 표현하면 그림과 같다.

S1	S2	S3			
J1	J2	J3	J4	J3	J6
J1	J2	J3	J2	J5	J3
J1	J2	J1	J4	J2	J6
S1	S5	S3	S1	S5	S3

(W, B)=(3, 6)일 때의
통합적인 해법

28-1[정답 해설] ③

모든 자동차들은 앞뒤로만 움직일 수 있다.

28-2[정답 해설] ①

초급 1단계의 문제 상황이다. 러시아워 게임은 거꾸로 풀기를 생각해야 한다.

X를 움직이려면 E가 아래로 내려와야 하므로 G가 왼쪽으로 비켜있어야 한다. 그러려면 제일 먼저 C를 위로 올려야 한다. 이를 거꾸로 쓰면 CU1-GL2-ED2-XR5이 된다.

28-3[정답 해설] ⑤

Move #	Vehicle	Direction	Distance
1	A	D	1
2	X	L	2
3	B	U	4
4	C	L	1
5	O	D	3
6	X	R	4

위의 순서대로 움직이면 15가 된다.

29-1[정답 해설] ④

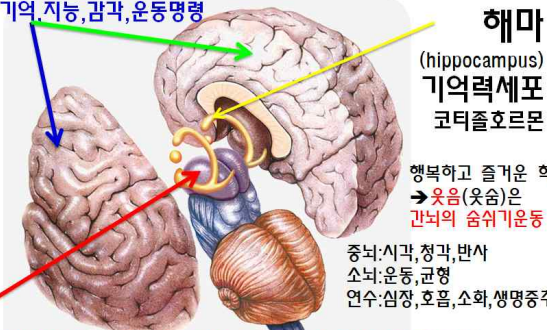
가로, 세로가 각각 두 칸씩인 2×2 사이즈의 사파리 자동차도 있습니다.



30-1[정답 해설] ③

학습자 두뇌의 종류와 역할은 아래 그림과 같다.

대뇌: 판단, 기억, 지능, 감각, 운동명령



간뇌 (diencephalon): 자율신경과 감각연결, 물결체사 → 태도와 의지를 조절

시상(감각/운동정보)+시상하부(내분비계, 자율신경계조절)+뇌하수체(신경호르몬)+솔방울샘(세라토닌, 멜라토닌)생체리듬조절)

30-2[정답 해설] ⑤

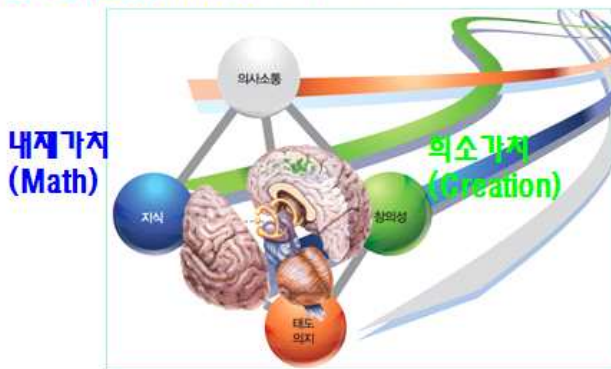
별은 미래와 희망을 상징한다. 이는 또한 현재 진리를 추구하는 학습자가 미래에는 다른 사람을 인도하는 스승의 표상이다. 하지만 그것이 의미하는 핵심은 바로 그런 인도자가 남이 아닌 바로 나라는 인식을 가져야 한다는 점을 본 강좌에서 강조해 왔다..

30-3[정답 해설] ⑤

학습자 두뇌의 3가지 역할과 그에 따른 Re-Creation Math의 3가지 가치는 아래 그림과 같다.

지식과 창의성, 태도 및 의지가 종합되어 의사소통으로 드러나는 것이며 RGB 전체가 종합된 색깔으로 흰색을 대표한다.

Re-Creation Math의 각 구성 요소



미래가치(Re)



참고자료2. <온라인 과제: Mission Impossible 1>

1000점에 最 근접하라!

Mission 1. 슬라이딩 블록퍼즐 레벨 3을 수행한 결과를 캡처하여 제시하시오,

<http://www.novelgames.com/flashgames/game.php?id=121>에서 블록을 가로, 세로 원하는 어느 방향으로 옮기면서 **빨간색 블록**을 밖으로 빼 내면 된다. 3가지의 수준이 단계적으로 제시되므로 레벨 3을 수행한 결과(점수 포함)만 캡처하여 제시하면 된다.

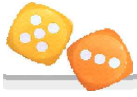
Mission 2. 러시아워에서 '자신의 학번 $\equiv k(mod 5)$ '인 k 번 문제를 해결한 장면(등급번호와 점수 포함)을 캡처하여 제출하시오,

<http://www.thinkfun.com/flash/rushhour/index.html?abcd=1234>에서 자신의 학번을 5로 나누어 나머지가 0, 1, 2, 3, 4와 같은 카드를 선택! '자신의 학번 $\equiv k(mod 5)$ ' <예> 학번이 12***23이면 카드번호가 3, 8, 13, 18, 23
탈출만 성공해도 Easy는 30점, Medium은 35점, Hard는 40점, Expert는 45점
최소이동으로 성공하면 개당10점씩 보너스 추가,

Mission 3. Nim게임에서 60%이상의 승률을 기록한 화면을 캡처하시오,

<http://www.transience.com.au/pearl3.html> "각 묶음에서 마음대로 가져갈 수 있을 때 마지막의 구슬을 가져가는 사람이 진다." 위의 3가지 미션을 미리 수행하면서 자신의 최종 점수 합계가 **1,000점에 최근접하도록** 아래 표를 완성[점수 기준]1000점(또는 1,200점)을 기준으로 상하 10점 간격의 등급에 따라 1점 단위로 감점함.<단, 1000점 또는 1200점을 정확히 맞추면 보너스 1점 추가>

제출자	학번	이름	제출일자
미션	Mission 1	Mission 2	Mission 3
구분	슬라이딩 블록퍼즐	러시아워	NIM게임
평가기준	레벨3의 최종 점수	카드 수행 여부	높은 레벨과 승률
제출할 화면		 우측하단의 카드번호와 Perfect여부 확인	
배점	레벨3의최종 스코어*0.01- 레벨3에 걸린 시간*0.1	난이도별로 완성한 카드의 점수*개수+보너스	성공한 레벨*50+승률
(예시)	359.5-18.7=340.8점	Medium 35점*5개(175점) +Hard 40점*1개(40점)+ + 최소이동보너스 10점*3개(30점)=245점	7레벨이지만 성공은 6레벨 6*50+85=385점
개인별 득점			
총점	슬라이딩 블록퍼즐 (레벨3의 최종 스코어*0.01-레벨3에 걸린 시간*0.1)점 + 수행한 러시아워 카드 (난이도별 성공한 개수*점수 +보너스)점 + NIM게임 (성공한 레벨*50+승률)점 = (총 970.8 점) ⇒ 97점		



참고자료3. [Mission Impossible 2]

가장 튼튼한 종이 구조물 만들기



Paper Tainer Museum

1. 종이로 만든 건축물

콘크리트와 물이 전혀 쓰이지 않고 100% 친환경 소재인 종이 기둥과 컨테이너 박스로 만들어진 초대형 미술관이 우리나라에 있었다는 사실을 아십니까? 재질이 종이라 오래 보관할 수 없어 이제는 사라졌지만 한 때 올림픽 공원에 PAPER TAINER MUSEUM이라는 것이 있었습니다. 세종문화회관 크기의 이 미술관을 떠받들고 있는 것은 놀랍게도 353개의 종이 기둥입니다. 얇은 종이가 이런 힘을 발휘할 수 있는 것은 바로 그 안에 수학/공학적 원리가 들어있기 때문이죠. 우리도 이를 이용하여 종이 한 장으로 얼마나 튼튼한 기둥을 만들 수 있는지 설계해봅시다. 기술력은 수학적 지식과 창의적인 아이디어, 그리고 팀의 협동심과 열정에서 나옵니다. 여러분의 창의적인 도전을 기대합니다.



[모둠별 사용할 준비물]

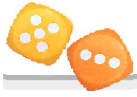
			복사용지(박스), 교사용지도서(권), 골프공(개)
도화지 2장(8절) 연습용 별도	하드보드지 1장(8절)	자, 컴퍼스, 가위, 딱풀(소형 1개)	무게용

8절 도화지 한 장을 접거나 **말아도 되며**, 잘라서 다시 붙이는 등 여러 가지 방법으로 가공하고, 이를 바닥(하드보드지)에 접착시킵니다. 기둥의 개수나 모양, 크기, 구조의 변화를 통해 A4용지(500매 묶음 단위)를 가장 많이 올릴 수 있도록 설계해보시오.

[미션] 아래의 조건에 부합하는 높이 15cm이상의 튼튼한 구조물을 만드시오.

- 가. 제시된 준비물(도화지-기둥용, 하드보드지-바닥 고정용) 외에는 사용할 수 없다.
- 나. 하드보드지 여백에 구조물의 설계도를 그리고 핵심적인 수학/과학 원리를 설명한다.
- 다. 하드보드지 위에 8절 도화지 2장과 딱풀 1개만 사용하여 높이 15cm이상의 구조물을 만든다(연습용 도화지는 별도 제공 가능).
- 라. 기둥의 개수는 제한을 두지 않으나 기둥을 제외한 공간의 크기도 확보해야 한다.
- 마. 일정한 매수의 A4 복사용지(500매 묶음 단위)(또는 준비된 교사용지도서, 골프공 1개)를 올려놓았을 때 7초 이상 버텨낼 수 있어야 한다.
- 라. 모든 조원 중 임의로 선택된 한 사람이 원리를 설명할 수 있어야 한다.

● 주의: 역도 경기처럼 무게를 바꿔가며 3차시기까지 진행하므로 전략이 필요함.

**[평가 방법]**

평가 항목	평가 방법	점수	비고
계획의 타당성	설계도의 타당성	20점	
원리	구조물에 숨어있는 수학·과학의 원리	20점	
측정 무게	(구조물이 버텨낸 무게 kg) × 10(점)	무제한	
발표	발표자의 내용 이해도 및 설명력	20점	

	예상하는 무게	실제로 성공한 무게		
		1차	2차	3차
A4복사용지 기준	A4 ()장	A4 ()장	A4 ()장	A4 ()장
실제 무게	()kg	()kg	()kg	()kg

*질문: A4 (500매 단위) 한 묶음 (또는 준비된 교사용지도서, 골프공 1개)의 무게를 알 수 있는 방법은?

- 복사용지는 평량의 단위($0g/m$)를 사용한다. A0 전지 1장의 무게가 80g 이라는 뜻이다. 그러면 16절지 1장은 5g이고 이것이 500매인 한 묶음은 2.5kg, 500매 5묶음으로 이루어진 1박스는 12.5kg인 셈이다.

- 교사용 지도서 권당 무게

- 골프공 1개의 무게



매쓰큐브로 수의 구성

수학교구 ▶ 초/중등수학 Math Tool

수연산/수

유아부터 초등저학년까지~ 다양한 수 영역의 활동을 할 수 있습니다~!
수의 크기, 사칙연산개념 익히기, 자릿수 개념 익히기 등 다양한 수영역의 활동을 할 수 있는 교구들이 준비되어 있습니다.

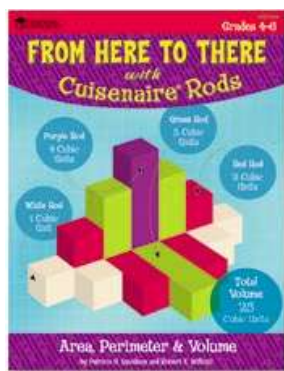
학년	1학기	2학기
1학년	1. 5까지의 수 2. 9까지의 수 4. 가르기와 모으기 5. 더하기와 빼기 6. 비교하기 7. 50까지의 수 8. 분류하여 세어보기	1. 100까지의 수 6. 더하기와 빼기(1) 7. 더하기와 빼기(2) 8. 문제푸는 방법 찾기
2학년	5. 길이재기 (단위길이의 비교)	3. 쟁기 나무 놀이
3학년	4. 나눗셈 5. 도형 움직임 7. 분수	4. 나눗셈 7. 자료 정리하기 (막대 그래프)
4학년	8. 문제푸는 방법 찾기	6. 여렵하기
5학년		7. 자료의 표현 (물균 구하기)
6학년	4. 쟁기나무	



1. 매쓰큐브란?

매쓰큐브(Math Cube)는 정육면체 조각을 서로 연결한 연결큐브(linking cube)의 통칭하는 것으로 날개로 된 쟁기나무는 서로 연결할 수 없다는 단점을 잘 보완해 준다. 여러 개씩 모아 끼우면 퀴즈네어 색막대 또는 수막대, 십진블록을 대체할 수는 다용도 큐브이다.

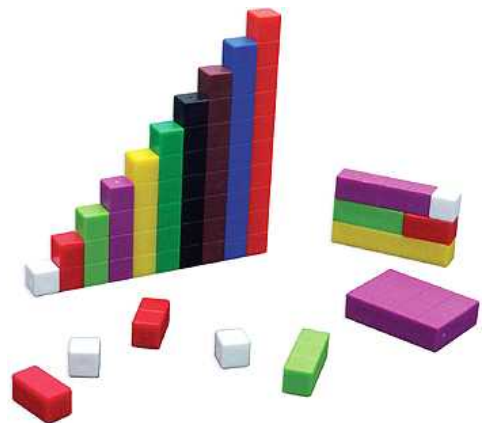
특히, 최근에 국내 특허를 받아 출시된 업브레인 연결큐브는 여러 가지 방식으로 끼울 수 있다는 것 외에도 마지막 조각의 요철을 없앨 수 있고 큐브가 움직이는 것을 방지할 수 있어 폴리큐브(소마 큐브포함) 제작을 위한 설계용으로도 활용할 수 있다.



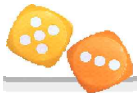
퀴즈네어 색막대



http://en.wikipedia.org/wiki/Cuisenaire_rods

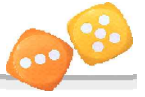


수막대



★(학습활동) 매쓰큐브로 십진블록을 만들어 받아올림이 있는 덧셈과 받아내림이 있는 뺄셈을 해 보자,

+)		



—)



강의실을 가득 채운 수 모형의 개수

블록(날개 큐브, 수모형)을 이용하여 우리 교실에 가득히 채운다면 몇 개나 들어가며, 그것을 늘어놓은 길이는 얼마나 될지, 그리고 하나씩 주워 담는 데 걸리는 시간은 또 얼마나 걸릴지를 먼저 예상하여 적은 다음 실제로 계산해 봅시다.



◆ 사용한 구체물의 종류 :

한 변의 길이가 (2) cm인 정육면체 큐브(연결 큐브)

1. 한 변의 길이가 cm인 정육면체 큐브(연결큐브)의 크기는 한 변의 길이가 1cm인 날개 수모형 몇 개의 크기와 같습니까? _____개

2. 아래의 표를 채우면서 A 를 구하여 봅시다.

구분	예상한 값(A) (계산하지 말고 감각으로만)	실제로 계산한 값(B) (직접 계산해 보시오.)	$\frac{A}{B}$
들어가는 큐브의 개수	(약) (개)		
큐브를 모두 늘어놓은 길이	(대략) (km, m)		
1초에 1개씩 세다고 할 때 큐브를 모두 세는 데 걸리는 시간	(대 략) (년, 개월, 일)		

* 예상하는 단위는 직접 써넣으세요.

* 알아낸 방법을 설명하여 봅시다.



폴리드론(조노돔시스템)으로 전개도 탐구

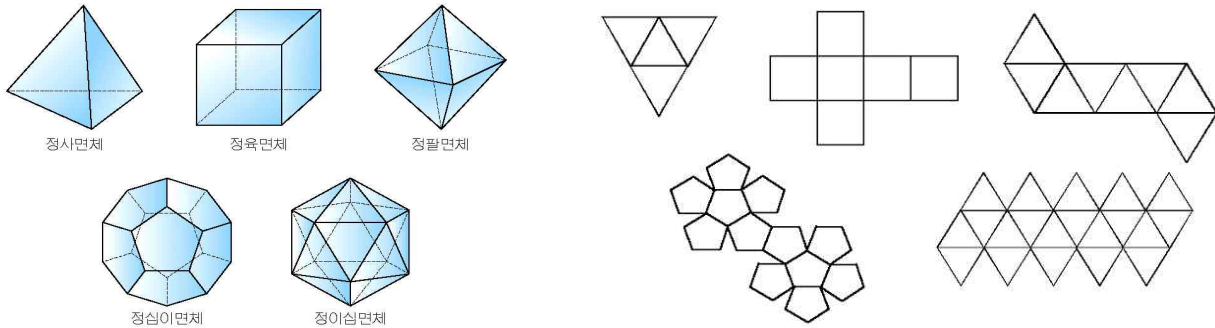


제품명	POLYDRON 입체세트	지오픽스 도형체험 학습세트2	조노돔 시스템 조노돔 NEW 시스템 기아 세트	[포디프레임]수학 창의 교구세트 大
모양				
제작사 / 판매사	KOEDU 한국시청각 http://www.gabenori.co.kr/shop/goods/goods_view.php?&goodsno=6426	수학사랑 http://shop.mathlove.kr/shop/goods/goods_view.php?&goodsno=171&category=001003001	미국 줌틀사/뿌리와의연매 http://ainedu.co.kr/shop/goods/goods_view.php?&goodsno=1408&category=002005008	*4D프레임 http://ainedu.co.kr/shop/goods/goods_view.php?&goodsno=1213&category=002005004
가격	407,000	480,000	440,000	100,000
구성 요소	면(기하형, 입체형) 320개, 각도기	지오픽스(면) 810개	연결봉(점) 840개, 연결체(선) 2550개	연결봉(점), 연결대(선)
장점	견고하고 깔끔함 전개도 탐구 최적	저가 유연함	4차원도형 탐구, 점-선-면의 개수 탐 구에 적합	저가, 길이와 각도를 자유롭게 변경
단점	고가. 연결 느슨. 속이 채워진 기하 형은 결합이 불편	깔끔하지 않음	직선과 특정한 각 도의 입체만 가능	거의 일회용

공간에 있는 입체도형의 반대쪽은 눈으로는 보이지 않는다. 따라서 입체도형의 모양을 보다 쉽게 알 수 있기 위해 여러 가지 방법으로 표현하는 기법이 개발되고 있다. 우리가 이미 알고 있는 것으로 겨냥도와 전개도가 있다. 겨냥도(sketch)는 도형을 일정한 방향에서 바라보면서 보이지 않는 부분은 점선으로 간단히 나타낸 그림이며, 전개도(development figure)는 입체도형의 표면을 적당히 잘라서 평면 위에 펼쳐 놓은 그림이다. 겨냥도를 그리지 않고 교구를 이용하여 만들어 보면 어떨까?



그리고 그것의 모서리를 뜯어서 바닥에 펼쳐놓으면 전개도가 된다. 모서리를 뜯는 위치에 따라 여러 가지의 다른 전개도를 쉽게 구할 수 있고, 뜯은 조각을 변위에서 굴러가면서 위치를 바꾸어 보면 서로 다른 전개도의 모양들과의 관련성을 쉽게 파악할 수 있다.

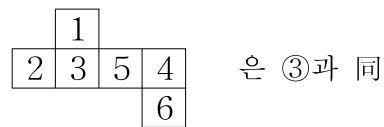


정다면체의 겨냥도와 전개도

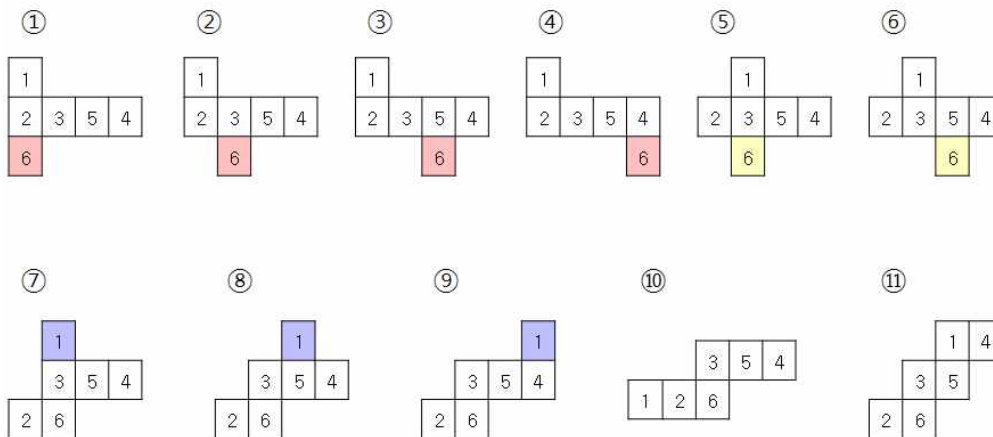
폴리드론, 컴퍼스, 자, A4 용지(활동지 뒷면)

한글판폴리프로그램(poly program <http://www.mathlove.org/doc/downsoft/poly32.exe>)

자바프로그램(http://edupark.kongju.ac.kr/java_math/midjava/lrn/plain1.html)

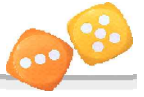


1. 정육면체의 전개도



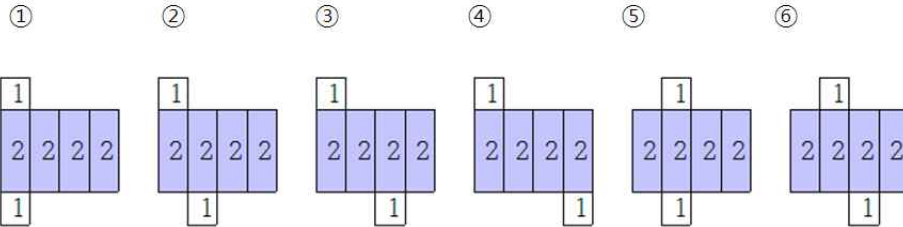
폴리드론으로 정육면체를 만든 다음 모서리 ()개를 떼어내어 전개도를 만든다.

①정육면체의 서로 다른 전개도는 ()개. ②서로 다른 주사위의 전개도는 ()개

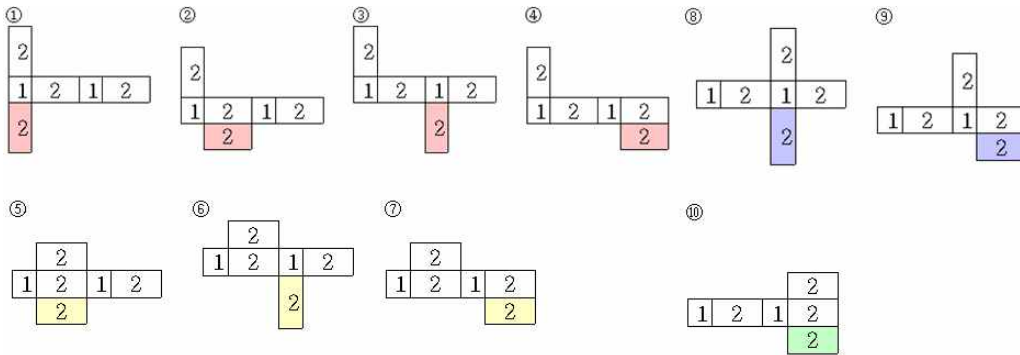


2. 정사각형기둥의 전개도

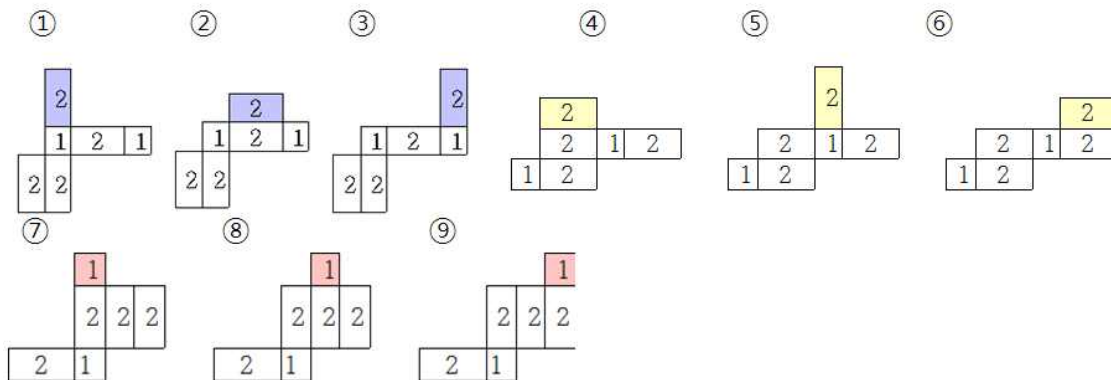
▶ 유형 1 : 가운데 줄에 2가 4칸이 올 수 있는 형태로 1의 위치에 따라 6가지



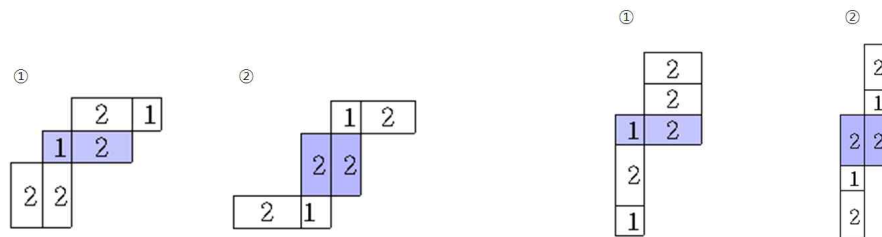
▶ 유형 2 : 가운데 줄에 1과 2가 번갈아 4칸이 나오면서 위, 아래의 2의 위치를 바꿀 수 있는 것으로 10가지



▶ 유형 3 : 가운데 줄에 3칸을 놓는 방법으로 (1,2,1), (2,1,2), (2,2,2)의 3종류. 그 각각에 대하여 위에 있는 2의 위치를 3곳으로 바꿀 수 있으므로 9 가지



▶ 유형 4 : 가운데 가로줄에 둘을 고정시키면서 계단형이 될 수 있는 것은 가운데줄에(1,2), (2,1), (2,2)이다. 그러나 (1,2)와 (2,1)은 같게 되므로 2가지



▶ 유형 5 : 유형4로부터 얻은 번개형 2가지

중 ()개



3. 직육면체의 서로 다른 전개도

세 변의 길이가 각각 1, 2, 3인 직육면체의 서로 다른 전개도는 모두 몇 개인가?
(단, 모든 모양을 일일이 그리지는 말고 비슷한 유형끼리 모아서 개수만 구하시오.)



4. 폴리드론으로 모든 정다면체 만들기

(1) 정다면체란?

(2) 정다면체는 모두 몇 개인가? 그 이유는?

한 꼭지점에 모인 정다면체의 종류와 개수	정삼각형(0)	정사각형(90°)	정오각형(108°)	정육각형(120°)
3개	정사면체	정육면체	정십이면체	×
4개	정팔면체	×	×	×
5개	정이십면체	×	×	×

(3) 정다면체의 구성요소 확인하기

아래의 표에 따라 각 정다면체의 구성 요소들(점, 선, 면 등)을 확인하시오. 수학적으로 쉽게 세는 방법을 찾아 보시다.

구분	각 면의 모양	각 꼭지점에 모인 면의 수	꼭지점의 개수(V)	모서리의 개수(E)	면의 개수(F)		발견한 규칙/성질
정사면체							
정육면체							
정팔면체							
정십이면체							
정이십면체							

5. 깎은 정다면체의 구성요소 확인하기

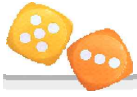
1) 정다면체의 각 모서리를 3등분(또는 2등분)한 점끼리 연결하면 꼭지점 부분은 깎여나가고 새로운 면이 생기게 됩니다. 이렇게 규칙적으로 깎은 다면체를 ‘준정다면체’라고 합니다.



http://user.chollian.net/~badang25/zome/zome05/zome05_00.htm

※ 위의 그림은 조노돔시스템으로 만든 모양임. 조노돔시스템으로 만든 것과 폴리드론으로 만든 것의 차이를 설명해 보자.

2) 다음 표에서 각 준정다면체 구성요소들의 개수를 적어 보시다.



구분		원래의 입체 도형	각 꼭지 새로 생기는 다각형	원래의 면에 남은 다각형	새로 생기는 입체 도형에 들어있는			
					꼭지점의 개수(V)	모서리의 개수(E)	면의 개수(F)	
모서리를 등분한 점끼리 연결하여 만든 입체도형	3등분	정사면체						
		정육면체						
		정팔면체						
		정십이면체						
		정이십면체						
	2등분	정사면체						
		정육면체						
		정팔면체						
		정십이면체						
		정이십면체						
기타, 내가 새롭게 만든 도형								



〈보충자료〉 새로운 축구공의 평면그래프 탐구

다음은 1930년 제 1회 우루과이 월드컵에서 사용한 축구공이래로 축구공의 모양이 진화하고 있는 것을 보여줍니다. 이 축구공의 모양에는 어떤 수학적 원리가 들어있을까요?



<http://www.soccerballworld.com/HistoryWCBalls.htm> 축구공의 역사

- 2002년 한일월드컵에서 사용했던 피버노바 축구공과 2004년 Euro컵 공인구인 로테이로는 전통적인 Buckminster 축구공의 모습을 하고 있습니다. 전통적인 Buckminster 축구공에서의 점, 선, 면의 개수를 세어봅시다.

축구공	정오각형의 개수	정육각형의 개수	축구공에 들어있는			개수들 사이의 관계
			점의 개수 (V)	선의 개수 (E)	면의 개수 (F)	
피버노바와 벽민스터						

- 피버노바 축구공에서 점, 선, 면의 개수를 쉽게 셀 수 있는 방법을 설명해 보시오.
- 피버노바 축구공의 연결 모양은 어떤 준정다면체 모양과 같은가요?



4. 2006년(독일), 2010년(남아공), 2014년(브라질) 월드컵에서 사용한 팀가이스트와 자블라니, 브라주카 축구공은 전통적인 백민스터 축구공의 형태에서 구조적으로 변형한 조각들이 사용되었습니다. 이 두 가지 축구공에서의 점, 선, 면의 개수를 세어보려고 합니다. 그런데 여러 분 앞에 그림 외에는 실물이 없습니다. 반대편의 모양을 상상하여 개수를 세어 보시오.

축구공	항아리 모양의 개수	날개 모양의 개수	축구공에 들어있는			개수들 사이의 관계
			점의 개수 (V)	선의 개수 (E)	면의 개수 (F)	
팀가이스트						
자블라니						
브라주카						

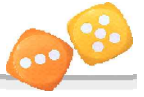


2006 독일 월드컵 공인구 팀가이스트

반중빈 기자 bjin@yna.co.kr / 20100604



<http://blog.daum.net/ceta21/15644480>



5. 팀가이스트와 자블라니, 브라주카 축구공의 연결 모양은 각각 어떤 준정다면체 모양과 같은가요?
6. 팀가이스트와 자블라니, 브라주카 축구공에서 점, 선, 면의 개수를 쉽게 셀 수 있는 방법을 설명해 보시오.
7. 팀가이스트와 자블라니, 브라주카 축구공의 (새로운) 평면 그래프를 그리시오.

