Engineering Mathematics II

11. Fourier Series, Integral, and Transforms

Bong-Kee Lee
School of Mechanical Engineering
Chonnam National University

11.1 Fourier Series

- 주기함수(periodic function)
  - 함수 f(x),
    - 모든 실수 x에 대하여 정의
    - 어떤 양수 p가 존재하여, 모든 x에 대하여 f(x + p)=f(x)

주기 (period)

주기함수 (periodic function)

      - 예. sin x, cos x (주기 2π)
      - 주기함수가 아닌 예. x, x^2, x^3, e^x, cosh x, ln x 등
  - 주기함수의 성질

□ 함수 f(x)의 주기가 p이면, 모든 x에 대하여 f(x + np) = f(x) (n=1, 2, 3, …)

□ f(x)와 g(x)의 주기가 p이면, af(x)+bg(x)의 주기도 p이다. (a, b: 임의의 상수)

11.1 Fourier Series

- 삼각급수(trigonometric series)
  - 삼각함수 계(trigonometric system)
    - 주기 2π인 함수들로 이루어진 계

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

  - 삼각급수(trigonometric series)

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

계수(coefficient)

- 삼각급수가 수렴할 경우, 그 합은 주기가 2π인 주기함수

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

푸리에 급수 (Fourier series)

11.1 Fourier Series

- 푸리에 급수(Fourier series)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

  - 푸리에 계수(Fourier coefficients)
    - 푸리에 급수의 계수들
    - 오일러 공식(Euler formulas)에 의하여 결정할 수 있음

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

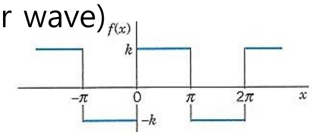
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

11.1 Fourier Series

- 푸리에 급수(Fourier series)
  - Ex. 1 주기적인 직사각형파(rectangular wave)



$$f(x)=\begin{cases}-k & (-\pi<x<0)\\ k & (0<x<\pi)\end{cases} \;\&\; f(x+2\pi)=f(x)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)dx+\int_{0}^{\pi}kdx\right]=0\Rightarrow a_0=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}k\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}k\cos nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}+k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]=0\Rightarrow a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}k\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}k\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}-k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]$$

11.1 Fourier Series

- 푸리에 급수(Fourier series)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}-k\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right]=\frac{k}{n\pi}\left[1-\cos(-n\pi)-\cos n\pi+1\right]=\frac{2k}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

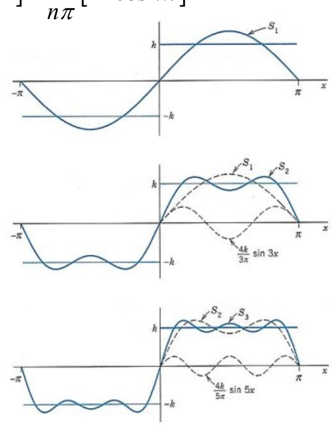
$$\rightarrow \cos n\pi=\begin{cases}-1 & (n=\text{odd})\\ 1 & (n=\text{even})\end{cases}\rightarrow 1-\cos n\pi=\begin{cases}2 & (n=\text{odd})\\ 0 & (n=\text{even})\end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n=\begin{cases}\frac{4k}{n\pi} & (n=\text{odd})\\ 0 & (n=\text{even})\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{4k}{\pi}\sin x+\frac{4k}{3\pi}\sin 3x+\frac{4k}{5\pi}\sin 5x+\cdots$$

$$=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$$

$$\rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=k=\frac{4k}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)\leftrightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$



11.1 Fourier Series

- 푸리에 급수(Fourier series)
  - 삼각함수 계의 직교성(orthogonality)
    - 삼각함수 계는 구간 $-\pi \le x \le \pi$ 에서 직교한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \quad (n \neq m)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \neq m)$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \quad (n \neq m \text{ or } n = m)$$

  - 푸리에 급수에 의한 표현

□ 함수 f(x)에 대하여,
: 주기가 2π 인 주기함수 & 구간 $-\pi \le x \le \pi$ 에서 구분연속(piecewise continuous) & 각 점에서 좌도함수(left-hand derivative)와 우도함수(right-hand derivative)를 가짐
⇒ 함수 f(x)의 푸리에 급수는 수렴한다.
: f(x)가 불연속인 점을 제외한 모든 점에서의 급수 합 = f(x)
: 불연속인 점에서의 급수의 합 = f(x)의 좌극한값과 우극한값의 평균

11.2 Functions of Any Period p=2L

- 임의의 주기(p=2L)을 가지는 함수
  - 주기가 2π인 함수를 주기가 2L인 함수로 단순히 주기의 척도만을 변화시킴

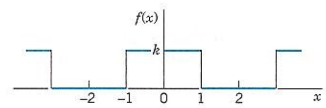
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

11.2 Functions of Any Period p=2L

- 임의의 주기(p=2L)을 가지는 함수
  - Ex. 1 주기적인 직사각형파

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-2<x<-1)\\ k & (-1<x<1)\\ 0 & (1<x<2)\end{cases} \quad \& \; p=2L=4\rightarrow L=2$$



$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}kdx=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}k\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{k}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{nx}{2}\right)=\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=\text{even})\\ \dfrac{2k}{n\pi} & (n=1,5,9,\cdots)\\ -\dfrac{2k}{n\pi} & (n=3,7,11,\cdots)\end{cases}$$

11.2 Functions of Any Period p=2L

- 임의의 주기(p=2L)을 가지는 함수
  - Ex. 1 주기적인 직사각형파

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}k\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{k}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{2k}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{2k}{5\pi}\cos\frac{5\pi}{2}x-\frac{2k}{7\pi}\cos\frac{7\pi}{2}x+\cdots$$

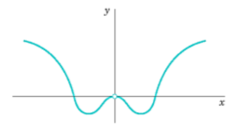
$$=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}x+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}x-\frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{2}x+\cdots\right)$$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

- 푸리에 코사인 급수 & 푸리에 사인 급수
  - 푸리에 코사인 급수(Fourier cosine series)
    - 주기가 2L 인 우함수(even function; g(-x)=g(x))의 푸리에 급수

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

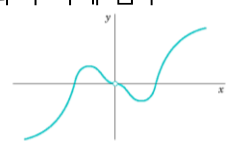
$$\left(a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\quad(n=1,2,3,\cdots)\right)$$



  - 푸리에 사인 급수(Fourier sine series)
    - 주기가 2L 인 기함수(odd function; h(-x)=-h(x))의 푸리에 급수

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\left(b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\quad(n=1,2,3,\cdots)\right)$$



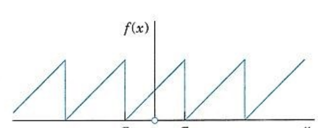
11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

- 푸리에 코사인 급수 & 푸리에 사인 급수
  - 합과 스칼라곱
    - 함수의 합인 f_1+f_2 의 푸리에 계수는 f_1 과 f_2 각각에 해당하는 푸리에 계수의 합과 같다.
    - 함수 cf 의 푸리에 계수는 f 의 해당 푸리에 계수에 c 를 곱한 것과 같다.
  - Ex. 3 톱니파(sawtooth wave)

$$f(x)=x+\pi\quad(-\pi<x<\pi)\quad\&\quad f(x+2\pi)=f(x)$$

$$\rightarrow f=f_1+f_2$$

$$f_1=x\quad\&\quad f_2=\pi$$



11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

- 푸리에 코사인 급수 & 푸리에 사인 급수

$(f_1 = x)$: odd function $\rightarrow a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}dx\right]$$

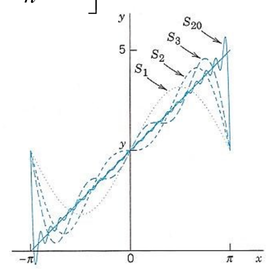
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$(f_2 = \pi)$: $a_0 = \pi, a_n = b_n = 0$

$$\Rightarrow f = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right) + (a_0) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

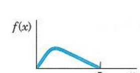
$$= \pi - 2\cos\pi\sin x - \cos 2\pi\sin 2x - \frac{2}{3}\cos 3\pi\sin 3x - \cdots$$

$$= \pi + 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \cdots = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)$$

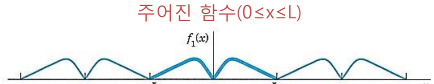


11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

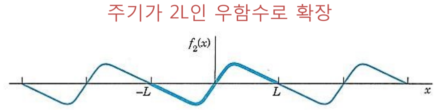
- 반구간 전개(half-range expansions)
  - 주어진 함수(L)를 주기적인 함수(주기 2L)로 확장
    - 주기적인 우함수로 확장(even periodic extention)
    - 주기적인 기함수로 확장(odd periodic extention)
    - 함수 f는 길이 2L의 주기 구간의 반구간 범위 내에서 주어짐



주어진 함수(0≤x≤L)



주기가 2L인 우함수로 확장



주기가 2L인 기함수로 확장

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

- 반구간 전개(half-range expansions)
  - Ex. 4

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{L}x & \left(0<x<\frac{L}{2}\right)\\ \frac{2k}{L}(L-x) & \left(\frac{L}{2}<x<L\right)\end{cases}$$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{L}\left[\int_0^{L/2}\frac{2k}{L}xdx+\int_{L/2}^{L}\frac{2k}{L}(L-x)dx\right]=\frac{2k}{L^2}\left[\int_0^{L/2}xdx+\int_{L/2}^{L}(L-x)dx\right]=\frac{2k}{L^2}\frac{L^2}{4}=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{4k}{L^2}\left[\int_0^{L/2}x\cos\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

$$=\frac{4k}{L^2}\left[\left(\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\right)+\left(-\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{4k}{L^2}\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi+\cos\frac{n\pi}{2}\right]=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi-1\right]$$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

- 반구간 전개(half-range expansions)

$$\rightarrow f(x)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{2^2\pi^2}\cos\frac{2\pi}{L}x-\frac{16k}{6^2\pi^2}\cos\frac{6\pi}{L}x-\cdots=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x+\cdots\right)$$

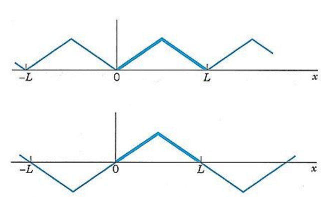
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{4k}{L^2}\left(\int_0^{L/2}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)$$

$$=\frac{4k}{L^2}\left[\left(-\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)+\left(\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]=\frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{8k}{1^2\pi^2}\sin\frac{\pi}{L}x-\frac{8k}{3^2\pi^2}\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{8k}{5^2\pi^2}\sin\frac{5\pi}{L}x-\cdots$$

$$=\frac{8k}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{L}x-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x-\cdots\right)$$



11.4 Complex Fourier Series

- 복소 푸리에 급수(complex Fourier series)

푸리에 급수

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$

$$e^{-it}=\cos t-i\sin t$$

$$\to\begin{cases}\cos t=\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)\\ \sin t=\frac{1}{2}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\end{cases}$$

복소 푸리에 급수

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

$$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

복소 푸리에 급수(주기 2L인 함수)

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\pi x/L}$$

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\pi x/L}dx$$

$$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

11.4 Complex Fourier Series

- 복소 푸리에 급수(complex Fourier series)
  - Ex. 1

$$f(x)=e^x\quad(-\pi<x<\pi)\quad\&\quad f(x+2\pi)=f(x)$$

$$\to c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(-1)^n\quad\leftarrow e^{\pm in\pi}=\cos n\pi\pm\sin n\pi=\cos n\pi=(-1)^n$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}\left(\frac{1+in}{1+in}\right)2\sinh\pi(-1)^n=\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n$$

$$\to f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}$$

복소 푸리에 급수 (complex Fourier series)

11.4 Complex Fourier Series

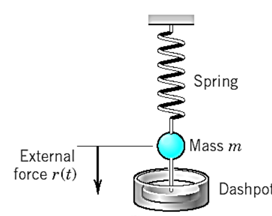
- 복소 푸리에 급수(complex Fourier series)

$$(1+in)e^{inx} = (1+in)(\cos nx + i\sin nx) = \cos nx - n\sin nx + in\cos nx + i\sin nx$$
$$(1-in)e^{-inx} = (1-in)(\cos nx - i\sin nx) = \cos nx - n\sin nx - in\cos nx - i\sin nx$$
$$\rightarrow (1+in)e^{inx} + (1-in)e^{-inx} = 2(\cos nx - n\sin nx)$$
$$\Rightarrow f(x) = e^x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{\sinh \pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}$$
$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} - \frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{1}{1+1^2}2(\cos x - \sin x) + \frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{1}{1+2^2}2(\cos 2x - 2\sin 2x) - \cdots$$
$$= \frac{2\sinh \pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2}(\cos 2x - 2\sin 2x) - \cdots\right)$$

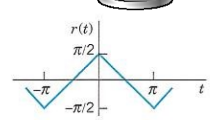
실 푸리에 급수 (real Fourier series)

11.5 Forced Oscillations

- 강제진동
  - Ex. 1



$$my'' + cy' + ky = r(t) \rightarrow y'' + 0.05y' + 25y = r(t)$$
$$r(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2} & (-\pi < t < 0) \\ -t + \dfrac{\pi}{2} & (0 < t < \pi) \end{cases} \quad \& \; r(t+2\pi) = r(t)$$



$$\text{Fourier coefficients}: a_0 = b_n = 0, a_n = \frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)$$
$$\rightarrow r(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)\cos nt = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right)$$
$$\Rightarrow r(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \quad (n = 1,3,5,\cdots)$$
$$\Rightarrow y'' + 0.05y' + 25y = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt \quad (n = 1,3,5,\cdots)$$

11.5 Forced Oscillations

- 강제진동

특성방정식의 모든 근이 음수
또는 음의 실수부를 가짐 (안정성)

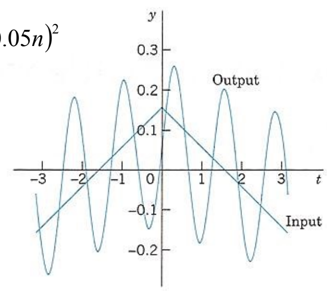
$$y''+0.05y'+25y=\frac{4}{n^2\pi}\cos nt \quad (n=1,3,5,\cdots): y=y_h+y_p \rightarrow y_p \quad \text{as } t\rightarrow\infty$$

$$\rightarrow y(t)_{steady}=y_p(t)=\sum_n y_n=\sum_n (A_n\cos nt+B_n\sin nt)$$ 미정계수법

$$y_n''+0.05y_n'+25y_n=\frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

$$\rightarrow A_n=\frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D_n},\ B_n=\frac{0.2}{n\pi D_n},\ D_n=(25-n^2)^2+(0.05n)^2$$

$$\Rightarrow y(t)_{steady}=y_p(t)=\sum_n y_n=y_1+y_3+y_5+\cdots$$



11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials

- 근사 이론(approximation theory)
  - 푸리에 급수의 주된 응용 분야의 하나
  - 어떤 함수의 근사값을 단순한 함수로 표현
  - 기본 개념
    - f(x): 주기가 2π 인 푸리에 급수로 표현 가능한 주기함수
    → N차 부분합: f(x)에 대한 근사값

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\rightarrow f(x)\approx a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

– N차의 삼각다항식(N고정)을 이용하여 최적으로 함수 f를 근사화

$$F(x)=A_0+\sum_{n=1}^{N}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\approx f(x)$$

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials

- 근사 이론(approximation theory)
  - 제곱 오차(square error)
    - 구간 $-\pi \le x \le \pi$ 에서 함수 F의 함수 f에 관한 제곱 오차

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx$$

  - 최소 제곱 오차
    - 구간 $-\pi \le x \le \pi$ 에서 F의 f에 관한 제곱 오차는 F의 계수가 f의 푸리에 계수이면 최소가 된다.

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \right]$$

      - N이 증가함에 따라 f의 푸리에 급수 부분합은 제곱 오차 관점에서 점점 더 f를 잘 근사화하게 됨

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials

- 근사 이론(approximation theory)
  - Bessel의 부등식(Bessel's inequality)

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx$$

  - Parseval의 정리(Parseval's theorem)

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx$$

11.7 Fourier Integral

- Ex.1
  - 주기가 2L인 함수에서 주기가 L→∞가 될 경우

$$f_L(x)=\begin{cases}0 & (-L<x<-1)\\ 1 & (-1<x<1)\\ 0 & (1<x<L)\end{cases}\quad (2L>2)$$

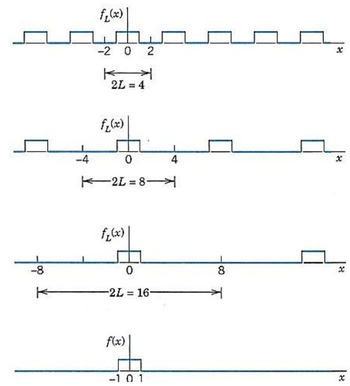
$$\rightarrow f(x)=\lim_{L\to\infty} f_L(x)=\begin{cases}1 & (-1<x<1)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\&\ f(x):\text{even function}\rightarrow b_n=0$$

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx=\frac{1}{2L}\int_{-1}^{1}dx=\frac{1}{L}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\int_{-1}^{1}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{2}{L}\int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}=\frac{2}{L}\frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

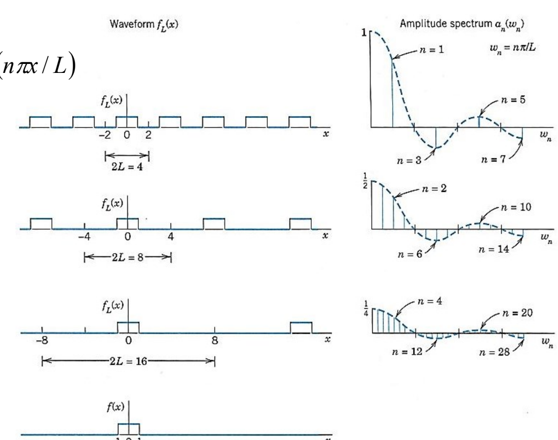


11.7 Fourier Integral

- Ex.1

$$a_0=\frac{1}{L}\ \&\ a_n=\frac{2}{L}\frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

$$\rightarrow f_L(x)=\frac{1}{L}+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{2}{L}\frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}}_{\text{진폭 스펙트럼 (amplitude spectrum)}}\cos(n\pi x/L)$$



11.7 Fourier Integral

- 푸리에 적분(Fourier integral)

$$f_L(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos w_nx+b_n\sin w_nx)\quad\left(w_n=\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(v)dv+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_nx\int_{-L}^{L}f_L(v)\cos w_nvdv+\sin w_nx\int_{-L}^{L}f_L(v)\sin w_nvdv\right]$$

$$\leftarrow \Delta w=w_{n+1}-w_n=\frac{(n+1)\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L}$$

$$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(v)dv+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos w_nx)\Delta w\int_{-L}^{L}f_L(v)\cos w_nvdv+(\sin w_nx)\Delta w\int_{-L}^{L}f_L(v)\sin w_nvdv\right]$$

$$\rightarrow f(x)=\lim_{L\to\infty}f_L(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos wx\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv+\sin wx\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wvdv\right]dw$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dw$$ **푸리에 적분(Fourier integral)**

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv\ \&\ B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wvdv$$

11.7 Fourier Integral

- 푸리에 적분(Fourier integral)

$$\boxed{\begin{gathered}f(x)=\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dw\\ A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wvdv\ \&\ B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wvdv\end{gathered}}$$

- 모든 유한 구간에서 구분연속
- 모든 점에서 좌도함수와 우도함수가 존재
- 아래 적분의 유한한 극한이 존재(절대 적분 가능, absolutely integrable)

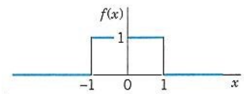
$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0|f(x)|dx+\lim_{b\to\infty}\int_0^b|f(x)|dx$$

→ f(x)는 푸리에 적분으로 표현이 가능
(f(x)가 불연속인 점에서의 푸리에 적분값은 그 점에서 f(x)의 좌극한 값과 우극한값의 평균과 같음)

11.7 Fourier Integral

- 푸리에 적분(Fourier integral)
  - Ex. 2

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$



$$(a)\,A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wv\,dv=\frac{1}{\pi}\frac{1}{w}\sin wv\Big|_{v=-1}^{v=1}=\frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$(b)\,B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin wv\,dv=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{w}\cos wv\Big|_{v=-1}^{v=1}=0$$

$$\to f(x)=\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dw=\int_0^{\infty}\frac{2\sin w}{\pi w}\cos wx\,dw=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw=f(x)\to\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}f(x)=\begin{cases}\pi/2 & (0\le x<1)\\ \pi/4 & (x=1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$

Dirichlet의 불연속인자(discontinuous factor)

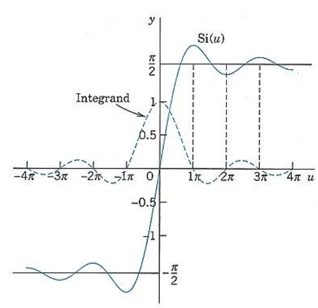
11.7 Fourier Integral

- 푸리에 적분(Fourier integral)

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw=\begin{cases}\pi/2 & (0\le x<1)\\ \pi/4 & (x=1)\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$

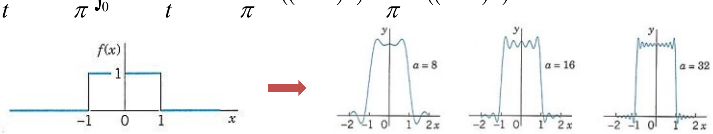
$$(x=0)\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}\to \mathrm{Si}(u)=\int_0^{u}\frac{\sin w}{w}dw$$

사인 적분(sine integral)



$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw\approx\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw=\frac{1}{\pi}\int_0^{a}\frac{\sin(w+wx)}{w}dw+\frac{1}{\pi}\int_0^{a}\frac{\sin(w-wx)}{w}dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a}\frac{\sin t}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}((x+1)a)-\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}((x-1)a)$$



11.7 Fourier Integral

- 푸리에 적분(Fourier integral)

$$f(x)=\int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv \,\&\, B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv$$

  – 푸리에 코사인 적분(Fourier cosine integral)
    - f(x)가 우함수일 때의 푸리에 적분

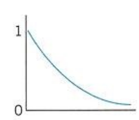
$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv dv \,\&\, B(w)=0 \rightarrow f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx dw$$

  – 푸리에 사인 적분(Fourier sine integral)
    - f(x)가 기함수일 때의 푸리에 적분

$$A(w)=0 \,\&\, B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv dv \rightarrow f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx dw$$

11.7 Fourier Integral

- 푸리에 적분(Fourier integral)
  – Ex. 3 라플라스 적분 $f(x)=e^{-kx} \quad (x>0, k>0)$



$$(a) A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv dv = \frac{2k/\pi}{k^2+w^2}$$

$$\rightarrow f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx dw = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw = e^{-kx}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos wx}{k^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2k}e^{-kx}$$ 라플라스 적분

$$(b) B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\sin wv dv = \frac{2w/\pi}{k^2+w^2}$$

$$\rightarrow f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx dw = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw = e^{-kx}$$

$$\rightarrow \int_0^\infty \frac{w\sin wx}{k^2+w^2}dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx}$$ 라플라스 적분

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms

- 적분 변환(integral transform)
  - 주어진 함수를 다른 변수에 종속하는 새로운 함수로 만드는 적분 형태의 변환 (예. 라플라스 변환)
  - 푸리에 코사인 변환(Fourier cosine transform)
    - 우함수인 f(x)에 대하여,

$$f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx\,dw$$

$$\& \ A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\cos wv\,dv\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_c(w)$$

$$\begin{cases}\mathcal{F}_c(f)=\hat{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx & \text{푸리에 코사인 변환}\\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos wx\,dw & \text{푸리에 코사인 역변환}\end{cases}$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms

- 적분 변환(integral transform)
  - 푸리에 사인 변환(Fourier sine transform)
    - 기함수인 f(x)에 대하여,

$$f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx\,dw$$

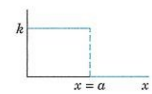
$$\& \ B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv\,dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\sin wv\,dv\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}_s(w)$$

$$\begin{cases}\mathcal{F}_s(f)=\hat{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx & \text{푸리에 사인 변환}\\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\sin wx\,dw & \text{푸리에 사인 역변환}\end{cases}$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms

- 적분 변환(integral transform)
  - Ex. 1

$$f(x)=\begin{cases} k & (0<x<a) \\ 0 & (x>a) \end{cases}$$



$$\rightarrow \hat{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos wx dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} k\cos wx dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{1}{w}\sin wx\Big|_{x=0}^{x=a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\left(\frac{\sin aw}{w}\right)$$

$$\rightarrow \hat{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin wx dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{a} k\sin wx dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{1}{w}\cos wx\Big|_{x=0}^{x=a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\left(\frac{\cos aw-1}{w}\right)$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms

- 적분 변환(integral transform)
  - 선형성

$$\mathcal{F}_c(af+bg)=a\mathcal{F}_c(f)+b\mathcal{F}_c(g)$$
$$\mathcal{F}_s(af+bg)=a\mathcal{F}_s(f)+b\mathcal{F}_s(g)$$

  - 도함수의 코사인 및 사인 변환
    - f(x): 연속이며 x축 상에서 절대 적분 가능
    - f′(x): 모든 유한 구간에서 구분연속
    - x → ∞ 일 때, f(x) → 0

$$\mathcal{F}_c\{f'(x)\}=w\mathcal{F}_s\{f(x)\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$$

$$\mathcal{F}_s\{f'(x)\}=-w\mathcal{F}_c\{f(x)\}$$

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\}=-w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$$

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\}=-w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0)$$

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms

- 적분 변환(integral transform)
  - Ex. 3

$$f(x) = e^{-ax} \quad (a > 0)$$
$$\rightarrow f'(x) = -ae^{-ax} \ \& \ f''(x) = a^2 e^{-ax} = a^2 f(x)$$
$$\Rightarrow a^2 f(x) = f''(x)$$
$$a^2 \mathcal{F}_c(f) = \mathcal{F}_c(f'') = -w^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -w^2 \mathcal{F}_c(f) + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
$$\rightarrow (a^2 + w^2)\mathcal{F}_c(f) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}_c(f) = \mathcal{F}_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + w^2}$$

11.9 Fourier Transforms. Discrete and Fast Fourier Transforms

- 푸리에 변환(Fourier transform)
  - 푸리에 코사인 변환 & 푸리에 사인 변환: 실수 변환
  - 푸리에 변환: 복소수 변환
    - 복소 푸리에 적분(complex Fourier integral)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)} dv dw$$

    - 푸리에 변환

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \rightarrow \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

    - 푸리에 역변환(inverse Fourier transform)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw \rightarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$$

- 푸리에 변환(Fourier transform)
  - 푸리에 변환의 존재
    - f(x) 가 x 축 상에서 절대 적분 가능이고 모든 유한 구간에서 구분 연속 → f(x)의 푸리에 변환이 존재함
  - Ex. 1

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

$$\hat{f}(w)=\mathscr{F}\{f(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-iwx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{iw}\right)e^{-iwx}\Big|_{x=-1}^{x=1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{iw}\right)\left(e^{-iw}-e^{iw}\right)=\frac{e^{-iw}-e^{iw}}{-iw\sqrt{2\pi}}=\frac{-2i\sin w}{-iw\sqrt{2\pi}}=\frac{2\sin w}{w\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}$$

11.9 Fourier Transforms. Discrete and Fast Fourier Transforms

- 푸리에 변환(Fourier transform)
  - 선형성

$$\mathscr{F}(af+bg)=a\mathscr{F}(f)+b\mathscr{F}(g)$$

  - 도함수의 푸리에 변환
    - f(x): x축 상에서 연속
    - f'(x): x축 상에서 절대 적분 가능
    - $|x| \to \infty$ 일 때, f(x) → 0

$$\mathscr{F}\{f'(x)\}=iw\mathscr{F}\{f(x)\}$$
$$\mathscr{F}\{f''(x)\}=-w^2\mathscr{F}\{f(x)\}$$

Engineering Mathematics II School of Mechanical Engineering

- 푸리에 변환(Fourier transform)
  - Ex. 3 $f(x) = xe^{-x^2}$

$$\rightarrow xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)' \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'$$

$$\rightarrow \mathscr{F}(f) = \mathscr{F}\left\{-\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right\} = -\frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{\left(e^{-x^2}\right)'\right\} = -\frac{1}{2}iw\mathscr{F}\left\{e^{-x^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}iw\left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-w^2/4}\right] = -\frac{iw}{2\sqrt{2}}e^{-w^2/4}$$

  - 합성곱(convolution)

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp$$

    - 합성곱 정리
      - f(x)와 g(x)가 구분연속이고 유계(bounded)하며, x축 상에서 절대 적분 가능한 경우,

$$\mathscr{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g) \leftrightarrow (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw$$