2 마찰에 의한 에너지 손실수두

2.2 마찰손실 – Darcy-Weisbach 공식

- 실제(점성)유체

마찰손실수두

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L$$

- 관 벽에서의 조건, $\tau = \tau_0$를 대입하면,

$$h_L = \frac{\tau_0 l}{\gamma R_h}$$

1. 위 식을 유도하는 흐름상태에 대한 제한이나 조건을 부여하지 않았으므로, 층류와 난류 모두에 적용이 가능.
2. 위 식은 단면 ①에서 단면 ②까지 관의 길이 ℓ 을 흐르는 동안에 생긴 마찰손실 수두의 크기를 나타냄.

2 마찰에 의한 에너지 손실수두

- Darcy-Weisbach 공식

$$h_L = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

- 위 식에서 마찰계수 f는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$f = f\left(\mathrm{Re}, \frac{e}{d}\right)$$

[레이놀즈 수, 상대조도] 의 함수

- 비원형 단면에 대해서는 $R_h = d/4$ 의 관계를 이용,

$$h_L = f\frac{l}{4R_h}\frac{V^2}{2g}$$

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\pi d} = \frac{d}{4}$$

- 관벽의 전단응력 τ_0 는

$$\tau_0 = \frac{f\rho V^2}{8} \Leftarrow h_L = \frac{\tau_0 l}{\gamma R_h} = \frac{\tau_0 l}{\gamma\frac{d}{4}} = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

[9.17] [9.18]

2 마찰에 의한 에너지 손실수두

$$\tau_0 = \frac{f\rho V^2}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_0}{\rho} = f\frac{V^2}{8}$$

- 마찰계수 f가 무차원 이므로, $\sqrt{\tau_0 / \rho}$ 가 속도의 차원을 가져야 한다(**차원의 동차성**).

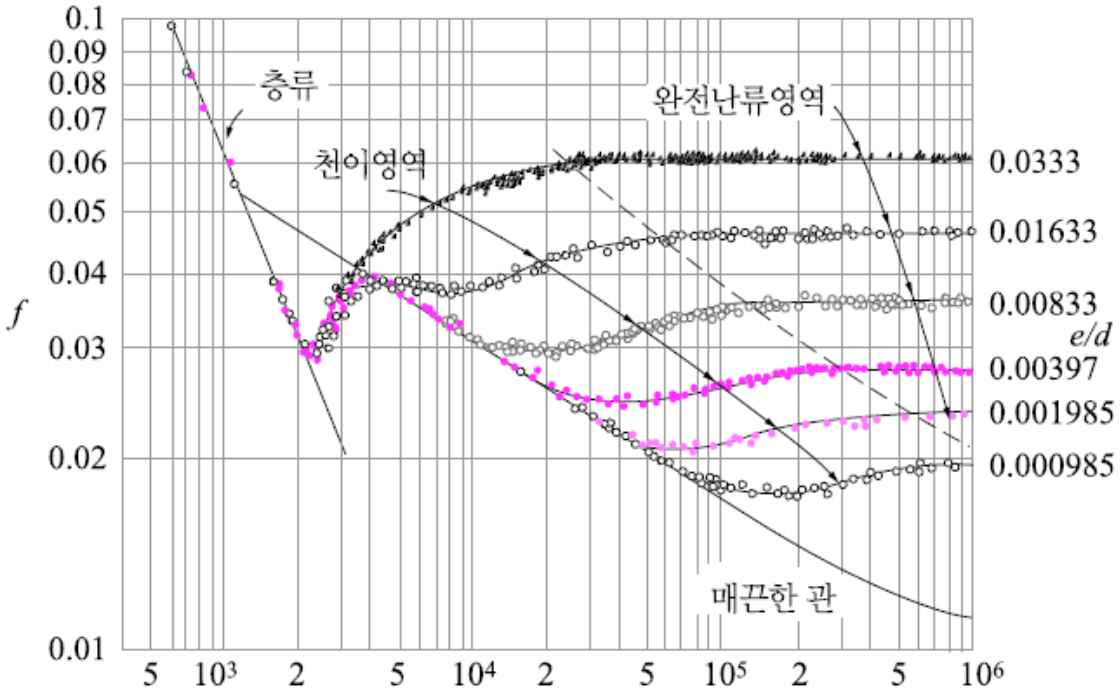
마찰속도

$$u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = V\sqrt{\frac{f}{8}}$$

2.3 관수로 흐름의 마찰손실계수에 대한 실험

1. 마찰손실수두의 정확한 산정을 위해서는 마찰계수 f의 정확한 평가가 필요함.
2. 마찰계수는 레이놀즈 수(Re)와 상대조도(e/d)의 함수임.
3. 마찰계수를 알기 위해서는 흐름특성 및 관의 제원을 알아야 함.
4. 마찰계수의 함수형태는 실험에 의해서 결정됨.

2 마찰에 의한 에너지 손실수두



Nikuradse의 마찰계수의 실험결과

1. 층류영역에서는 마찰계수는 레이놀즈 수에만 의존, Re에 반비례함.
2. 천이영역에서는 마찰계수는 레이놀즈 수와 상대조도 양자에 의해 영향을 받음.
3. 완전난류영역에서는 마찰계수는 레이놀즈 수에 상관없이 상대조도의 영향만 받음.
4. 매끄러운 벽면을 가진 관의 마찰손실계수는 레이놀즈 수 만의 함수임.

2 마찰에 의한 에너지 손실수두

예제) 지름 30cm, 이동거리 100m, 수두손실 15m 일 때, 관 중심에서 10cm 떨어진 곳에서 전단응력과 관벽에서의 전단응력을 구하라.

1. 관 중심으로부터 10cm 떨진 곳에서의 전단응력

$$\tau = \frac{\gamma h_L}{2l} r = \frac{1000 \times 15}{2 \times 100} \times 0.1$$

$$= 7.5 \text{ kg중/m}^2 = 73.5 \text{ N/m}^2$$

2. 관벽에서의 전단응력은

$$\tau_0 = \frac{\gamma h_L}{2l} R = \frac{1000 \times 15}{2 \times 100} \times 0.15$$

$$= 11.25 \text{ kg중/m}^2 = 110.25 \text{ N/m}^2$$

2 마찰에 의한 에너지 손실수두

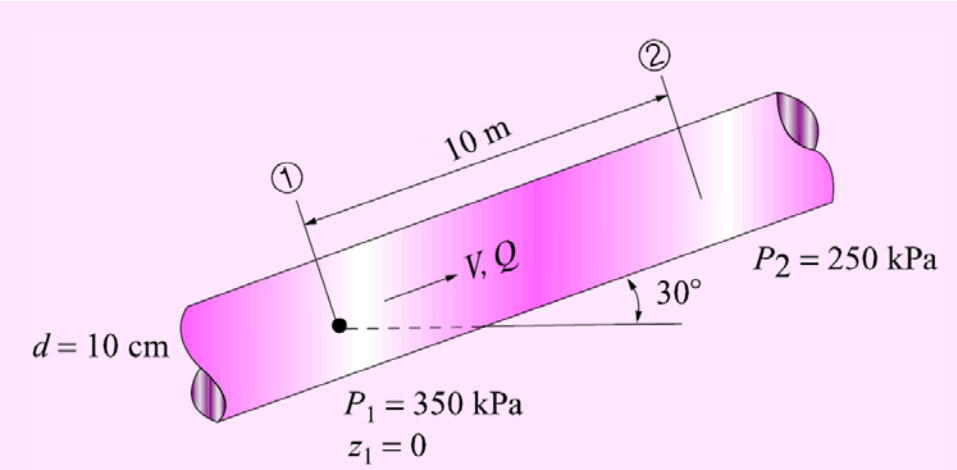
예제) 이전 문제 예제 조건과 동일하고, 관만 0.3m×0.3m로 대체한 경우에 관벽에서의 전단응력을 구하라.

$$\tau_0 = \frac{\gamma h_L ab}{2l(a+b)} = \frac{1000 \times 15 \times 0.3 \times 0.3}{2 \times 100(0.3+0.3)}$$

$$= 11.25 \text{ kg중/m}^2 = 110.25 \text{ N/m}^2$$

2 마찰에 의한 에너지 손실수두

예제) 그림과 같은 관을 통해, 물이 거슬러 흐르고 있다. 10m 떨어진 두 점 1과 2사이의 손실수두를 구하라.



- 점 1과 2에서의 평균유속이 같으므로,

$$h_L = \left(\frac{P_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + z_2\right)$$

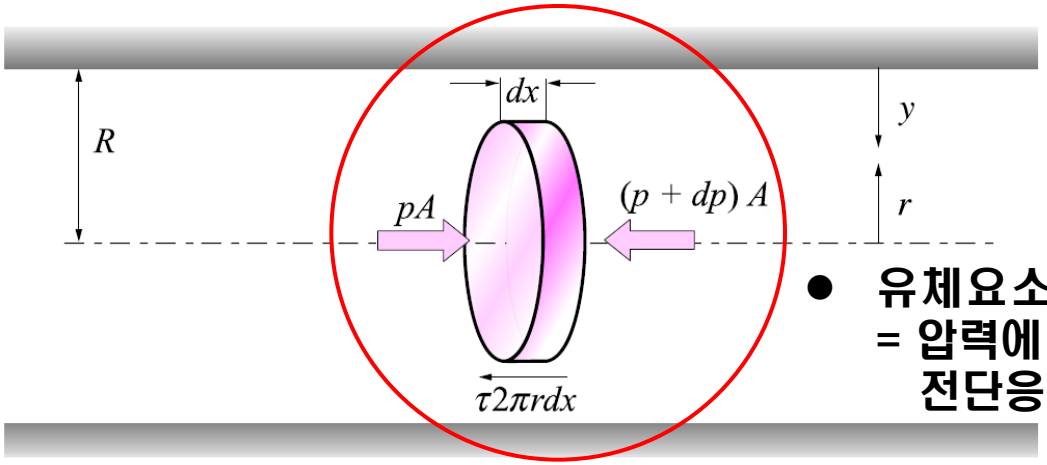
$$= \left(\frac{350 \times 10^3 \text{ N/m}^3}{9800 \text{ N/m}^2} + 0\right) - \left(\frac{250 \times 10^3 \text{ N/m}^3}{9800 \text{ N/m}^2} + 5 \text{ m}\right)$$

$$= 5.2 \text{ m}$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

3.1 유속분포-완전히 발달된 층류 흐름의 유속분포와 층류의 마찰계수를 구함.

- 미소 유체요소를 생각하고 운동량방정식을 적용하면



- 유체요소에 작용하는 힘
  = 압력에 의한 힘,
  전단응력에 의한 힘

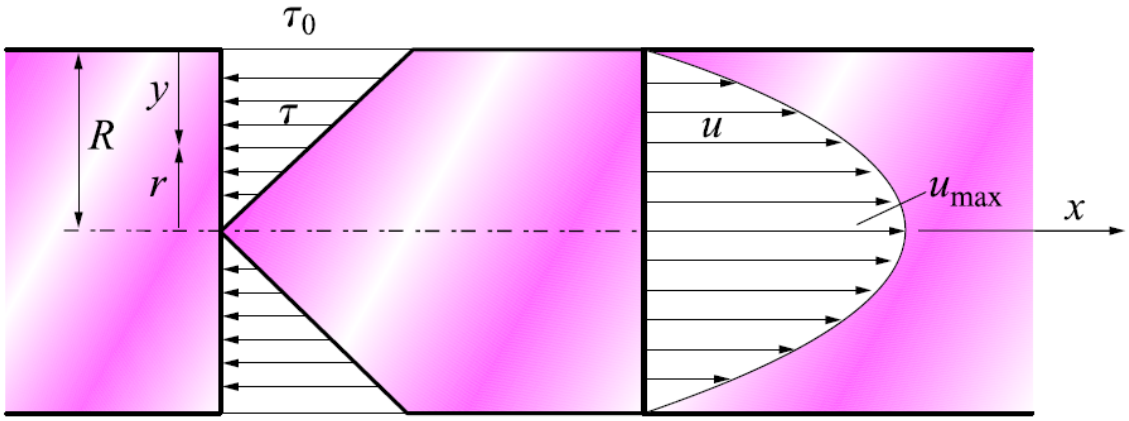
$$\sum F_x = 0$$ ⇨ (x방향으로 속도의 변화가 없음)

- 힘의 평형을 생각하면,

$$pA - \tau 2\pi r dx - (p + dp)A = 0$$

$$A = \pi r^2$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수



$$\tau = -\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}$$ ⇨

- 전단응력을 x방향의 압력경사로 dp/dx로 나타낸 것

- 점성법칙을 도입하면

$$\tau = \mu\left(\frac{du}{dy}\right) \qquad \left.\begin{aligned} y &= R - r \\ dy &= -dr \end{aligned}\right\} \qquad \tau = -\mu\frac{du}{dr}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}r$$

압력경사는 r과 무관 ⇨

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + C$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}r^2 + C$$

r = R 에서 u = 0 이므로

$$\Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2$$

- 관수로 내 층류에 대해 다음과 같은 유속 분포를 얻는다.

$$u = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

- x축으로 흐름이 진행해 감에 따라 압력이 강하하므로

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{l} - \frac{\Delta p}{l}$$

$$= -\frac{\gamma h_L}{l}$$

$$u = -\frac{\gamma h_L}{4\mu l}R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

(Hagen-Poiseuille 흐름)

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

- **최대유속을 구하면**

$$u = -\frac{\gamma h_L}{4\mu l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad \begin{matrix} r = 0 \\ u = u_{\max} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$u_{\max} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$u_{\max} = \frac{\gamma h_L}{4\mu l} R^2$$

- **속도분포를 최대유속을 이용해 표시하면,**

$$u = u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

- **층류흐름에서 유량을 구하면,**

$$Q = \int_A u dA = \int_0^R u_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr$$

$$= \frac{1}{2} u_{\max} \pi R^2$$

$$= \frac{\pi \gamma h_L R^2}{8\mu l}$$

⇒

- **층류흐름에서 평균유속을 구하면,**

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{2} u_{\max}$$

- **평균유속은 최대유속의 1/2**

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

3.2 마찰손실계수 – 완전히 발달된 층류 흐름

$$V = \frac{\gamma h_L}{8\mu l} R^2$$

- R=d/2를 대입하고, 손실수두로 정리하면

$$h_L = \frac{64\mu}{\rho V d} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$$

(층류에 있어서 마찰손실수두는 평균유속에 비례)

$$h_L = f \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}$$

(Darcy-Weisbach 식)

- Darcy-Weisbach 식과 비교하면

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

(층류에서 마찰계수는 레이놀즈 수에만 관계됨)

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

예제) 지름 5cm인 수평관에 $Q = 0.8 \times 10^{-4} \mathrm{m}^3/\mathrm{sec}$ 물이 흐리고 있다. 물의 동점성계수는 $\nu = 1.0 \times 10^{-6} m^2/\sec$ 일 때 다음 사항에 대해 답하여라.

(a) 100떨어진 두 단면간의 손실수두
(b) 관벽에서 2cm 떨어진 곳에서의 유속과 최대유속
(c) 관벽에서의 마찰응력

- 평균유속

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.8 \times 10^{-4}}{\frac{\pi}{4} \times 0.05^2} = 0.041 \text{ m/sec}$$

- 레이놀즈 수

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.041 \times 0.05}{1.0 \times 10^{-6}} = 2050 < 2100$$

- 이 흐름은 층류이다.

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

(a) 손실수두의 산정

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = 0.031$$

$$h_L = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g} = 0.031 \times \frac{100}{0.05} \times \frac{0.041^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 0.0053 \text{ m} = 0.53 \text{ cm}$$

(b) 유속과 최대유속

- **관벽에서 2cm 떨어진 곳에서의 유속**

$$u = \frac{\gamma h_L}{4\mu l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$= \frac{\gamma h_L}{4\rho \nu l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$= \frac{9.8 \times 0.0053}{4 \times 1.0 \times 10^{-6} \times 100} \times 0.025^2 \left(1 - \frac{0.005^2}{0.025^2}\right)$$

$$= 0.078 \text{ m/sec}$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

- **최대유속**

$$u = \frac{gh_L}{4\nu l} R^2$$

$$= \frac{9.8 \times 0.0053}{4 \times 1.0 \times 10^{-6} \times 100} \times 0.025^2 == 0.081 \text{ m/sec}$$

(c) 관벽에서의 마찰응력

$$\tau_0 = \frac{\gamma h_L}{2l} R = 0.00066 \text{ kg중/m}^2$$

$$= 0.0065 \text{ N/m}^2$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

예제) 지름이 5cm인 수평관에 비중이 0.8이고, 점성계수가 $\mu = 0.008 kg중 \cdot \sec/m^2$ 인 기름이 $Q = 0.002 m^3/\sec$ 의 유량으로 흐르고 있다. 예제 9.5와 같은 사항들을 구하라.

(a) 100떨어진 두 단면간의 손실수두
(b) 관벽에서 2cm 떨어진 곳에서의 유속과 최대유속
(c) 관벽에서의 마찰응력

- **평균유속**

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{\frac{\pi}{4} \times 0.05^2} = 1.02 \text{ m/sec}$$

- **레이놀즈 수**

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{\frac{\gamma}{g} V d}{\mu}$$

(이 흐름은 층류임)

$$= \frac{\frac{0.8 \times 1000}{9.8} \times 1.02 \times 0.05}{0.008} = 520$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

(a) 100m 떨어진 두 단면간의 손실수두

$$h_L = f\frac{l}{d}\frac{V^2}{2g}$$

$$= \frac{64}{Re}\times\frac{100}{0.05}\times\frac{1.02^2}{2\times 9.8}$$

$$= 13.07 \text{ m}$$

(b) 유속과 최대유속

- 관벽에서 2cm 떨어진 곳에서의 유속

$$u = \frac{\gamma h_L}{4\mu l}R^2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$= \frac{0.8\times 1000\times 13.07}{4\times 0.008\times 100}\times 0.025^2\left(1-\frac{0.005^2}{0.025^2}\right)$$

$$= 1.96 \text{ m}$$

3 관수로 내 층류의 유속분포 및 마찰손실계수

- **최대유속**

$$u_{\max} = \frac{\gamma h_L}{4\mu l} R^2$$

$$= \frac{0.8 \times 1000 \times 13.07}{4 \times 0.008 \times 100} \times 0.025^2 = 2.042 \text{ m/sec}$$

(c) 관벽에서의 마찰응력

$$\tau_0 = \frac{\gamma h_L}{2l} R = \frac{0.8 \times 1000 \times 13.07}{2 \times 100} \times 0.025$$

$$= 1.307 \text{ kg 중/m}^2$$

$$= 12.81 \text{ N/m}^2$$