



선형독립과 선형변환

Linear Independence and
Linear Transformation

Keon M. Lee



- ❖ 선형 독립
- ❖ 행렬 변환
- ❖ 선형 변환
- ❖ 기하학적 형태의 선형변환
- ❖ 벡터 크기와 내적
- ❖ 벡터의 직교정사영
- ❖ 직교 벡터



선형 독립 (linear independence)

❖ 선형독립

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 가 벡터공간 V 에 속하는 벡터들이 일 때
어떤 벡터도 다른 벡터들의 **선형결합(linear combination)**으로 **표현될 수 없으면**, 이들이 **선형독립(linearly independent)**이라고 함
- $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ 가 자명해 $(0, 0, \dots, 0)$ 만을 가지면 선형독립
- 선형독립이 아니면 **선형의존(linearly dependent)**임

$$\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \dots + x_p\mathbf{v}_p$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linearly independent?

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

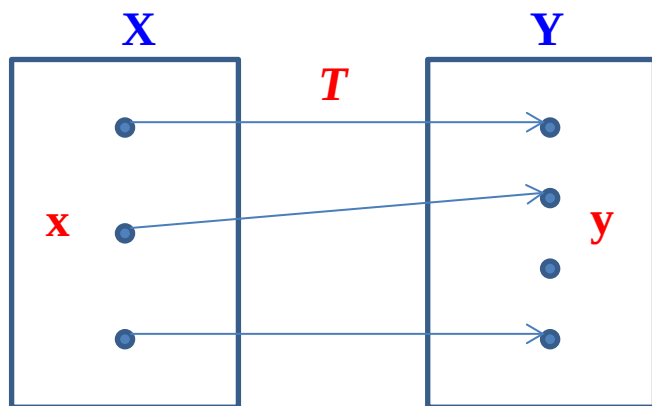
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



선형변환 (linear transformation)

❖ 함수 (function)

- 어떤 집합의 각 원소를 다른 집합의 한 개의 원소로 사상(mapping)하는 것



$T: X \rightarrow Y$
function

domain
(정의구역)

codomain
(공역)
range
(치역)

image
(상)

$$y = T(x)$$

$$x \mapsto T(x)$$

$$x \rightarrow \boxed{T} \rightarrow T(x)$$



행렬 변환 (matrix transformation)

- ❖ A 가 $m \times n$ 행렬일 때, R^n 에 속하는 각 벡터 $\mathbf{x}$ 에 대해서
 $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 이면, $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 는 R^m 의 벡터

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$$
$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

- 행렬과 벡터의 곱셈은 벡터를 변환하는 함수역할

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{의 상(image)는?} \quad \mathbf{T}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \text{인 } \mathbf{x} \text{는?} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$



행렬변환

$$\diamond T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \text{인 } \mathbf{x} \text{는?}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1.5$$

$$x_2 = -0.5$$



선형 변환(linear transformation)

- ❖ 선형변환(linear transformation)은 다음 조건을 만족하는 변환이나 함수

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$

- ❖ $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 이 선형변환이면, 모든 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 에 대해서

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

를 만족하는 행렬 $\mathbf{A}$ 은 유일하게(unique) 존재한다.

$$\mathbf{A} = [T(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ T(\mathbf{e}_n)]$$

$\mathbf{e}_i$: the i -th column vector of identity matrix I_n

$$\mathbf{x} = \mathbf{I}_n \mathbf{x} = [\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n] \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$$

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n T(\mathbf{e}_n)$$

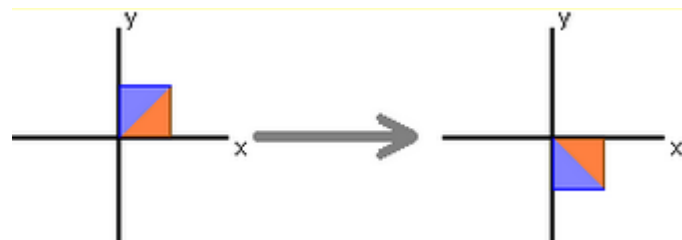
$$= [T(\mathbf{e}_1) \ \cdots \ T(\mathbf{e}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

기하학적 형태의 선형 변환

❖ 반사(Reflection, 대칭 변환)

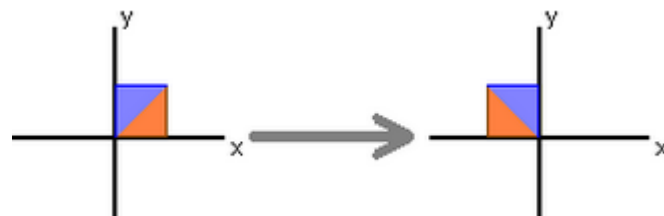
- x-axis(축) 반사

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



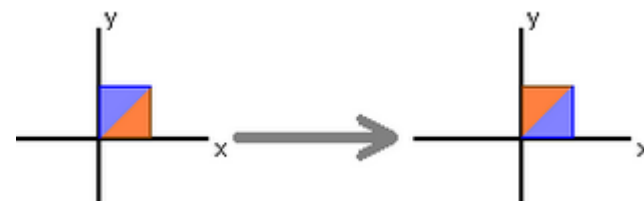
- y-axis 반사

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



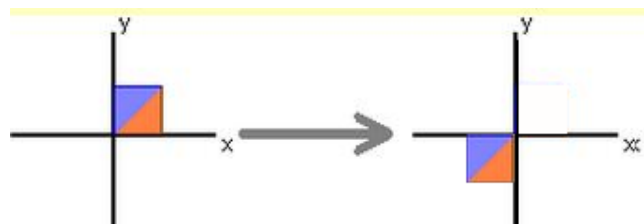
- y=x 축 반사

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- 원점(origin) 반사

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

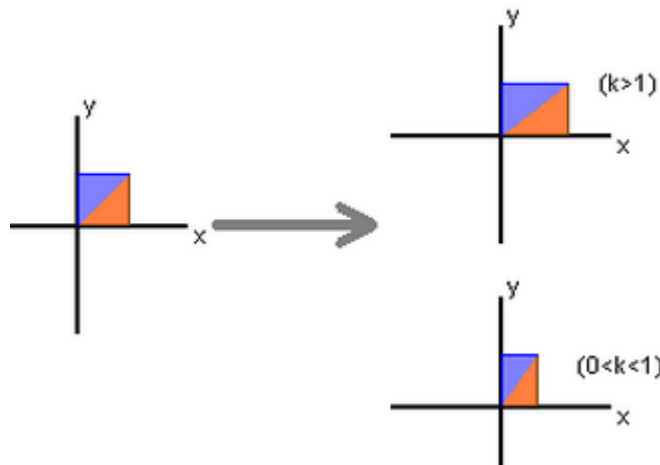


기하학적 형태의 선형 변환

❖ 수축(contraction)과 팽창(dilation)

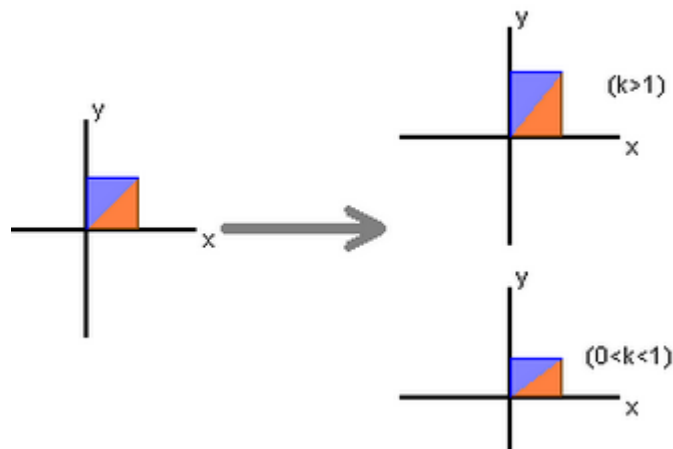
- x축 방향

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- y축 방향

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



기하학적 형태의 선형 변환

❖ 밀림 (shear)

- x축 방향

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- y축 방향

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



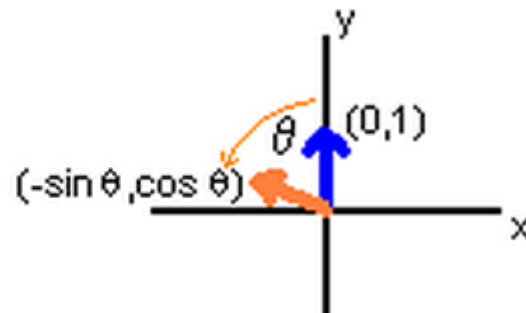
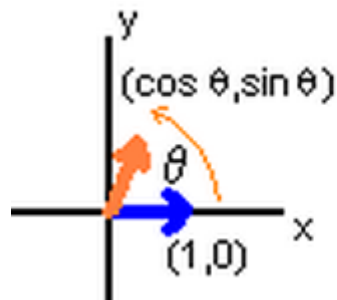
기하학적 형태의 선형 변환

❖ 회전(rotation)

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



▪ 유도과정



$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

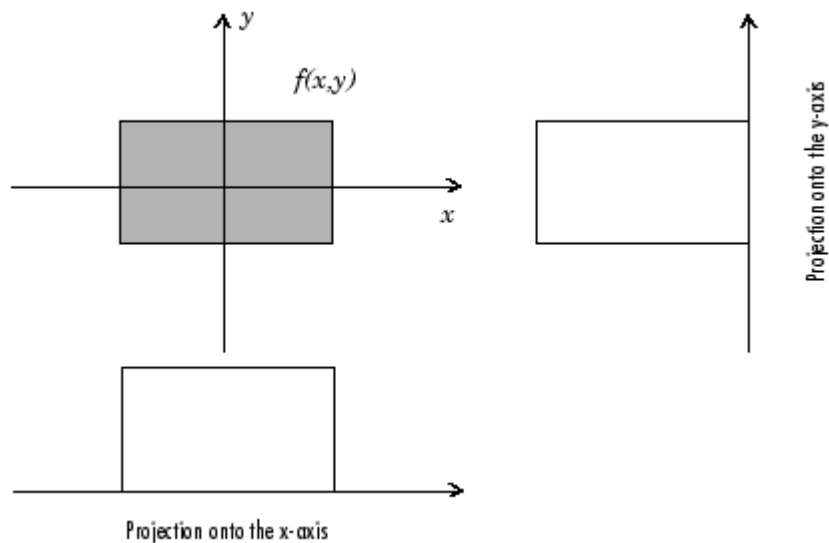
$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= T\left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = xT\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yT\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

기하학적 형태의 선형 변환

❖ 사상 (projection)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

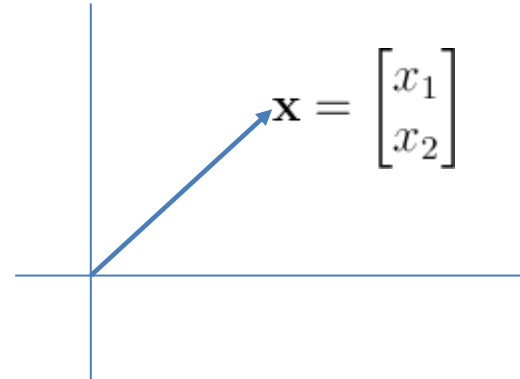
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



벡터 크기와 내적

- ❖ 벡터 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ 의 크기 (norm, 노름, 노름)

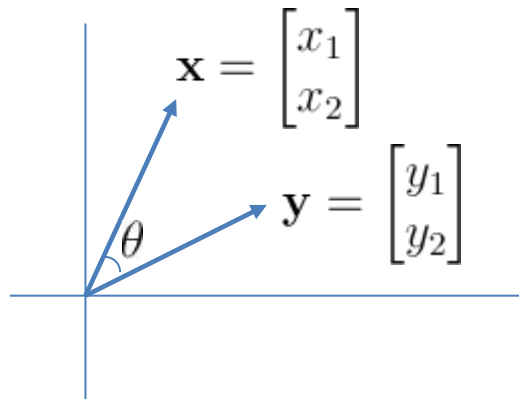
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



- ❖ 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ 의 내적(dot product, inner product)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$



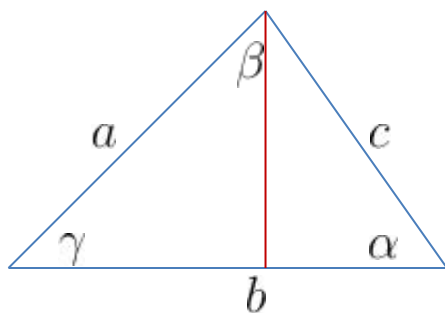
$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\|k\mathbf{x}\| = \left\| \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(kx_1)^2 + (kx_2)^2}$$

$$= \sqrt{k^2(x_1^2 + x_2^2)} = k\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = k\|\mathbf{x}\|$$

벡터 내적

❖ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$ 인 이유



$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha \quad (1)$$

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta \quad (2)$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad (3)$$

cos 제1법칙

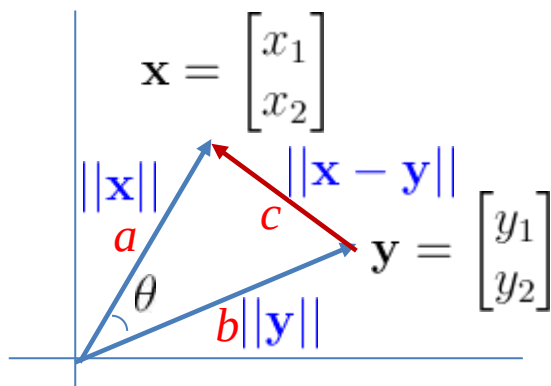
$$\begin{aligned} a(2) + b(1) - c(3) &= a^2 + b^2 - c^2 \\ &= ab \cos \gamma + ac \cos \beta + ab \cos \gamma + bc \cos \alpha - ac \cos \beta - bc \cos \alpha \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{cos 제2법칙}$$

벡터 내적

❖ $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 = ||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$ 인 이유



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - 2||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

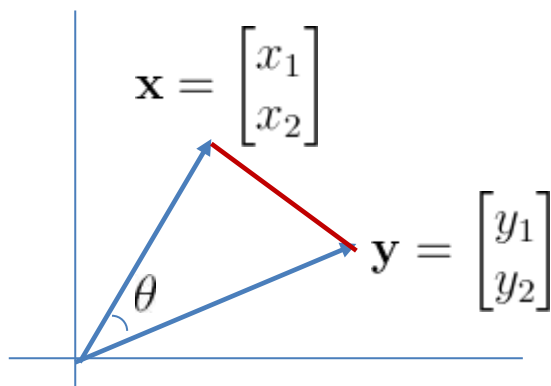
$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 = ||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{x}|| ||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

벡터 내적

❖ 벡터간의 각도



$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

❖ 직교(orthogonal) 벡터

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

❖ 수평(parallel) 벡터

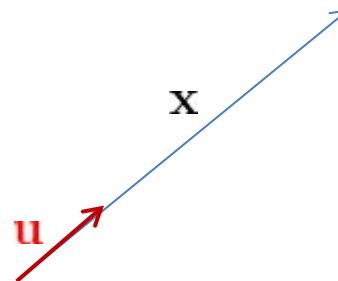
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \pm \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow \mathbf{x} // \mathbf{y}$$

벡터 방향의 성분

❖ 단위 벡터(unit vector)

- 크기가 1인 벡터
- 특정 벡터 $\mathbf{x}$ 에 대한 단위벡터 $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$



❖ 직교 정사영 (orthogonal projection)

- 벡터 $\mathbf{x}$ 의 벡터 $\mathbf{L}$ 로의 직교 정사영

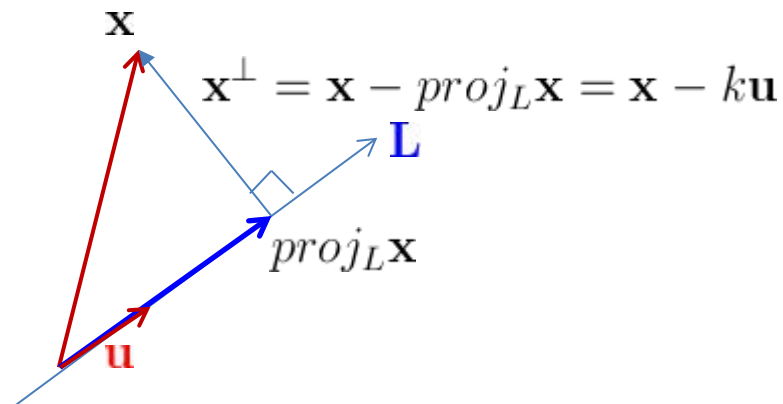
$$proj_L \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{x} - k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - k\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

$$Proj_L \mathbf{x} = k\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u}$$



Summary

- ❖ 어떤 벡터도 다른 벡터들의 선형결합으로 표현될 수 없으면, 이들이 선형독립이라고 한다.
- ❖ 선형변환은 정의구역에서의 합에 대한 변환결과와 각각의 변환결과에 대한 합과 같고, 정의구역에서의 스칼라곱이 치역에서 스칼라곱과 같은 성질을 만족하는 변환이다.
- ❖ 선형변환은 유일한 행렬변환으로 표현된다.
- ❖ 기하학적 형태에 대한 반사, 수축 및 팽창, 밀림, 회전, 사상 등의 연산은 선형변환으로 표현된다.
- ❖ 벡터의 크기는 norm으로 나타낸다.
- ❖ 두 벡터의 내적은 대응 원소간의 곱들의 합이면서, 두 벡터의 크기와 사잇각의 $\cos$ 값의 곱이다.
- ❖ 두 벡터간의 사잇각은 내적에 의해 계산될 수 있다.
- ❖ 어떤 벡터를 다른 벡터로 직교정사영 시킨 결과는 벡터의 내적으로 구할 수 있다.
- ❖ 직교하는 두 벡터의 내적은 0이다.