(1) 합의 법칙(law of addition)

$$p \Longrightarrow p \vee q.$$

(2) 단순화법칙(law of simplification)

$$p \wedge q \Longrightarrow p, \quad p \wedge q \Longrightarrow q.$$

(3) 추이법칙(transitive law)

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Longrightarrow p \to r.$$

(4) 선언지제거법(disjunctive syllogism)

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Longrightarrow q,$$

$$(p \vee q) \wedge \sim q \Longrightarrow p.$$

(5) 삼단긍정법(modus ponens)

$$(p \to q) \wedge p \Longrightarrow q.$$

(6) 삼단부정법(modus tollens)

$$(p \to q) \wedge \sim q \Longrightarrow \sim p.$$

증명. 대응하는 조건문 명제가 항진명제임을 보이면 된다. 즉, (4)의 경우 명제 $(p \vee q) \wedge \sim p \to q$가 항진명제임을 보이면 된다.

p	q	$(p \vee q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q
T	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**
1	1	2	3	2	4	1

위 진리표에서 $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$가 항진명제이므로 $(p \vee q) \wedge \sim p \Longrightarrow q$이다. □

〚 예 〛 **1.33** 위 논리 법칙은 많은 분야에서 응용되고 있는데 특히 자동차 진단 시스템 및 의료진단 전문가 시스템에서 몇 가지만 예를 들어보자.

5) $p \rightarrow q$: 이 자동차가 시동이 잘 걸리면 배터리가 양호하다.

p : 이 자동차는 시동이 잘 걸린다.

위 두 가지 사실은

q : 이 자동차는 배터리가 양호하다

라는 사실을 함의한다.(즉 이와 같은 결론을 이끌어 낼 수 있다.)

6) $p \to q$: 이 자동차가 시동이 잘 걸리면 배터리가 양호하다.

$\sim q$: 이 자동차는 배터리가 불량이다.

따라서

$\sim p$: 이 자동차는 시동이 잘 걸리지 않는다.

6) $p \to q$: 이 환자가 위암 환자라면 급격한 체중변화가 나타난다.

$\sim q$: 이 환자는 급격한 체중변화가 없다.

따라서

$\sim p$: 이 환자는 위암은 아니다.

나머지 경우에 대해서는 각자 예를 들어보자.

정 리 **1.34** 임의의 명제에 대해 아래 사실이 성립한다.

(1) 이중부정(double negation)

$$\sim(\sim p) \equiv p.$$

(2) 멱등법칙(idempotent law)

$$p \wedge p \equiv p, \qquad p \vee p \equiv p.$$

(3) 대우법칙(contrapositive law)

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p.$$

(4) 배리법(reductio ad absurdum)

$$p \to q \equiv (p \wedge \sim q \to c).$$

(5) **교환법칙(commutative law)**

$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p.$$

(6) **결합법칙(associative law)**

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

(7) **분배법칙(distributive law)**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

(8) **드모르간 법칙(De Morgan's Law)**

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q,$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q.$$

증명. 대응하는 쌍조건문 명제가 항진명제임을 보이면 된다.

(3) 명제 $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$가 항진명제임을 보이면 된다.

p	q	$(p \to q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\to$	$\sim p)$
T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T
1	1	2	4	2	3	2

위 진리표에서 $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$가 항진명제이므로

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$이다.

(8) 명제 $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$가 항진명제임을 보이면 된다.

p	q	$\sim$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
1	**1**	**3**	**2**	**4**	**2**	**3**	**2**

위 진리표에서 $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$가 항진명제이므로

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$이다. $\square$

⟦ 예 ⟧ **1.35** 위 정리가 의미하는 예를 들어보자.

3) $p \to q$: 시동이 잘 걸리면 배터리가 양호하다.

$\sim q \to \sim p$: 배터리가 불량이면 시동이 잘 걸리지 않는다.

위 두 명제는 동치이다.

4) $p \to q$: 시동이 잘 걸리면 배터리가 양호하다.

$p \wedge \sim q \to c$: 시동이 잘 걸리고 배터리가 양호하지 않다는 것은 모순이다(말이 안 된다).

위 두 명제는 동치이다.

나머지 경우에 대해서는 각자 예를 들어보자.

$\boxed{\text{참 고}}$ **1.36** 위 정리의 대우법칙과 배리법은 증명에서 많이 사용하는 추론 방법이다. 조건문 형태의 명제 $p \to q$를 직접 증명하기 어려울 경우 대우명제 $\sim q \to \sim p$를 증명하거나, $p \wedge \sim q$를 가정하면 모순이 생긴다는 것($p \wedge \sim$

$q \to c)$을 보이면 된다.

정 리 1.37 명제 t를 항진명제, c를 모순명제, p를 임의의 명제라 할 때 아래 사실이 성립한다.

(1) $p \wedge t \iff p, \quad p \vee t \iff t.$

(2) $p \vee c \iff p, \quad p \wedge c \iff c.$

(3) $c \Longrightarrow p, \quad p \Longrightarrow t.$

증명. (1) 아래 진리표에서 $p \wedge t \leftrightarrow p$가 항진명제이므로 $p \wedge t \iff p$가 된다.

p	t	$(p$	$\wedge$	$t)$	$\leftrightarrow$	p
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**
1	**1**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**

또한 $p \vee t \iff t$도 마찬가지로 보일 수 있다.

(2) 생략

(3) 아래 진리표에서 $c \to p$가 항진명제이므로 $c \Longrightarrow p$이다.

p	c	c	$\to$	p
T	**F**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**F**

또한 아래 진리표에서 $p \to t$가 항진명제이므로 $p \Longrightarrow t$이다.

p	t	p	$\to$	t
T	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**T**

$\square$