프로그래머 수학

7주차 강의

증명법

1. 수학적 귀납법

❖ **귀납법 :** 관찰과 실험에 기반한 가설을 귀납 추론을 통하여 일반적인 규칙을 입증

❖ **수학적 귀납법** (Mathematical Induction) : 기초 단계와 귀납 단계가 성립함을 보임으로써 모든 자연수 n에 대해 P(n)이 참임을 보이는 증명 방법

i) **basis step (기초단계)** : n이 1(혹은 0)인 경우에 명제 P_1 (혹은 P_0) 이 성립함을 보임

ii) **inductive hypothetic (귀납가정)** : 양의 정수 n에 대해 P_n이 성립한다고 가정함

iii) **inductive step (귀납단계)** : 귀납가정에 입각하여 n+1의 경우에도 즉, P_{n+1}의 경우에도 성립함을 보임

수학적 귀납법의 예

❖ 예제 : $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$임을 수학적 귀납법으로 증명하라.

<증명>

명제 P(n) : 1부터 n개의 홀수의 합이 n^2

1) 기초 단계 : $P(1)$: $1=1^2$,참

2) 귀납 가정 : $P(n)$: $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$, 참임을 가정

3) 귀납 단계 :

$$
\begin{aligned}
P(n+1) &= [1+3+\cdots+(2n-1)]+(2n+1) \\
&= n^2+(2n+1) \\
&=(n+1)^2
\end{aligned}
$$

∴수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대해 P(n) : 참

수학적 귀납법의 예

❖ 예제 : $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ 임을 증명하라.

<증명> (n에 대한 수학적 귀납법을 이용)

1) 기초단계: n=1 인 경우, $S_1 = 1$ ➔ 성립함

2) 귀납가정: $S_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ 이라고 가정하면

3) 귀납단계: 좌변 = $S_{n+1} = S_n + n + 1$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

= 오른쪽 (n 대신 n + 1을 대입한 값)

∴ 위의 식이 성립한다. □

수학적 귀납법의 예

❖ 예제 : 수학적 귀납법을 이용하여 다음 식이 성립함을 보여라. $n! \geq 2^{n-1}$(단, n=1, 2, 3, ⋯)

<증명>

먼저 n=1일때

$1! = 1 \geq 2^{1-1} = 1$

이 되어 식이 성립한다.

이제 n=k에 대해 식이 성립한다고 가정하고 n=k+1일때

$(k+1)! \geq 2^k$가 성립함을 보이자.

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)(k!) \\
&\geq (k+1)\cdot 2^{k-1} \quad (\because \text{귀납법 가정에 의해 } k! \geq 2^{k-1} \text{성립}) \\
&\geq 2\cdot 2^{k-1} \qquad (\because k \geq 1) \\
&\geq 2^k
\end{aligned}
$$

∴그러므로 n=1, 2, 3, ⋯일 때 $n! \geq 2^{n-1}$이 성립한다.

수학적 귀납법의 예

❖ 예제 : 수학적 귀납법을 이용하여 $n \geq 3$인 정수일 때 $n^2>2n+1$이 성립함을 보여라.

<증명>

$n\geq3$ 이므로 먼저 $n=3$을 대입하면 $3^2>2\cdot3+1=7$이 되어 식이 성립한다.

이제 $n=k$일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$(k+1)^2 = k^2+2k+1$

$> (2k+1)+2k+1$ (∵귀납법 가정에 의해 $n=k$일때 성립)

$> 2(k+1)+2$ (∵$k\geq3$)

$> 2(k+1)+1$

∴$n=k+1$일때 $(k+1)^2 > 2(k+1)+1$이 성립하므로 수학적 귀납법에 의해 $k\geq3$인 정수에 대해 $n^2>2n+1$이 성립함을 알 수 있다.

2. 직접 증명법

❖ **직접 증명법(Method of Direct Proof) :**

명제의 함축 $p \rightarrow q$ 가 참이 됨을 증명하는 방법

◆ 명제 p 를 참이라고 가정하고, 여러 가지 정리와 식을 이용하여 명제 q 또한 참이 됨을 증명

직접 증명법의 예

❖ 예제 : 짝수인 정수 n이 있을 때 n^2도 짝수인 정수임을 직접 증명법을 이용하여 증명하여라.

<증명>

'p:n이 짝수'라고 하고 'q:n^2이 짝수'라고 가정하자.

명제 p가 참이므로 n은 짝수, 즉 $n=2k(k\in Z)$다. 따라서

$$n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2) \text{ 가 된다.}$$

∴ 그러므로 n^2은 짝수다.

직접 증명법의 예

❖ 예제 : 두 유리수의 합이 유리수임을 직접 증명법으로 증명하여라.

<증명>

문제에서 주어진 두 유리수를 x와 y라고 하자.
유리수의 정의에 의해

$$x = \frac{p}{q}, y = \frac{s}{t} \, (p, q, s, t \in Z, q \neq 0, t \neq 0)$$

로 타나낼 수 있다.
이때 x와 y의 합은

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{pt + sq}{qt}$$

이다. 여기서 q와 t가 0이 아니므로 $qt \neq 0$이고 $pt+sq$, $qt \in Z$다.

∴ 유리수의 정의에 의해 x+y는 유리수다.

직접 증명법의 예

❖ 예제 : $n \geq 5$일 때 $2^n > n^2$이다.

<증 명> ($n \geq 5$에 대한 수학적 귀납법을 이용)

1) 기초단계: $n = 5$인 경우 $2^5 > 5^2$이므로 $2^n > n^2$ 이 성립함

2) 귀납가정: $n \geq 5$일 때 $2^n > n^2$ 이라고 가정하면

$2^{n+1} > (n+1)^2$ 임을 보이면 된다.

3) 귀납단계: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2$

$= n^2 + n^2 > n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n$

$> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

따라서 $n + 1$인 경우에도 위의 식이 성립한다. □

3. 간접 증명법

❖ **간접 증명법(Method of Indirect Proof) :**

증명하고자 하는 명제를 논리에 어긋나지 않는 범위에서 증명하기 쉬운 명제로 변환하여 증명하는 방법

◆ 유형

- 대우증명법
- 모순증명법
- 반례증명법

3-1. 대우 증명법

❖ 대우 증명법 (proof by contraposition) :

- 명제의 함축 $p \to q$ 이 참이면 그 대우인 $\sim q \to \sim p$ 도 참이고 두 명제가 서로 동치인 것을 이용
- 주어진 명제의 대우명제가 참임을 증명함으로써 증명하고자 하는 명제도 참임을 증명하는 방법

대우 증명법의 예

❖ 예제 : n^2이 짝수면 n이 짝수임을 대우증명법을 이용하여 증명하여라.

<증명>

문제의 명제를 두 개의 명제로 나눠쓰면 다음과 같다.

p: n^2은 짝수　　　q: n은 짝수

명제의 함축 p→q의 대우명제를 구하기 위해 ~p, ~q를 구하면 다음과 같다.

~q : n은 홀수　~p: n^2은 홀수

이제 ~q→ ~p가 참임을 보이자.

n이 홀수라면 n=2k+1(k는 정수) 이므로

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (2k+1)^2 \\
&= (4k^2+4k+1) \\
&= 2(2k^2+2k)+1
\end{aligned}
$$

이 되어 n^2도 홀수다.

∴ ~q→ ~p이 참이 되어 주어진 명제 'n^2이 짝수면 n이 짝수'도 참임을 알 수 있다.

대우 증명법의 예

❖ 예제 : 실수 x에 대하여 $|x|>1$이면 $x>1$ 또는 $x<-1$임을 대우 증명법을 이용하여 증명하여라.

<증명>

주어진 문제의 명제를 다음과 같이 명제 p, q로 나누자.

$p: |x|>1$　　　$q: x>1$ 또는 $x<-1$

대우증명법을 이용하기 위해 ~p, ~q를 구하면 다음과 같다.

$\sim p : |x| \le 1$　　　$\sim q: -1 \le x \le 1$

이제 $\sim q \rightarrow \sim p$가 참임을 보이자.

문제의 식은 $0 \le x \le 1$일 때

$|x| = x \le 1$

이 되어 성립한다.

또한 $-1 \le x \le 0$일 때

$|x| = -x \le 1$

이 되어 역시 성립한다.

3-2. 모순 증명법

❖ 모순 증명법 (proof by contradiction) :

◆ 기존의 전통적인 방법으로는 쉽게 증명할 수 없는 경우에 매우 유용

◆ 기본적인 아이디어 : 주어진 문제의 명제를 일단 부정한 후 논리를 전개하여 그것이 모순됨을 보임으로써 본래의 명제가 사실임을 증명하는 방법이다.

예) $p \rightarrow q$가 참인 것과 $p \wedge (\sim q)$가 거짓임은 동치이다.
따라서, '$p \wedge (\sim q)$이 거짓'임을 부정한 후, 모순이 유도되면 원래의 명제가 참임을 증명하게 된다.

모순 증명법의 예

❖ 예제 : 다음 명제를 증명하여라.
n이 정수일 때 n+m=0이 되는 정수 m은 유일하게 하나 존재한다.

<증명>

모순증명법을 이용하여 증명하면 다음과 같다.
먼저 주어진 명제의 결과가 참이 아니라고 가정한다. 즉, n+m=0을 만족하면서 m과는 다른 정수가 존재한다고 가정하고
이 정수를 k라고 하면

$$n+k = 0$$

$$n+m = n+k$$

이때 양변에서 정수 n을 빼주면

$$m=k$$

가 된다.
그런데 가정에서 $m \neq k$이므로 $m=k$인 것은 가정에 모순된다.
따라서 정수 n에 대해 n+m=0을 만족하는 정수 m은 유일하다.

모순 증명법의 예

❖ 예제 : √2는 유리수가 아님을 증명하여라.

<증명>

모순증명법을 사용하기 위해 √2가 유리수라고 가정하면
√2는 유리수의 정의에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \left(n, m \in Z,\ m \neq 0 \right)$$

이때 √2가 유리수라면 공통인수를 갖지 않는 정수로 나타낼 수 있으므로 n과 m은 공통인수를 갖지 않는 수다.
주어진 식을 제곱하여 정리하면

$$2m^2=n^2$$

이다. $2m^2$이 짝수므로 n^2도 짝수다. N^2이 짝수면 [예제16]에 의해 n도 짝수다.
따라서 $n=2k(k \in N)$가 된다. 이를 다시 식에 대입하면

$$2m^2=(2k)^2=4k^2 \text{ 이 되고 } m^2=2k^2 \text{ 이 된다.}$$

즉 m^2은 짝수고 m도 짝수다. 그런데 n과 m이 모두 짝수면 2로 나누어지므로 √2가 유리수라는 가정에서 n,m이 공통인수를 갖지 않는다는 사실에 모순된다. 그러므로 √2는 유리수가 아니다.

모순 증명법의 예

❖ 예제 : 양수이면서 동시에 음수인 정수는 존재하지 않는다.

<증 명> (모순 증명법을 이용)

짝수와 홀수인 정수 n이 존재한다고 가정.

$n = 2a$ (a는 정수) … 짝수 정의에 의해

$n = 2b + 1$ (b는 정수) … 홀수 정의에 의해

$2a = 2b + 1$ 이므로 $2(a - b) = 1$ 이다.

$(a - b) = 1/2$ 이 된다.

그런데, a, b가 정수이므로, $a-b$의 차도 정수여야 함.

$(a - b) = 1/2$ 는 정수가 아님. (모순)

3-3. 반례에 의한 증명법

- 반례에 의한 증명법 (proof by counter-example)
  - 주어진 명제에 모순되는 간단한 예를 하나 보임으로써 명제를 증명하는 방법
  - 다른 증명 방법으로 증명하기 어려운 예제들을 증명할 때 유용

반례에 의한 증명법의 예

❖ 예제 : p가 양의 정수이고 $x = p^2+1$이면 x는 소수이다.

<증명>

위 명제가 거짓임을 입증하기 위해 p에 대해 x가 솟수가 아닌 예를 하나 밝히면 된다.

p = 3일 경우 x는 솟수가 아니다.

따라서 위의 명제는 거짓이다.

증명할때 저지르기 쉬운 실수들..

① 예제로부터 논증함

예) 특정한 어떤 경우를 보이면서 일반적인 것이 성립한다고 논증함

② 다른 두 개를 나타내기 위해 동일 문자를 사용함

예) m,n을 짝수라고 가정하자. 그러면, $m = 2k$, $n = 2k$이다.

③ 결론으로 건너뜀

예) $m= 2k$, $n= 2l \rightarrow m+n= 2l+2k \therefore m+n$는 짝수이다.

④ 교묘히 논점을 피해감; 증명되어야 할 사실을 그냥 참이라고 가정하고 넘어가는 경우

예) 두 홀수의 곱은 홀수임을 증명할 때, $m=2a+1$, $n=2b+1$두고,

$mn= (2a+1)(2b+1)= 2k+1 \therefore$ 홀수

⑤ 왜냐하면(because) 단어를 만약(if)으로 잘못 사용함

참고문헌

❖ 본 강의 자료에서 예제 등의 출처는 다음과 같은 참고 문헌이다.

1) PLD: Programming Logic and Design using Flowchart, 주형석 저(IT미디어)

2) 이산수학: 논리,명제에서 알고리즘까지, 홍영진 저(한빛미디어)

3) 이산수학 및 응용, 임은기 번역(한티미디어)

4) 전산수학, 김대수 (생능)