확률변수와 랜덤 프로세스

CONTENTS

- 확률의 개념
- 확률변수
- 통계적 평균
- 주요 확률분포
- 랜덤 프로세스
- 랜덤 프로세스의 확률밀도 함수
- 대역통과 랜덤 프로세스
- 백색잡음

확률의 개념

Probability

- Random Experiment
  - 예 die tossing
- Outcome $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$
- Sample Space
  - set of all possible outcomes, $S = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$
- Event
  - subset of sample space $A = \{\xi_2, \xi_4, \xi_6\}$

Probability

- Union of two events

  표기: $A+B$ 또는 $A \cup B$

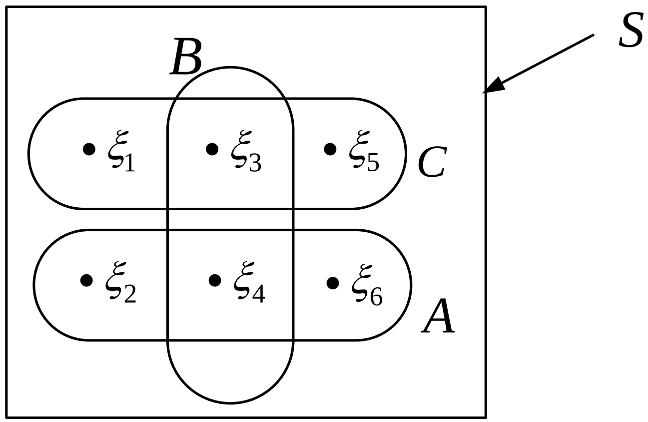
- Intersection of two events : 결합사건(joint event)

  표기: AB 또는 $A \cap B$

- 상호배반 (mutually exclusive) 사건
  - A와 B가 disjoint set

Probability

❑ Example: 주사위 던지는 시행에서의 샘플공간과 사건



- $A \cup B = \{\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6\}$
- $A \cap B = \{\xi_4\}$
- A와 C는 배반사건

Probability

❑ Relative Frequency and Probability

- N(A) : 불규칙 실험을 N 번 독립 시행하여 특정 사건 A 가 나온 횟수
- 사건 A 의 relative frequency

$$f(A) = \frac{N(A)}{N}$$

- 사건 A 의 확률

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}$$

- 성질

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(A) = 0 \quad \text{if} \quad A = \varnothing$$

$$P(A) = 1 \quad \text{if} \quad A = S$$

Probability

- Event 사이의 관계

  - 두 사건 A 또는 B 가 일어날 확률

    $$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

  - A 와 B 가 배반사건인 경우

    $$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

  - 여사건의 확률

    $$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Probability

- Conditional Probability

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

• 따라서

$$P(AB) = P(B)\,P(A|B)$$

- Bayes' rule

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

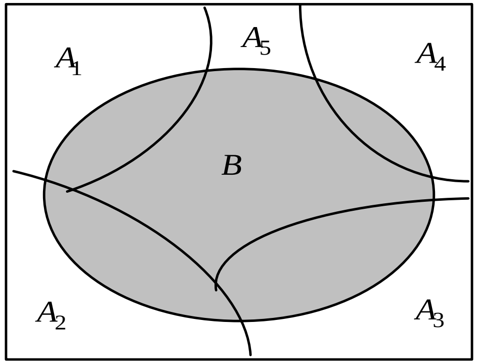
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

• 의미: 어떤 조건부 확률은 역 조건부 확률(reversed conditional probability)을 사용하여 표현할 수 있다.

Probability

❑ Total Probability

- 샘플 공간 S가 상호 배반인 $\{A_1, A_2, \cdots, A_N\}$ 의 사건의 합으로 표현할 수 있다고 가정하자. 즉



$$S = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \quad \text{with} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{for all} \quad i \neq j$$

- 그러면 어떤 사건 B는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$B = \bigcup_{n=1}^{N} (B \cap A_n)$$

- 사건 B의 확률은

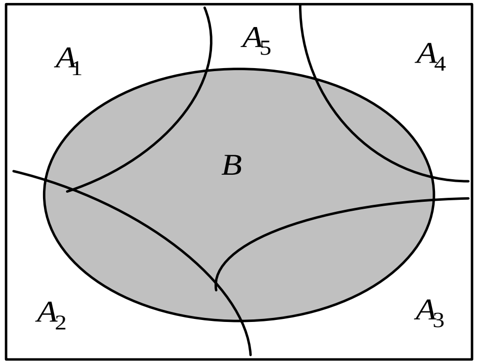
$$\boxed{P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B \cdot A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n) P(A_n)}$$

Probability

❑ Bayes' Rule

- Bayes 법칙을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{P(B)} = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{\sum_{n=1}^{n} P(B|A_n)P(A_n)}$$



- 이 식의 의미는 사건 B가 일어난 조건하에서 사건 A_m이 일어날 확률을 구하는데 있어 역 조건확률, 즉 사건 A_m 이 일어난 조건하의 사건 B 의 확률들을 사용하여 표현할 수 있다는 것이다.

Probability

❑ 독립사건

- 한 사건의 발생이 다른 사건의 발생 확률에 영향을 주지 않으면 두 사건은 서로 **독립(independent)**이라 한다.
- 즉 다음을 만족하면 사건 B는 A사건 에 독립이다.

$$P(B|A) = P(B)$$

- 사건 B가 사건 A에 독립이면 사건 A는 사건 B에 독립이다. 즉

$$P(A|B) = P(A)$$

- 따라서 사건 와 가 서로 독립이면 다음 식이 성립한다.

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

예제 6.1

- 두 개의 동전을 던지는 실험을 한다고 하자. 사건 A는 두 개의 동전 중 최소한 한 개가 앞면이 나오는 경우라 하고, 사건 B는 두 개가 모두 같은 면이 나오는 경우라고 하자.

  (a) 사건 A와 사건 B의 확률을 구하라.

  (b) $P(A|B)$와 $P(B|A)$를 구하라.

  (c) 두 사건은 서로 독립인가?

예제 6.1

❑ 풀이

- 동전을 던져서 앞면이 나오면 H, 뒷면이 나오면 T로 표기하도록 하자.

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ $\quad\quad$ $A = \{HH, HT, TH\}$, $B = \{HH, TT\}$

(a) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(b) $$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

(c) $$\frac{1}{4} = P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

따라서 독립적이지 않다.

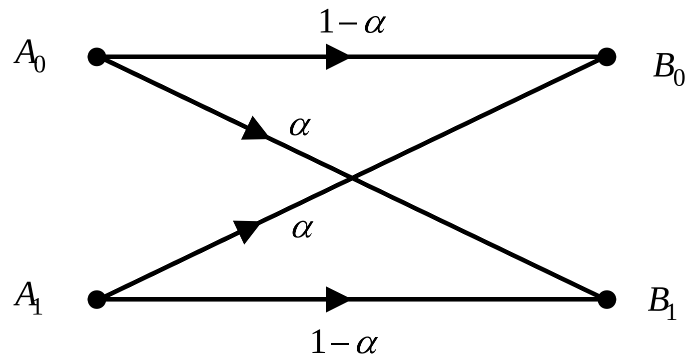
예제 6.2

❑ 이진 디지털 통신 시스템

- 송신측에서 전송할 정보가 0인 사건을 A_0로, 전송할 정보가 1인 사건을 A_1으로 나타내고, 수신측에서 0으로 판단하는 사건을 B_0로, 1로 판단하는 사건을 B_1으로 나타내자. 송신측에서 데이터가 0일 확률과 1일 확률이 각각 $P(A_0)=p_0=0.8$ 과 $P(A_1)=p_1=1-p_0=0.2$로 사전에 주어졌다고 하자. 송신기에서 0을 전송하였는데 수신기가 1로 오판할 확률이 $\alpha=0.1$이며, 반대로 1을 전송하였는데 수신기가 0으로 오판할 확률도 동일하게 $\alpha=0.1$이라고 가정하자.

  (a) 수신기의 오류 확률을 구하라.

  (b) 수신측에서 신호를 1로 판단하였는데 실제로 송신측에서 1을 전송하였을 확률을 구하라.



예제 6.2

❑ 풀이

주어진 통신 채널의 특성은 다음과 같이 조건부 확률로써 표현된다.

$$P(B_1|A_0) = P(B_0|A_1) = \alpha = 0.1$$

$$P(B_0|A_0) = P(B_1|A_1) = 1-\alpha = 0.9$$

(a) 수신기의 오류 확률

$$P(\text{error}) = P(A_0\, B_1) + P(A_1\, B_0) = P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1)$$

$$= \alpha \cdot p_0 + \alpha \cdot p_1 = \alpha = 0.1$$

(b) $$P(A_m|B) = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{P(B)} = \frac{P(B|A_m)P(A_m)}{\sum_{n=1}^{n} P(B|A_n)P(A_n)}$$

$$\Rightarrow P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_0)P(A_0)} = \frac{(1-\alpha)p_1}{(1-\alpha)p_1 + \alpha p_0} = \frac{0.9\times0.2}{0.9\times0.2 + 0.1\times0.8} = 0.69$$

만일 $p_0 = p_1 = 0.5$ 라면 $P(A_1|B_1) = 1-\alpha$가 되어 α의 함수가 된다.

Random Variable

확률변수

❑ Random Variable

- 확률변수는 샘플 공간에 속한 각 원소 ξ_i $(i=1,2,\cdots)$에 대하여 대응하는 실수 x_i $(i=1,2,\cdots)$ 를 매핑시키는 함수이다.
- 따라서 $X(\xi_i)=x_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 와 같은 관계를 가지며 대문자로 표현된 $X(\cdot)$는 확률변수를 나타내며 소문자로 표현된 x_i 는 확률변수가 갖는 값을 나타낸다.
- 확률변수를 사용한 사건과 확률의 표현

$$A=\{\zeta\in S : X(\zeta)\le x\}$$

$$P(X\le x)=P(A)=P(\{\zeta\in S : X(\zeta)\le x\})$$

확률분포 함수

❑ **확률분포 함수(probability distribution function: PDF) 또는 누적분포 함수(cumulative distribution function: CDF)**

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

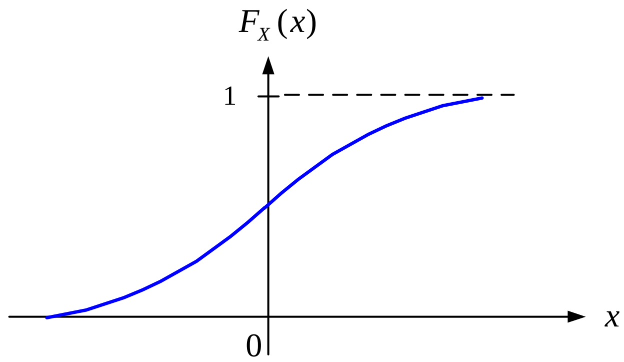
- CDF의 성질

  i) $0 \le F_X(x) \le 1$

  ii) $F_X(\infty) = 1$

  iii) $F_X(-\infty) = 0$

  iv) $F_X(x_1) \le F_X(x_2) \quad \text{for} \quad x_1 < x_2$



- 확률과의 관계

$$P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_x(x_1)$$

예제 6.3

- 주사위를 던져서 나온 눈의 개수를 확률변수의 값으로 취하는 실험을 고려하자. 이 확률변수의 CDF를 구하라.

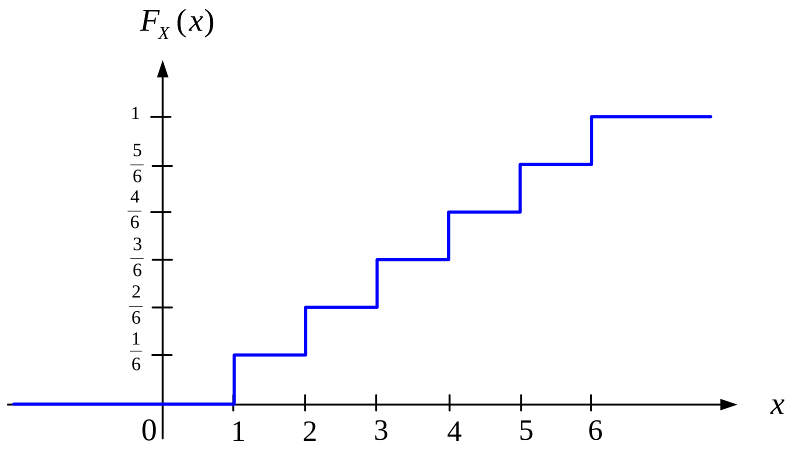
$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

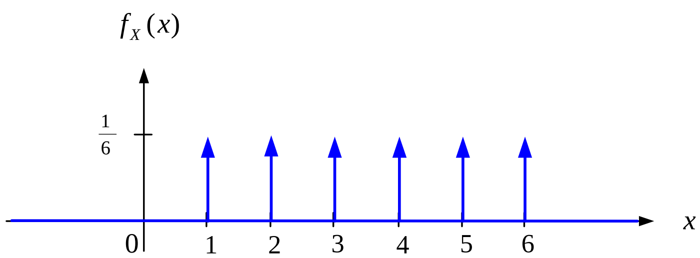
For $x<1$ $F_X(x)=0$

For $1\le x<2$ $F_X(x)=P(X\le x)=P(X=1)=1/6$

$$\vdots$$

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{6}P(X=i)u(x-i)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}u(x-i)$$





확률밀도 함수

❑ 확률밀도 함수(probability density function: pdf)

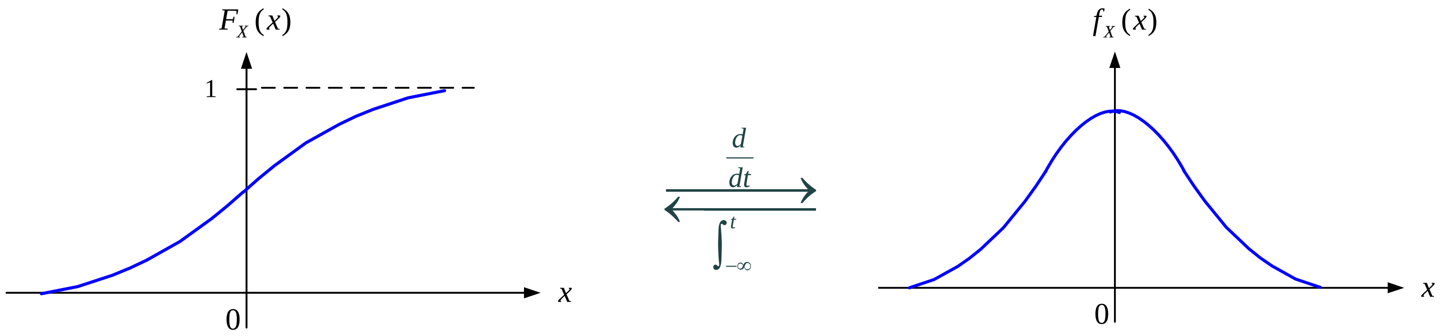
$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- 확률밀도 함수의 성질

i) $f_X(x) \geq 0$ for all x

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

iii) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$



예제 6.4

- 어떤 확률변수 X의 pdf가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$f_X(x) = a\, e^{-b|x|}$$

(a) 확률분포함수 $F_X(x)$를 구하라.

(b) 상수 a와 b는 어떤 관계를 가지는가?

(c) 확률변수 X가 1과 2 사이의 값을 가질 확률을 구하라.

예제 6.4

❑ 풀이

(a) 확률분포함수

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{x} a\,e^{-b|x|}dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{b}e^{bx} & x \le 0 \\ \dfrac{a}{b}(2 - e^{-bx}) & x \ge 0 \end{cases}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|x|}dx = \frac{2a}{b} = 1$$

$$\Rightarrow b = 2a$$

(c) 확률변수 X가 1과 2 사이의 값을 가질 확률

$$P(1 < X \le 2) = \frac{b}{2}\int_{1}^{2} e^{-b|x|}dx = \frac{1}{2}[e^{-b} - e^{-2b}]$$

Joint CDF and Joint pdf

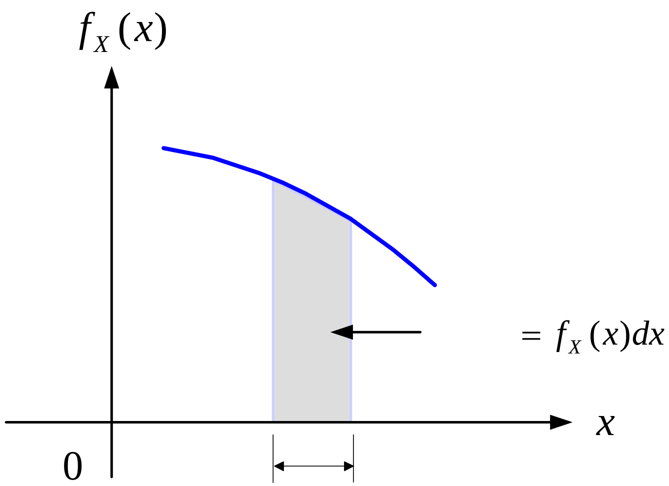
❑ 결합분포 함수(joint distribution function)

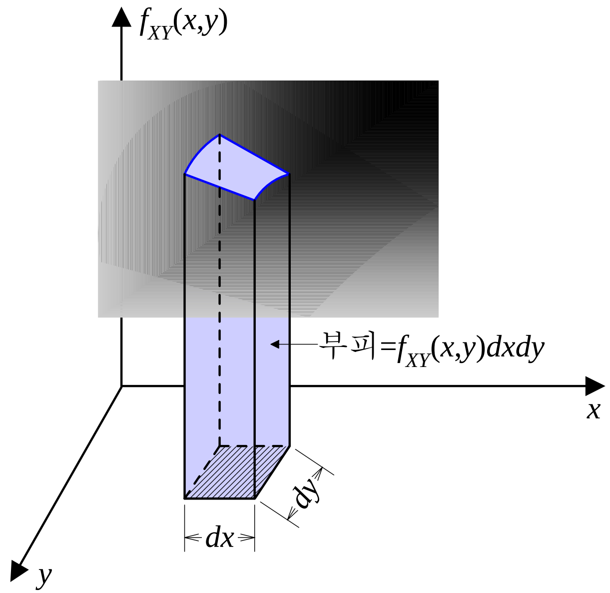
$$F_{XY}(x, y) = P(X \le x,\ Y \le y)$$

❑ 결합확률밀도 함수(joint pdf)

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2,\ y_1 \le Y \le y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dxdy$$





Joint CDF and Joint pdf

- Joint pdf의 성질

  i) $F_{XY}(\infty,\infty) = P(X \le \infty,\ Y \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

  ii) $F_X(x) = P(X \le x,\ -\infty \le Y \le \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy$

  iii) $\mathrm{f}_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$

- Independent random variables

  - 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립이라면

$$F_{XY}(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Statistical Averages

통계적 평균

- 평균값(mean value)

$$m_X \equiv \overline{X} \equiv E[X] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

- 이산 확률변수의 경우

$$m_X \equiv \overline{X} \equiv E[X] \triangleq \sum_i x_i P(x_i)$$

where $P(x_i) = P(X = x_i)$ is called probability mass function (pmf)

- Function of random variable Y=g(X)의 평균

$$m_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy$$ 또는

$$m_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

통계적 평균

❑ Moments

- 확률변수 X의 n차 moment

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$$

$$n = 1 \Rightarrow \text{mean}$$

$$n = 2 \Rightarrow \text{mean square value}$$

- 확률변수 X의 n차 central moment

$$E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n f_X(x)dx$$

$$n = 2 \Rightarrow \text{variance}$$

$$\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)dx$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - 2m_X^2 + m_X^2 = E[X^2] - m_X^2$$

통계적 평균

❑ 예제 6.6

- 확률변수 X의 평균과 분산을 각각 m_X와 σ_X라고 하자. 상수 a와 b에 대하여 $Y=aX+b$로 표현되는 확률변수 Y의 평균과 분산을 구하라.

❑ 풀이

$$m_Y = E[aX+b] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)dx = am_X + b$$

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E[(Y-m_Y)^2] = E[(aX+b-am_X-b)^2] \\ &= E[a^2(X-m_X)^2] \\ &= a^2\sigma_X^2\end{aligned}$$

통계적 평균

Joint Moment

- 두 확률변수 X와 Y의 jk차 결합 모멘트

$$E[X^jY^k] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{XY}(xy)dxdy$$

Correlation

- For $j = k = 1$, $E[XY]$ is called correlation of X and Y
- 만일 두 확률변수가 독립이라면

$$f_{XY}(xy) = f_X(x) f_Y(y)$$
$$\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

통계적 평균

❑ Joint Central Moment

- 두 확률변수 X와 Y의 jk차 joint central moment

$$E[(X-m_X)^j(Y-m_Y)^k]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^j(y-m_Y)^k f_{XY}(xy)\,dxdy$$

❑ Covariance

- For $j = k = 1$,

  $\mathrm{cov}(X, Y)=\sigma_{XY}=E[(X-m_X)(Y-m_Y)]$ is called covariance of X and Y

- Correlation과의 관계

$$\sigma_{XY} = E[XY]-m_X m_Y$$

- 만일 두 확률변수가 독립이라면, $E[XY] = E[X]\,E[Y]$ 이므로

$$\sigma_{XY} = 0$$

통계적 평균

❑ 상관계수(Correlation Coefficient)

- Covariance를 normalize한 값

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sqrt{E[(X - m_X)^2]\,E[(Y - m_Y)^2]}}$$

- 두 확률변수가 독립적이라면, $\rho = 0$
- 두 확률변수가 완전히 종속되어 $Y=aX$ 와 같은 관계를 가지는 경우

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sqrt{a^2\sigma_X^2}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1$$

- 상관계수의 범위

$$-1 \le \rho \le +1$$

통계적 평균

❑ 상관계수(Correlation Coefficient)

- 상관계수가 0인 경우, 두 확률변수가 **uncorrelated** 되었다고 한다.
- If two random variables are **independent**, they are also **uncorrelated**.
- 그러나 역은 반드시 성립하지는 않음
- 즉 uncorrelated 확률변수들의 joint pdf가 separable하지 않음
- Special case: jointly Gaussian random variable의 경우 uncorrelated되면 independent함

확률변수의 합

- 두 확률변수의 합 $Z = X + Y$
  - 평균

$$m_Z = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = m_X + m_Y$$

  - 분산

$$\sigma_Z^2 = E[(X+Y-m_X-m_Y)^2] = E[\{(X-m_X)+(Y-m_Y)\}^2]$$

$$= E[(X-m_X)^2 + (Y-m_Y)^2 + 2(X-m_X)(Y-m_Y)]$$

$$= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY}$$

확률변수들이 서로 독립적이라면

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

확률변수의 합

❑ 두 확률변수의 합 $Z = X + Y$

- 분포 특성

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(-\infty < x < \infty, y \le z - x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y) dx dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y) dy$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx$$ Superposition integral

- 두 확률변수가 서로 독립적이라면 $f_{XY}(x, z-x) = f_X(x) f_Y(z-x)$ 이므로

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$ Convolutional integral

확률변수의 합

❑ N 개 확률변수의 합

$$Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- 평균

$$m_Z = \sum_{k=1}^{n} m_{X_k}$$

- 분산

$$\mathrm{var}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \mathrm{cov}(X_j, X_k)$$

확률변수들이 서로 독립적이라면

$$\mathrm{var}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)$$

확률변수의 합

❑ Central Limit Theorem

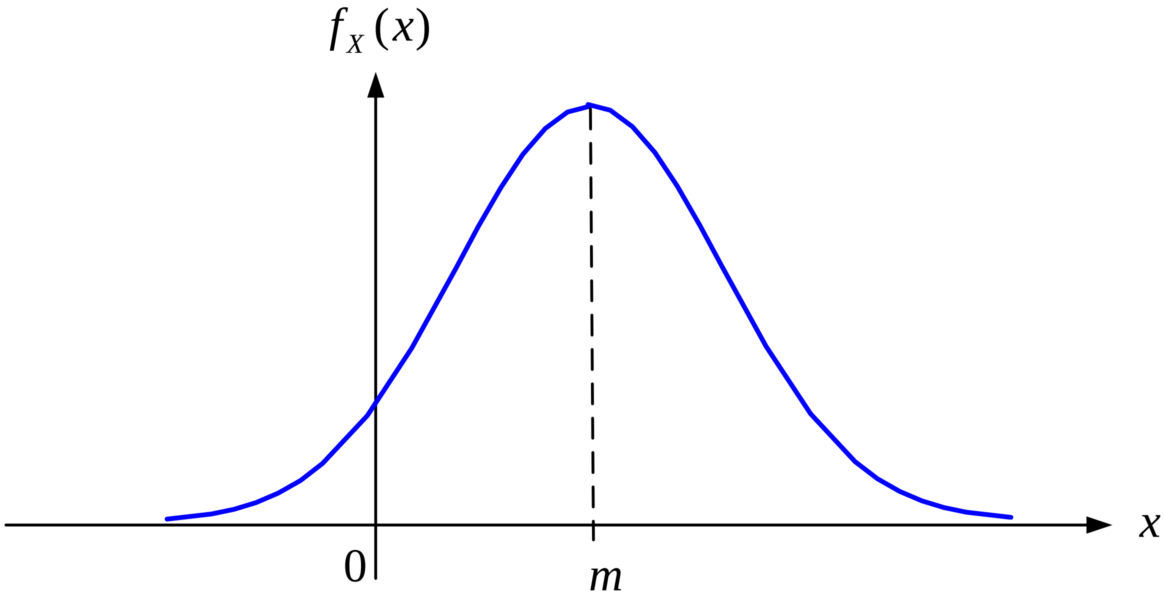
- 확률변수 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 이 서로 독립적이면서 동일한 확률밀도함수를 가진다고 가정하자.
- 그러면 Z 의 확률밀도 함수는 X_k의 확률밀도 함수를 N 번 컨볼루션한 모양을 갖게 된다.
- 함수의 모양에 관계 없이 동일한 함수를 계속 컨볼루션 하게 되면 그 결과는 가우시안 pdf와 같이 종 모양의 함수에 근접하게 된다.
- 즉 X_k 의 pdf 모양에 관계 없이 Z 의 pdf는 가우시안 pdf에 근접하게 된다.

주요 확률분포

Gaussian 분포

❑ 평균이 m이고 분산이 σ^2인 Gaussian 확률변수의 pdf

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$



Q Function

- 평균이 0이고 분산이 1인 Gaussian 확률변수의 pdf

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

  - CDF

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

- Q function

$$Q(x) \triangleq \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

  - Q 함수의 성질

$$Q(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

$$Q(0) = 0.5$$

$$Q(-x) = 1 - Q(x)$$

Q Function

- Q function의 근사화

$$Q(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{for } x \gg 1$$

- Gaussian 분포의 확률의 표현

$$P(X \le x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= 1 - Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(X > x) = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$P(x_1 < X \le x_2) = Q\left(\frac{x_1-m}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2-m}{\sigma}\right)$$

Q Function

- Error Function

$$erf(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$$

- Complementary Error Function

$$erfc(x) \triangleq 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-u^2) du$$

- Complementary error function과 Q function과의 관계

$$erfc(x) = 2Q(\sqrt{2}\,x)$$

Rayleigh 분포

- 두 개의 확률변수
  - X와 Y가 서로 독립적이며, 평균이 0이고 분산이 동일하게 σ^2인 가우시안 확률밀도 함수를 가진다고 하자.
  - 두 확률변수의 결합 확률밀도 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) &= f_X(x) f_Y(y) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

- Transformation에 의해 만들어지는 새로운 확률변수

$$R = g_1(X,Y) = \sqrt{X^2+Y^2}$$

$$\Theta = g_2(X,Y) = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Rayleigh 분포

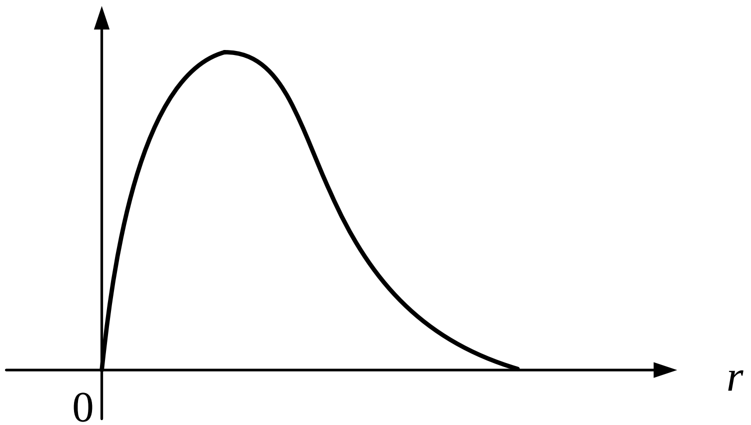
- 확률변수 R과 Θ의 분포 특성?

$$f_R(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}\right) & r \ge 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

Rayleigh distribution

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & 0 \le \Theta \le 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Uniform distribution



$$m_R = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad \sigma_R^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

Rayleigh 분포

- N_c와 N_s가 서로 독립적이며, 평균이 0이고 분산이 동일하게 σ^2인 가우시안 확률변수라 하자.
- 복소 확률변수 $Z = N_c + j\,N_s$
  - 크기 $R = \sqrt{N_c^2 + N_s^2}$ 는 Rayleigh 분포를 가지며
  - 위상 $\Theta = \tan^{-1}(N_s / N_c)$ 는 uniform 분포를 가진다.

Ricean 분포

- N_c와 N_s가 서로 독립적이며, 평균이 0이고 분산이 동일하게 σ^2인 가우시안 확률변수라 하자.
- 복소 확률변수 $Z = (A + N_c) + j\,N_s$
  - 크기 $R = \sqrt{(A+N_c)^2 + N_s^2}$ 의 분포?

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2+A^2}{2\sigma^2}\right)\cdot I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right)$$

Ricean distribution

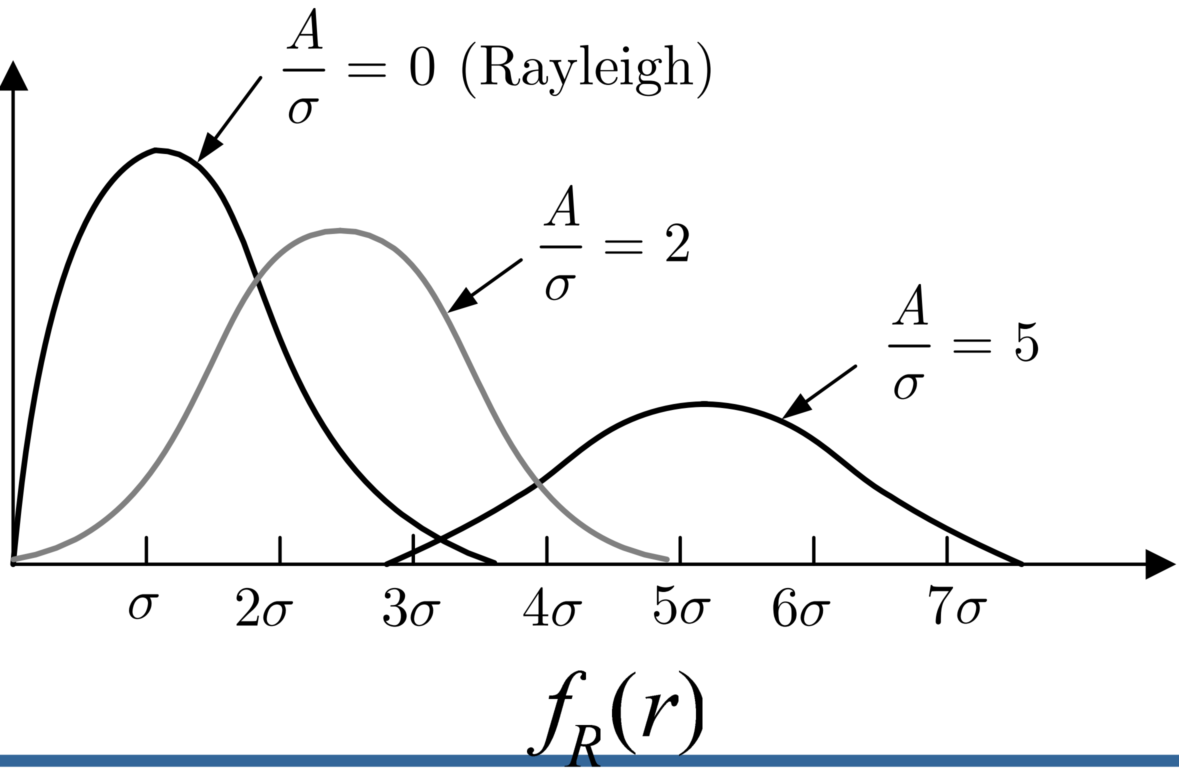
where

$$I_0(r) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(r\cos\theta)d\theta$$

modified zero-order Bessel function of the first kind

Ricean 분포

- A=0이면 라이시안 밀도 함수는 레일리 밀도 함수가 되며, A가 σ에 비해 점점 커질수록 라이시안 밀도 함수는 가우시안 밀도 함수에 근접해간다.

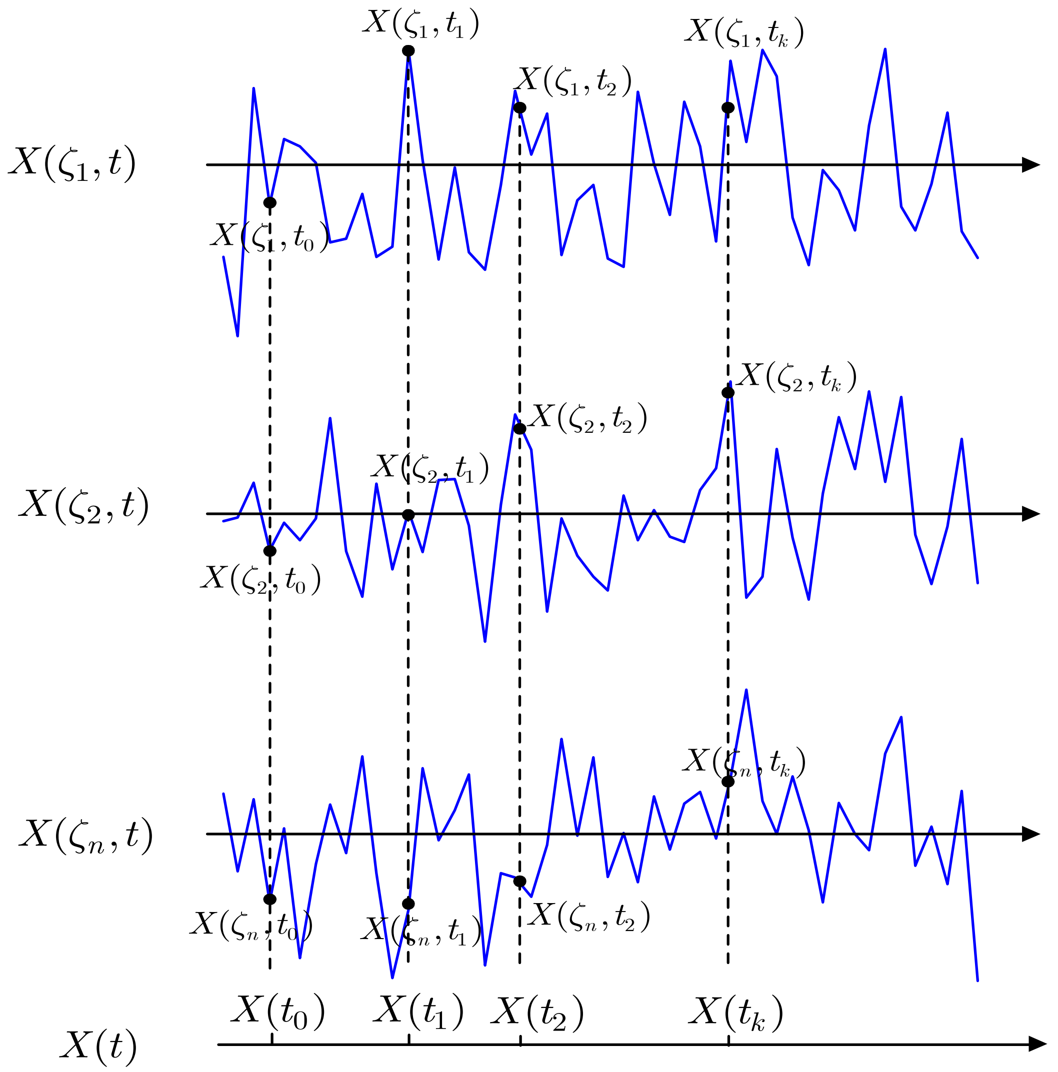


Random Process

Random Process

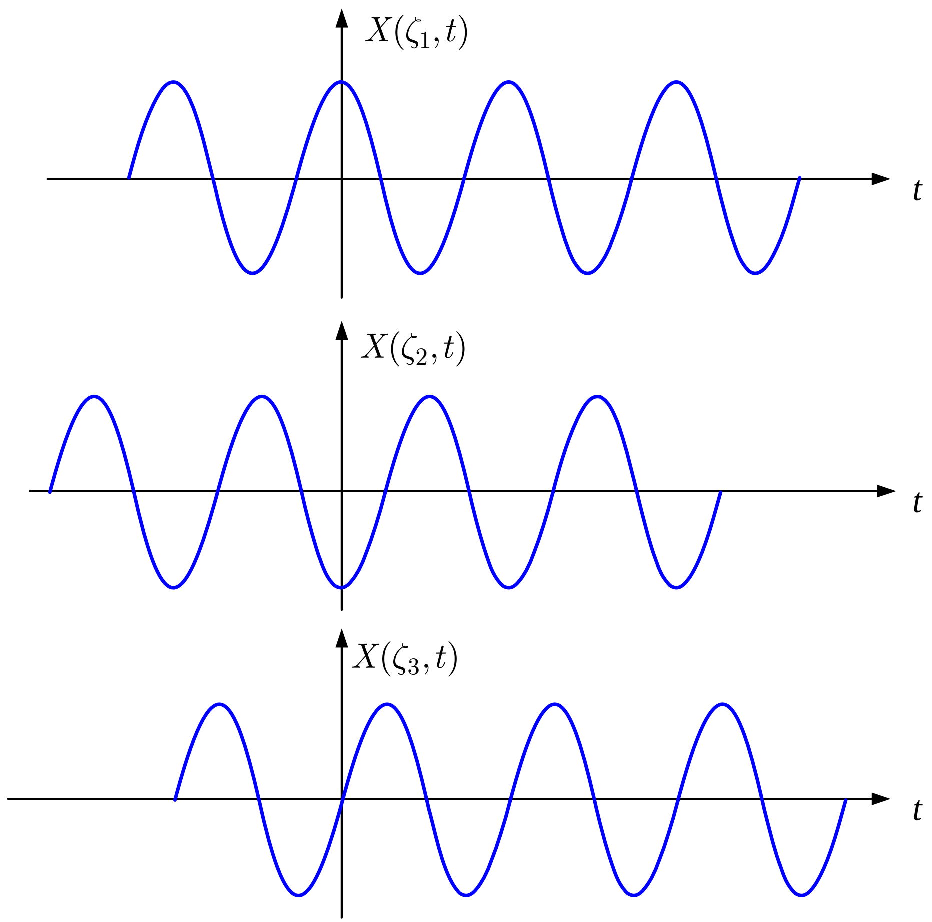
- 확률변수는 불확실한 어떤 사건을 숫자로 모델링하는데 사용
- Random process는 불확실한 어떤 신호를 모델링하는데 사용
- 모든 시간에 대해 신호의 값을 정확히 표현할 수 있으면 그 신호를 결정적 신호(deterministic signal)라 하고, 불확실성이 있어서 정확히 표현할 수 없을 때 그 신호를 랜덤 신호(random signal)라 한다.
- 특정한 순간 $t = t_i$에서의 랜덤 프로세스는 확률변수 $X_i = X(t)|_{t=t_i} = X(t_i)$가 된다.

Random Process



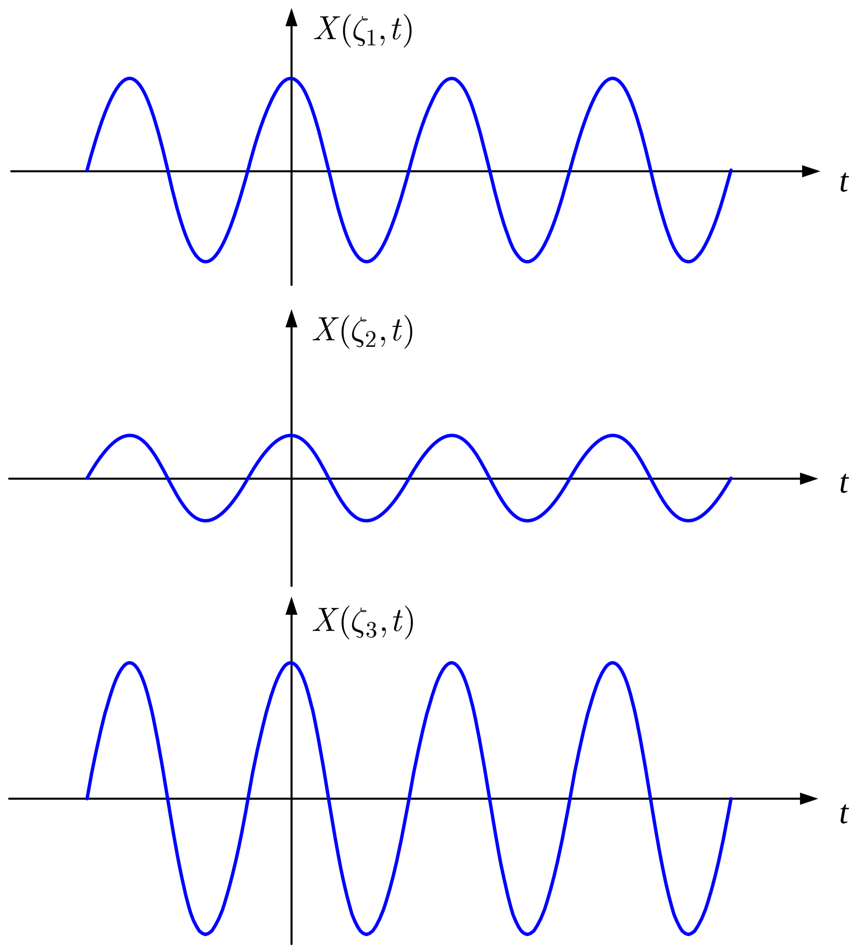
Random Process의 예

- 랜덤 프로세스 $X(t) = 10\cos(100\pi t + \Theta)$의 표본 함수



Random Process의 예

- 랜덤 프로세스 $X(t) = A\cos(100\pi t)$ 의 표본 함수



Statistical Averages

- Mean

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)dx$$

  - 평균은 시간의 함수임

- Variance

$$\sigma_X^2(t) = E[\{X(t) - m_X(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \{x(t) - m_X(t)\}^2 f_X(x;t)dx$$

Statistical Averages

- Autocorrelation

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2$$

- $t_1 = t_2$이면 autocorrelation은 전력이 된다.

$$P(t_1) \equiv R_X(t_1,t_1) \triangleq E[|X(t_1)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^2 f_{X_1}(x_1;t_1)\,dx_1$$

- Crosscorrelation

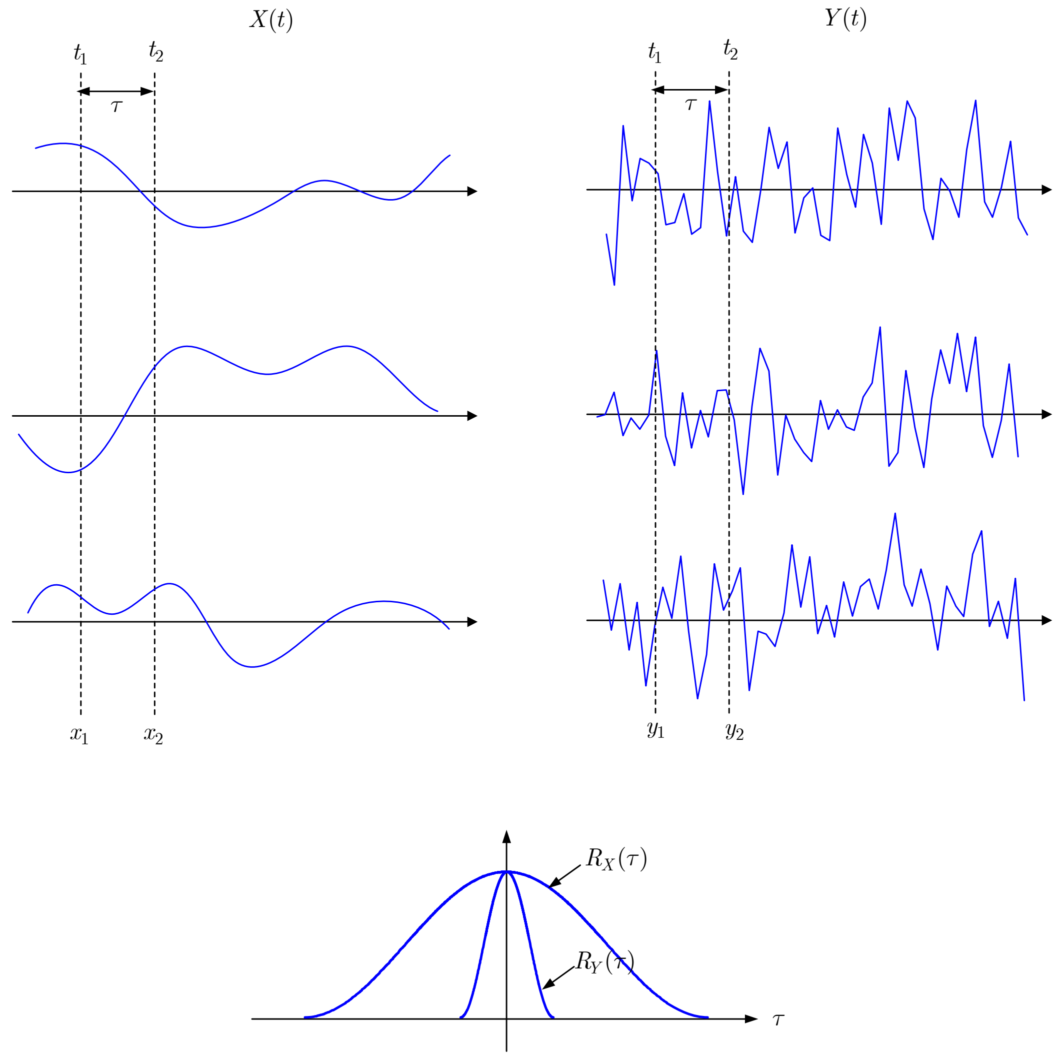
$$R_{XY}(t_1,t_2) \triangleq E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f_{X_1Y_2}(x_1,y_2;t_1,t_2)dx_1 dy_2$$

Autocorrelation

❑ Autocorrelation의 의미

- $R_X(t_1,t_2)$는 랜덤 프로세스 $X(t)$의 통계적 특성이 t_1으로부터 $\tau = t_2 - t_1$ 초 지난 후에 얼마나 유사한지를 나타낸다고 볼 수 있다.
- 다음 그림 (a)와 같이 느리게 변하는 랜덤 프로세스에서는 상당히 큰 값의 에 τ에 대해서도 $X(t_1)$과 $X(t_2)$가 상관성을 가지겠지만, 그림 (b)와 같이 빠르게 변하는 랜덤 프로세스에서는 작은 τ에 대해서도 상관성이 거의 없어진다.
- 따라서 자기상관 함수를 알면 그 랜덤 프로세스의 표본 함수의 파형이 빠르게 변하는지 느리게 변하는지 예측할 수 있으며, 결과적으로 주파수 성분에 대한 정보를 알 수 있게 된다.
- 랜덤 프로세스에 대한 전력스펙트럼 밀도(PSD)는 자기상관 함수의 푸리에 변환으로 주어진다.

Autocorrelation



t

t

Ergodic Process

- Random signal의 전력과 자기상관 함수
  - Ensemble average로 표현

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2$$

$$P(t_1) = E[|X(t_1)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^2 f_{X_1}(x_1;t_1)\,dx_1$$

- Deterministic signal의 전력과 자기상관 함수
  - Time average로 표현

$$R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

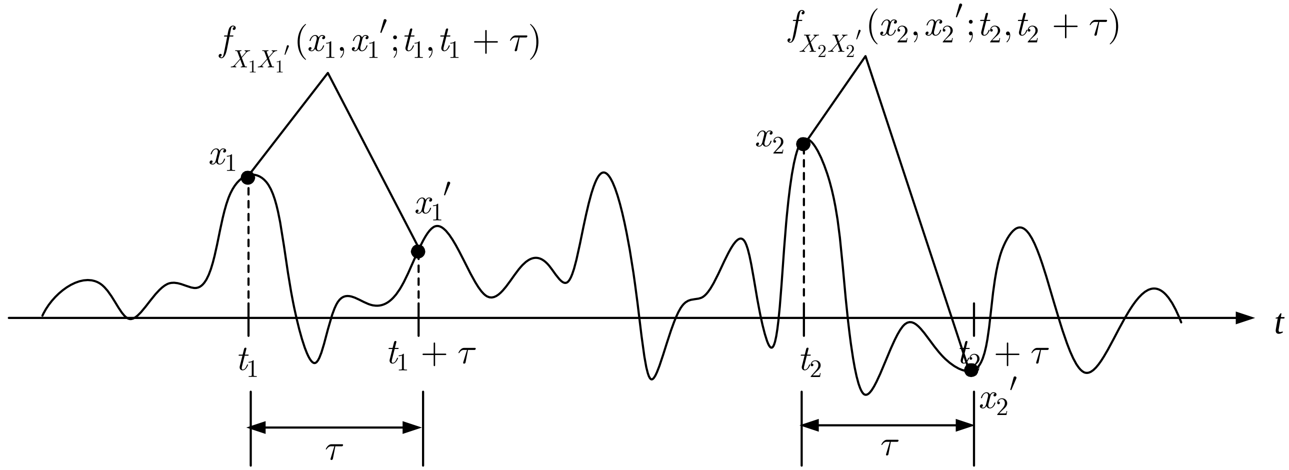
$$P = \langle x(t)^2\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

- Ergodic Process
  - Ensemble average = time average

Stationarity

❑ Joint pdf

- 일반적인 nonstationary process는 시간에 따라 다른 joint pdf를 가짐
- 예: 2차 joint pdf



❑ Second order stationary

$$f_{X_1X_1'}(x_1, x_1'; t_1, t_1+\tau) = f_{X_2X_2'}(x_2, x_2'; t_2, t_2+\tau)$$

Stationarity

❑ Stationary Process

- First order stationary

$$f_{X_1}(x_1;t_1) = f_{X_1'}(x_1';t_1+\tau)$$

- Second order stationary

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{X_1'X_2'}(x_1',x_2';t_1+\tau,t_2+\tau)$$

- (Strict sense) stationary

$$f_{X_1X_2X_3\cdots}(x_1,x_2,x_3,\cdots;t_1,t_2,t_3,\cdots) = f_{X_1'X_2'X_3'\cdots}(x_1',x_2',x_3',\cdots;t_1+\tau,t_2+\tau,t_3+\tau,\cdots)$$

Stationarity

- Stationary Process의 성질
  - First order stationary하면, 즉 $f_{X_1}(x_1;t_1) = f_{X_1'}(x_1';t_1+\tau)$

    $$E[X(t)] = m_X(t) = m_X \quad \Rightarrow \quad \text{constant (not time varying)}$$

  - Second order stationary 하면, 즉 $f_{X_1X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_{X_1'X_2'}(x_1',x_2';t_1+\tau,t_2+\tau)$

    $$E[X(t)] = m_X(t) = m_X \quad \Rightarrow \quad \text{constant (not time varying)}$$

    $$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1-t_2) = R_X(\tau) \quad \Rightarrow \quad \text{function of time difference}$$

  - Second order stationary 하면 평균은 상수이고 자기상관 함수는 시간차의 함수이지만, 역은 성립하지 않는다.
  - 즉 평균이 상수이고 자기상관 함수가 시간차의 함수인 프로세스가 반드시 second order stationary한 것은 아님.

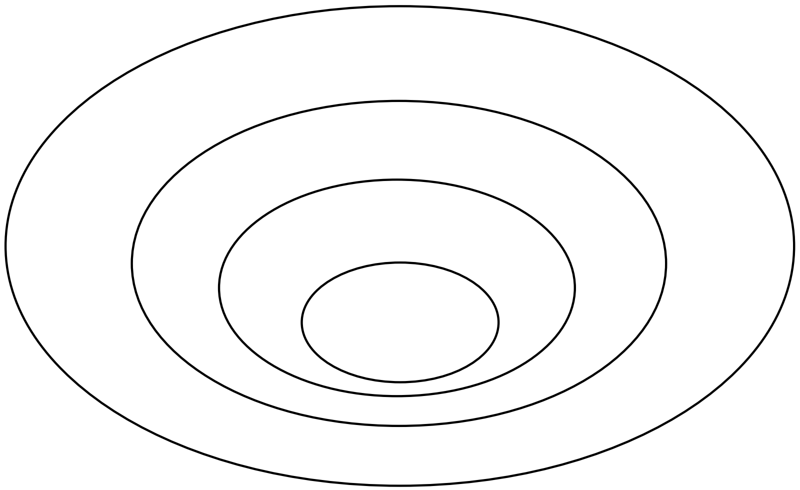
Stationarity

- Wide Sense Stationary (WSS) Process
  - 평균이 상수이고 자기상관 함수가 시간차의 함수인 프로세스
  - WSS 프로세스의 자기상관 함수와 전력

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$P = R_X(0) = E[X^2(t)]$$

- Random process의 분류



Stationarity

- 예제 6.7 $X(t) = A\cos(2\pi t)$
  - 여기서 A는 확률변수로 $f_A(a)$의 pdf를 갖는다고 하자.
  - 이 랜덤 프로세스의 평균과 자기상관 함수를 표현해 보라.
  - 이 랜덤 프로세스는 WSS인가?
- 풀이

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)dx = E[A\cos(2\pi t)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(2\pi t) f_A(a)da = E[A]\cos(2\pi t) \\
&= m_A \cos(2\pi t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[A\cos(2\pi t_1)\cdot A\cos(2\pi t_2)] \\
&= E[A^2]\cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2)
\end{aligned}
$$

- WSS하지 않음

Stationarity

- 예제 6.8 $X(t) = \cos(\omega t + \Theta)$
  - 여기서 Θ는 확률변수로 (-π, π)에서 균일한 분포 특성을 갖는다.
  - 이 랜덤 프로세스의 평균과 자기상관 함수를 표현해 보라.
  - 이 랜덤 프로세스는 WSS인가?
- 풀이

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)dx = E[\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \theta) f_\Theta(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \theta)d\theta = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[\cos(\omega t_1 + \Theta)\cdot\cos(\omega t_2 + \Theta)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t_1 + \theta)\cos(\omega t_2 + \theta) f_\Theta(\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos\{\omega(t_1 - t_2)\} + \cos\{\omega(t_1 + t_2) + 2\theta\}]\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cos\{\omega(t_1 - t_2)\} = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau)$$

  - WSS

랜덤 프로세스의
확률밀도 함수

Random Process의 주파수영역 해석

❑ 랜덤 프로세스를 입력으로 하는 선형 시스템의 해석

- 랜덤 프로세스와 랜덤 프로세스를 입력으로 하는 선형 시스템의 해석도 주파수 영역 해석이 가능한지 의문을 갖게 된다.
- 랜덤 프로세스의 모든 표본 함수들이 모든 시구간 에서 존재한다고 가정하면 랜덤 프로세스는 전력 신호로 분류된다는 것을 알 수 있다.
- 그렇다면 랜덤 프로세스의 전력 스펙트럼 밀도(PSD)가 존재하는지 살펴 보아야 할 것이다.

Random Process의 주파수영역 해석

- 랜덤 프로세스를 입력으로 하는 선형 시스템의 해석
  - 그러나 랜덤 프로세스의 푸리에 변환이나 PSD에 대한 개념을 적용하는데 몇 가지 문제가 있다.
  - 첫 째 랜덤 프로세스는 수식으로 정확하게 표현할 수 없으며,
  - 둘 째 랜덤 프로세스를 제곱하여 적분함으로써 푸리에 변환이 존재하는지 판단하는 개념을 적용할 수 없어서 랜덤 프로세스에 직접적으로 푸리에 변환을 취할 수 없으며,
  - 셋 째 랜덤 프로세스의 표본 함수는 푸리에 변환이 가능하다고 하더라도 표본 함수가 모두 다르므로 주파수 특성을 일관적으로 나타내는 PSD를 제시하는 것은 불가능하다.
  - 그러나 랜덤 프로세스가 stationary(최소한 WSS)이라면 어느 정도 의미 있는 PSD를 정의하는 것이 가능하다.
  - **Nonstationary 프로세스의 PSD는 존재하지 않는다.**

Random Process의 PSD

❑ Deterministic signal의 PSD

$$S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$$

where

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t+\tau)dt$$

❑ WSS process의 PSD

- 위의 수식에서 time average를 ensemble average로 대체
- Autocorrelation

$$R_x(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

- PSD

$$S_X(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$

- Power

$$P = E[X^2(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

Linear System

- Linear system 출력의 PSD
  - 랜덤 프로세스 $X(t)$가 전달함수가 $H(f)$인 선형 시불변 시스템의 입력으로 가해지는 경우 출력은 역시 랜덤 프로세스가 된다.
  - 출력 프로세스 $Y(t)$ 의 자기상관 함수

$$R_Y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_X(\tau)$$

  - 출력 프로세스 $Y(t)$ 의 PSD

$$\boxed{S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)}$$

예제 6.9

❑ 랜덤 신호의 진폭변조

- 메시지 신호 $M(t)$가 WSS인 랜덤 프로세스라고 하자. 이 신호를 DSB-SC 변조한 신호

$$X(t) = M(t)\cos(\omega_c t + \Theta)$$

의 자기상관 함수와 PSD를 구하라. 여기서 Θ는 $(0, 2\pi)$에서 균일한 분포 특성을 갖는 확률변수이며 $M(t)$와는 독립이라고 가정한다.

❑ 풀이

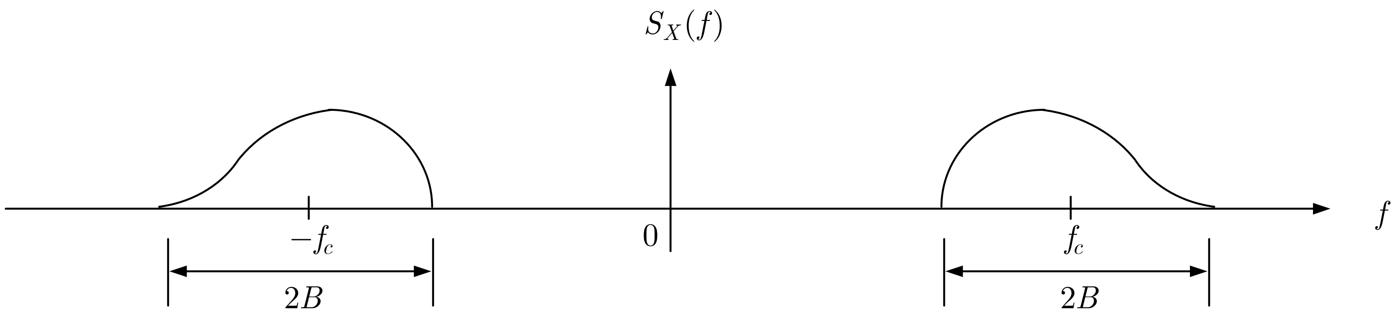
$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= E[M(t)\cos(\omega_c t + \Theta)M(t+\tau)\cos(\omega_c(t+\tau)+\Theta)] \\ &= E[M(t)M(t+\tau)]\cdot E[\cos(\omega_c t + \Theta)\cos(\omega_c(t+\tau)+\Theta)] \\ &= \frac{1}{2}R_M(\tau)\cos(\omega_c \tau) \end{aligned}$$

$$S_X(f) = \frac{1}{4}[S_M(f-f_c) + S_M(f+f_c)]$$

대역통과 랜덤 프로세스

Bandpass Process

❑ 대역폭이 $2B$ Hz인 대역통과 랜덤 프로세스의 예



- Quadrature form

$$X(t) = X_c(t)\cos 2\pi f_c t + X_s(t)\sin 2\pi f_c t$$

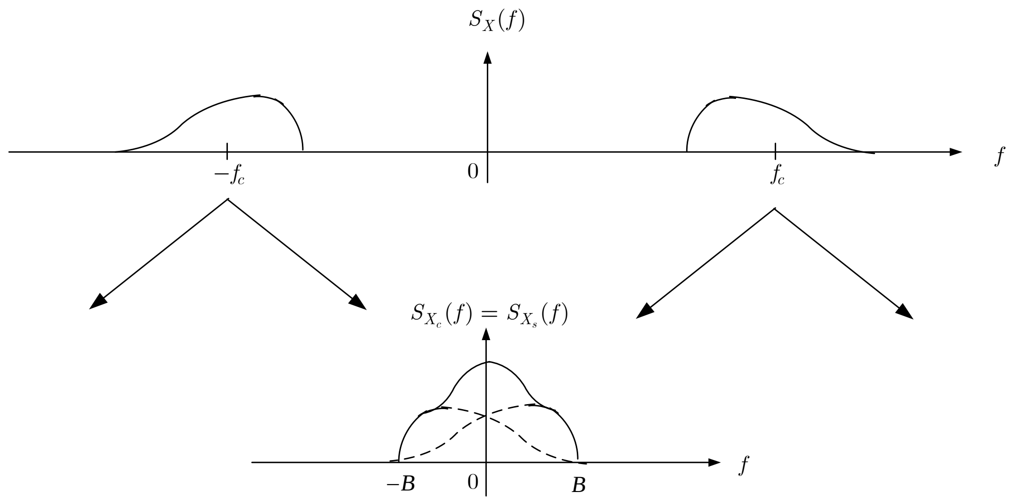
여기서 $X_c(t)$ 와 $X_s(t)$ 는 대역폭이 B Hz인 기저대역 랜덤 프로세스이다

- Polar form

$$X(t) = R(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta(t))$$

Bandpass Process

- $X_c(t)$와 $X_s(t)$의 통계적 특성과 $X(t)$와의 관계?

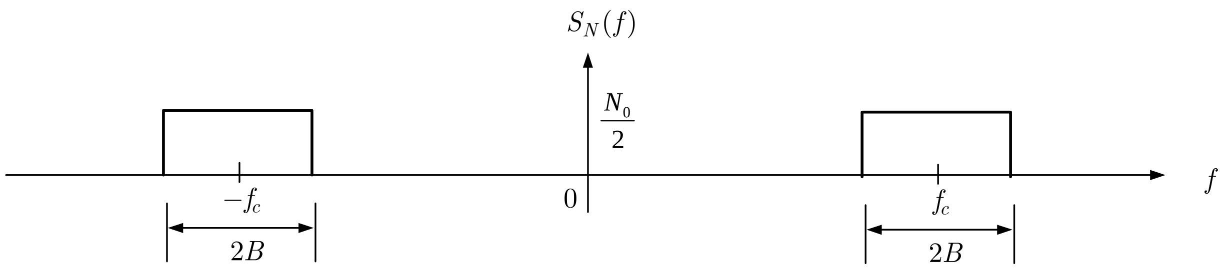


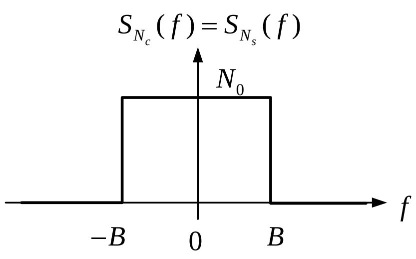
$$S_{X_c}(f) = S_{X_s}(f) = \begin{cases} S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c) & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

$$E[X^2(t)] = E[X_c^2(t)] = E[X_s^2(t)]$$

예제 6.11

- 대역통과 백색잡음
  - 그림과 같이 대역폭이 $2B$이고 PSD가 일정한 크기 $N_0/2$인 대역통과 랜덤 프로세스 $N(t)$가 있다고 하자. 이 프로세스를 직교 성분들을 이용하여 표현하라. 직교 성분 $N_c(t)$와 $N_s(t)$의 PSD를 유도하고 전력을 구하라.





예제 6.11

❑ 풀이

$$N(t) = N_c(t)\cos 2\pi f_c t + N_s(t)\sin 2\pi f_c t$$

- 직교 성분들의 PSD

$$S_{N_c}(f) = S_{N_s}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c) & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$
$$= \begin{cases} N_0 & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

- $N(t)$의 전력

$$E[N^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f)df = 2\int_{f_c - B}^{f_c + B} \frac{N_0}{2} df = 2N_0B$$

- 직교 성분들의 전력

$$E[N_c^2(t)] = E[N_s^2(t)] = \int_{-B}^{B} N_0 df = 2N_0B$$

- 따라서 $N_c(t)$, $N_s(t)$, $N(t)$는 모두 동일한 전력을 갖는다:

$$E[N_c^2(t)] = E[N_s^2(t)] = E[N^2(t)] = 2N_0B$$

백색잡음

White Noise

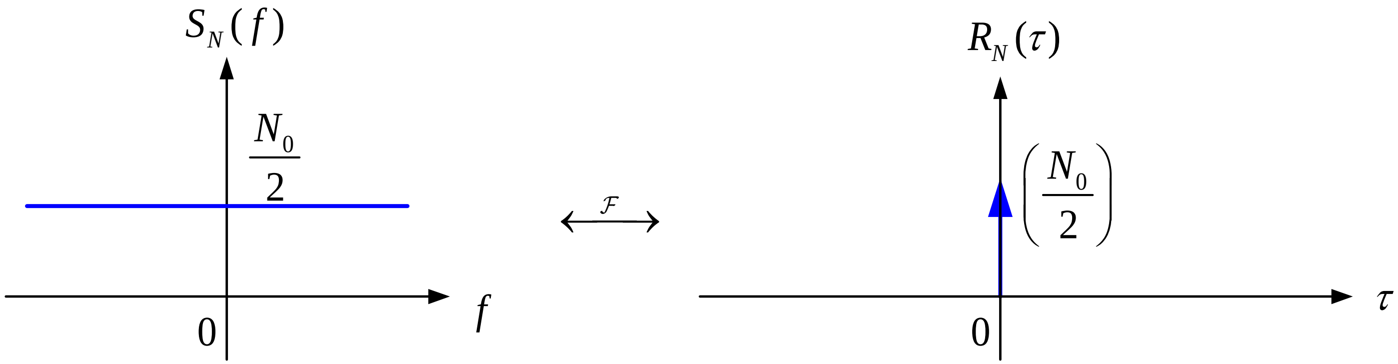
- PSD

$$S_N(f) = N_0 / 2$$

- Autocorrelation

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- Power = ∞



Lowpass White Noise

- PSD

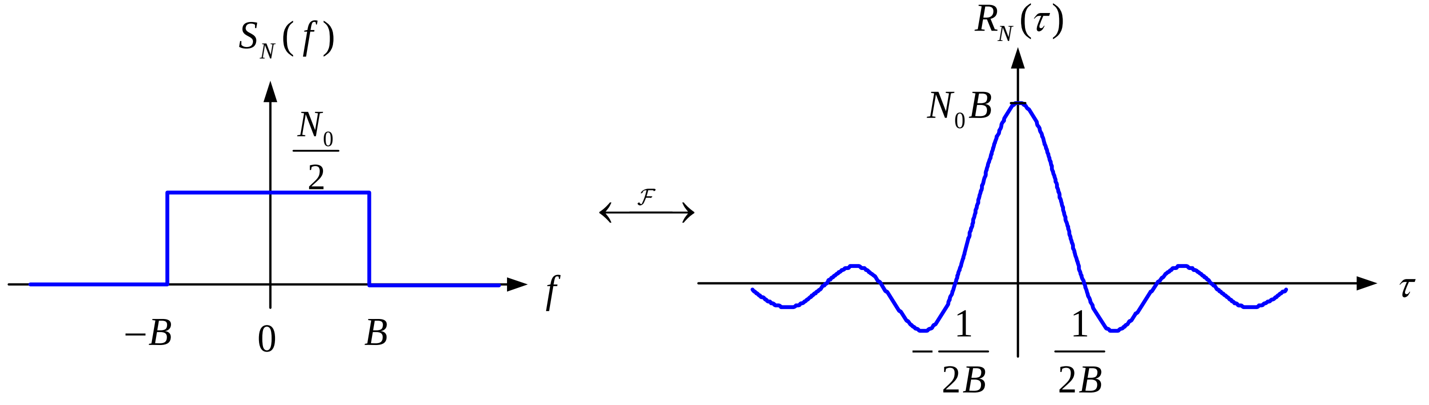
$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

- Autocorrelation

$$R_N(\tau) = N_0 B\,\mathrm{sinc}(2B\tau)$$

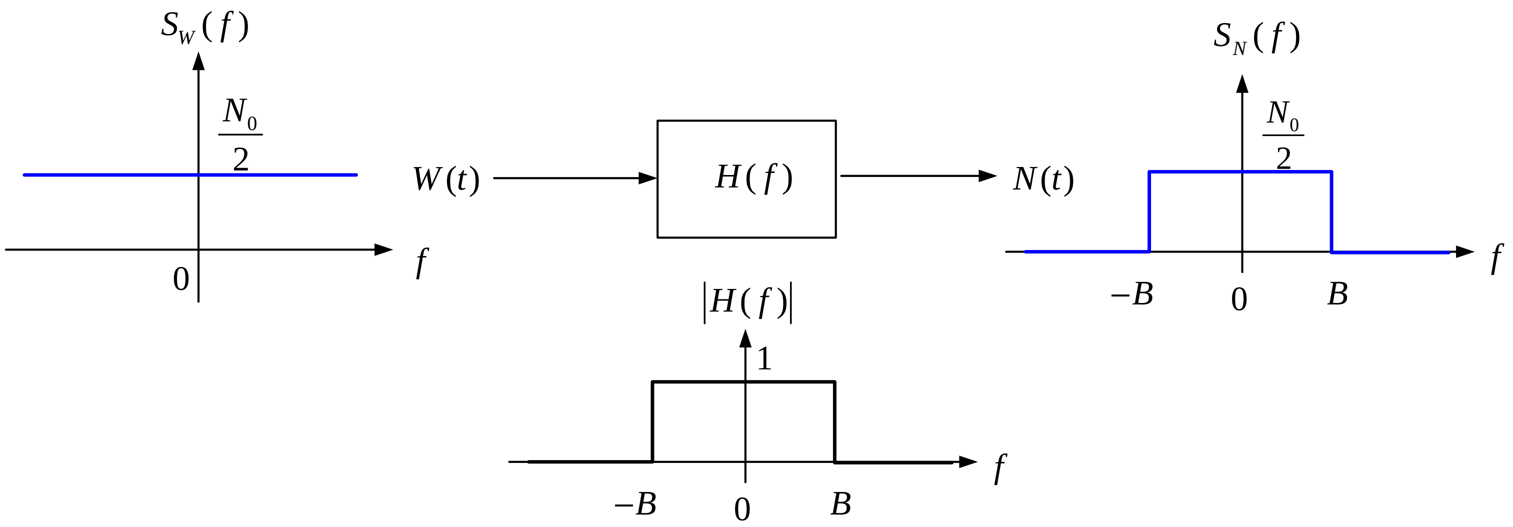
- Power

$$P = E[N^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\,df = N_0 B$$



Lowpass White Noise

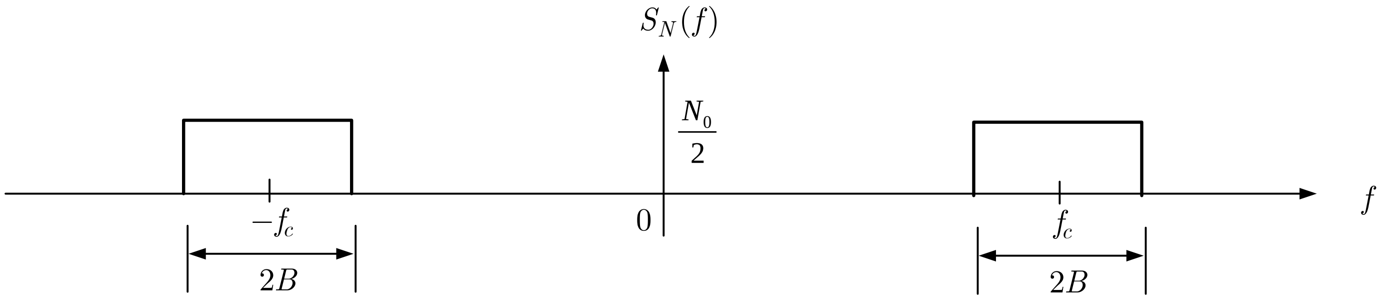
❑ Lowpass White Noise의 Generation Model



$$|H(f)| = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Bandpass White Gaussian Noise

- 평균이 0이고 주파수 f_c를 중심으로 대역폭 $2B$에 걸쳐서 PSD가 균일하게 $N_0/2$인 대역통과 백색 가우시안 랜덤 프로세스



$$N(t) = N_c(t)\cos 2\pi f_c t + N_s(t)\sin 2\pi f_c t$$

$$S_{N_c}(f) = S_{N_s}(f) = \begin{cases} N_0 & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

$$E[N_c^2(t)] = E[N_s^2(t)] = E[N^2(t)] = 2N_0 B$$

Bandpass White Gaussian Noise

- 직교 성분 $N_c(t)$와 $N_s(t)$는 uncorrelated이며 평균이 0이고 분산이 $\sigma^2 = 2N_0B$인 **가우시안** 분포 특성을 갖는다.
- 일반적으로 결합 확률 분포에서 두 확률 변수가 독립이면 서로 무상관이지만 그 역은 성립하지 않는다.
- 그러나 가우시안 분포의 경우에는 두 확률 변수가 무상관인 것과 두 확률 변수가 독립이라는 것이 동등하게 성립한다.
- 따라서 대역통과 백색 가우시안 랜덤 프로세스에서 $N_c(t)$와 $N_s(t)$는 서로 **독립**이며, 이들의 pdf는 동일하게 다음과 같이 주어진다.

$$f_{N_c}(n) = f_{N_s}(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

where

$$\sigma^2 = 2N_0B$$

Bandpass White Gaussian Noise

- Bandpass White Noise의 Polar Form 표현

$$N(t) = R(t)\cos[2\pi f_c t + \Theta(t)]$$

$$R(t) = \sqrt{N_c^2(t) + N_s^2(t)}$$

$$\Theta(t) = -\tan^{-1}\left(\frac{N_s(t)}{N_c(t)}\right)$$

- 크기와 위상의 분포특성?

  - $R(t)$와 $\Theta(t)$는 서로 독립이며, $R(t)$는 Rayleigh 분포 특성을 갖고, $\Theta(t)$ 는 uniform 분포 특성을 갖는다.

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad \sigma^2 = 2N_0 B$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$