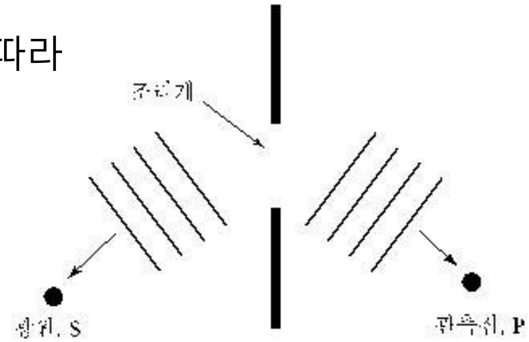
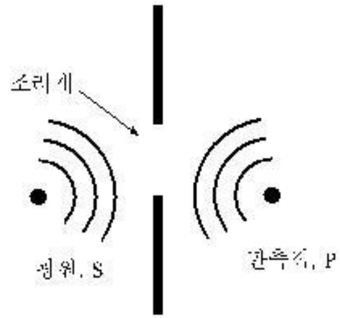
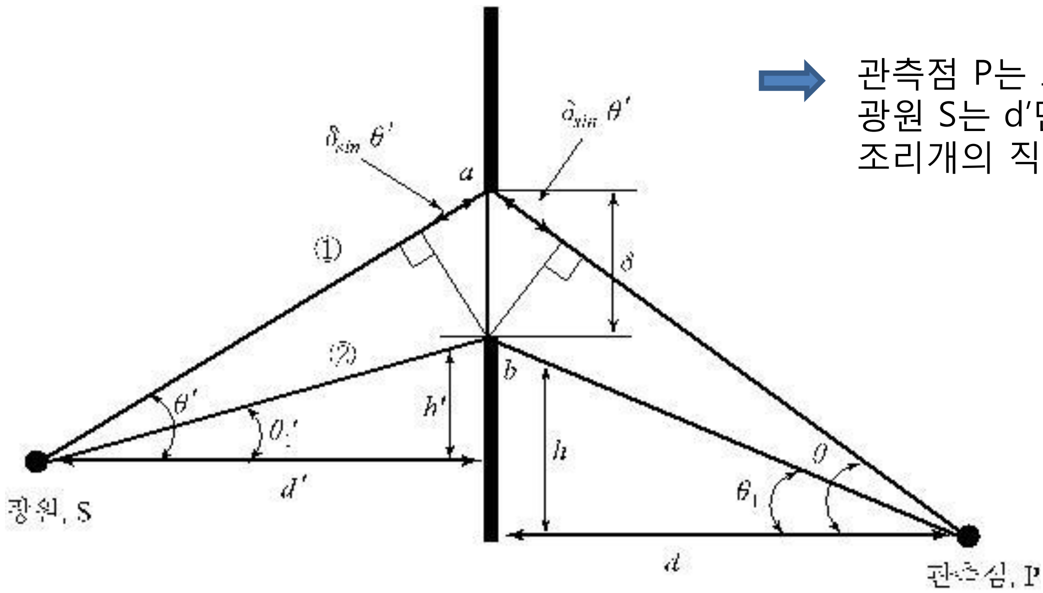
회절 : 조리개의 크기에 대한 광원과 관측점까지의 거리에 따라

- **프라운호퍼 회절** :
  조리개로부터 광원과 관측점까지의 거리가 비교적 멀다.
  빛을 평면파로 간주한 원거리장 회절
- **프레넬 회절** :
  조리개로부터 광원과 관측점 사이의 거리가 가까움.
  파면의 곡률을 무시할 수 없는 근접장 회절.







관측점 P는 조리개로부터 d만큼 떨어져 있고,
광원 S는 d′만큼 떨어져 있다.
조리개의 직경을 δ

조리개의 a 부분을 지나 관측점까지 가는 거리(경로 ①)와
b 부분을 지나 관측점까지 가는 거리(경로 ②)의 차는

$$\Delta = \sqrt{d'^2+(h'+\delta)^2}+\sqrt{d^2+(h+\delta)^2}-\sqrt{d'^2+h'^2}-\sqrt{d^2+h^2}$$

$$=\boxed{\left(\frac{h'}{d'}+\frac{h}{d}\right)}\delta+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'}+\frac{1}{d}\right)\delta^2+\cdots \qquad (11.2.1)$$

광원 및 관측점에서 조리개까지의 거리가 매우 먼 경우

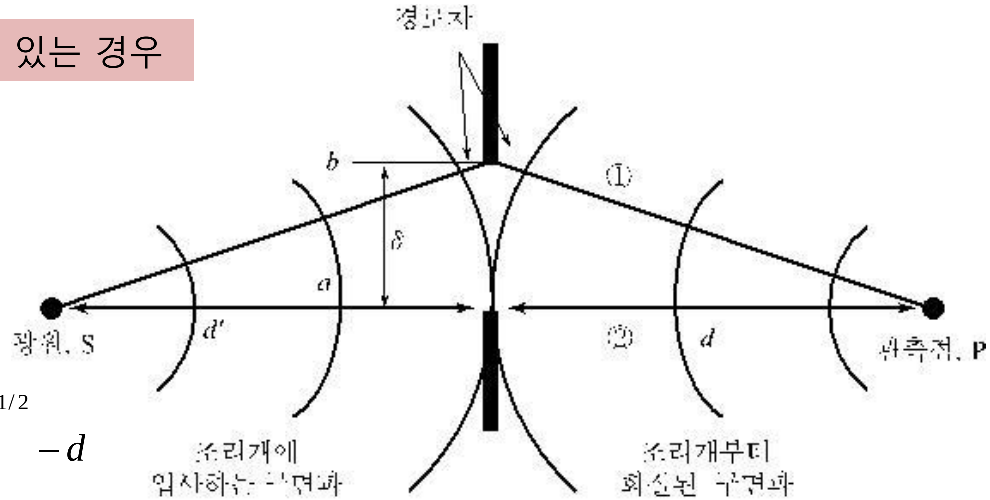
$$\theta'_1 \approx \theta' \,,\quad \theta_1 \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \tan\theta' = h'/d' = \sin\theta'$$

$$\Rightarrow \quad (h'/d')\delta = \delta\sin\theta'$$

$$(h'/d)\delta = \delta\sin\theta$$

오른쪽 첫 항은 빛이 통과하는 위치에 따른 경로차

광원 및 관측점이 빛의 파장에 비해 조리개에 매우 가까이 있는 경우



경로 ①과 경로 ②사이의 경로차는

$$\Delta = (\sqrt{d'^2+\delta^2} - d') + (\sqrt{d^2+\delta^2} - d)$$

$$= d'\left(1+\frac{\delta^2}{d'^2}\right)^{1/2} - d' + d\left(1+\frac{\delta^2}{d^2}\right)^{1/2} - d$$

$$= d'\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{d'^2} - \frac{1}{8}\frac{\delta^2}{d'^2} + \cdots\right)^{1/2} - d' + d\left(1+\frac{\delta^2}{d^2} - \frac{1}{8}\frac{\delta^2}{d^2} + \cdots\right)^{1/2} - d \qquad (11.2.2)$$

$\delta << d'$, $\delta << d$라면

경로차 $\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'}+\frac{1}{d'}\right)\delta^2$ (11.2.3) ➡ 식 (11.2.1)의 둘째 항 **파면의 곡률에 의한 것**

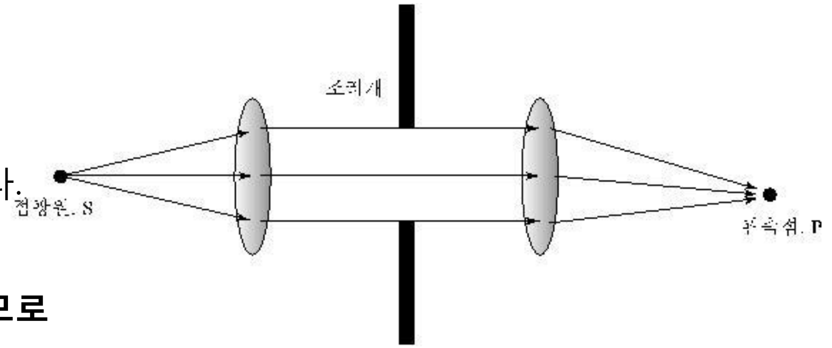
Δ의 두 번째 항이 빛의 파장에 비해 무시할 정도로 작다면, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'}+\frac{1}{d'}\right)\delta^2 << \lambda$

⇒ 입사하는 광파는 조리개 면에 대해 평면파로 취급할 수 있으며, 이 조건에서의 회절은 **프라운호퍼 회절로 간주**.

둘째 항을 무시할 수 없다면, 파면의 곡률을 고려을 고려하여 **프레넬 회절 공식을 사용하여 회절을 다룸.**

프라운호퍼 회절 유형

진동수 ω를 가지며 점광원, S로부터 나온 빛이
조리개 왼쪽의 볼록렌즈에 의하여 평행한 빛이 되어 조리개로 입사한다.
조리개를 통과한 평행한 빛은 조리개 뒤쪽에 있는
두 번째 렌즈에 의하여 스크린 위의 초점면에 회절상을 맺게 된다.
이때에 조리개에 입사하는 빛과 조리개를 지난 **회절파가 평행한 빛이므로**
프라운호퍼 회절조건을 만족하게 되며,
이로서 초점면에 만들어지는 회절무늬는 **프라운호퍼 회절무늬**이다.



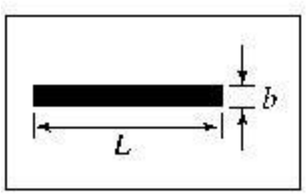
프라운호퍼 회절을 관찰하기 위한 장치도

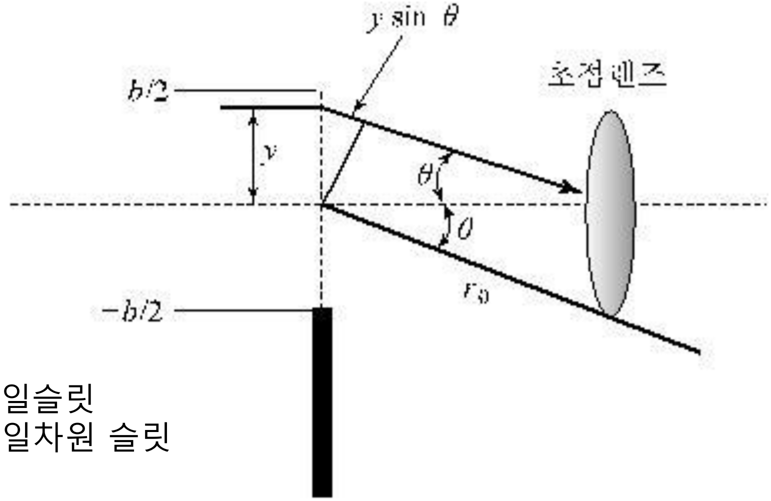
회절에 대한 결과를 얻기 위하여 프레넬 - 키르히호프 공식에서 다음과 같은 **가정**을 한다. 즉,
① 회절파의 각도 분포가 조리개 면에 대하여 거의 일정하기 때문에 경사인자 $[\cos(\hat{n},\hat{r})-\cos(\hat{n},\hat{r}')]$가 하나의 상수가 되어 적분기호 밖으로 보낼 수 있다.
② $e^{ikr'/r'}$ 역시 평면파의 형태이므로 거의 변하지 않는다.
③ 조리개 면에 대해 $e^{ikr/r}$에서 $1/r$은 평균값으로 대체할 수 있으며, e^{ikr} 에만 의존한다.

위 가정하에, 프레넬 - 키르히호프 공식은

$$U_p = C\oint_s e^{ikr}\,dA \qquad (11.2.5)$$

① 단일슬릿에 의한 회절





슬릿 면적소의 넓이 : $dA = Ldy$

슬릿에서 회절상이 얻어지는 관측점까지의 거리

$$r = r_0 + y\sin\theta$$

r_0 : 슬릿의 중심에서 관측점까지의 거리

y : 슬릿의 중심으로부터 슬릿 안에서
빛이 통과하는 곳까지의 수직거리

가로가 L , 세로가 b인 단일슬릿
L≫b인 관계를 만족하는 일차원 슬릿

회절에 대한 식

$$U_p = Ce^{ikr_0}\int_{-b/2}^{b/2} e^{iky\sin\theta} Ldy = Ce^{ikr_0} L \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kb\sin\theta\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)k\sin\theta} = C'\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right) \qquad (11.2.6)$$

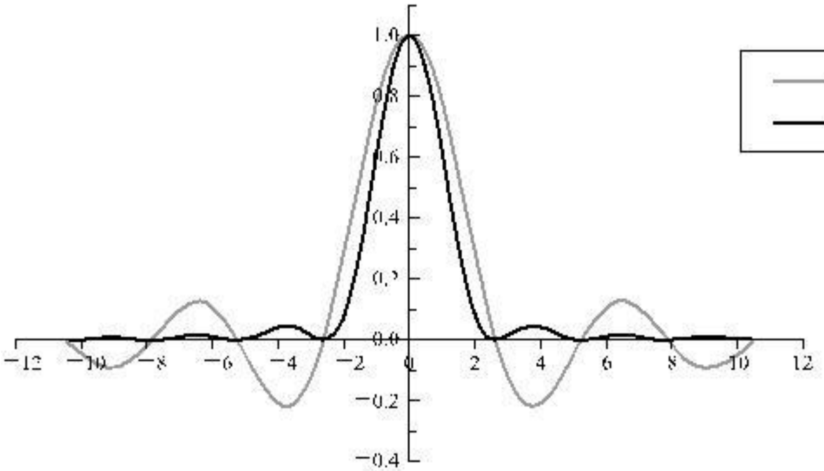
여기서 $C' = e^{ikr_0}LCb$, $\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta$

$C'(\sin\beta/\beta)$는 β에 의해 정해지는 방향으로 산란된 빛의 총 진폭

단일 슬릿에 의하여 회절된 빛의 세기

$$I = |U_p|^2 = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \qquad (11.2.7)$$

$I_0 = (CLb)^2$는 $\theta = 0$에서의 회절된 빛의 세기로서 슬릿의 면적의 제곱에 비례.



단일 슬릿에 의한 진폭의 분포 및 회절 무늬 세기

최대값 : $\beta = 0$

최소값(=0) : $\beta = \pm m\pi \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

첫 번째 최소값은 $\beta = \pi$인 경우로서

$$\sin\theta = \frac{2\pi}{kb} = \frac{\lambda}{b} \quad (11.2.8)$$

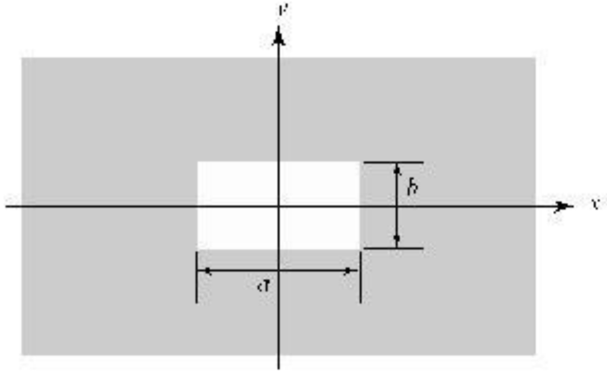
주어진 파장에 대해 슬릿의 폭 b가 작아지면 회절각이 커짐을 알 수 있다.

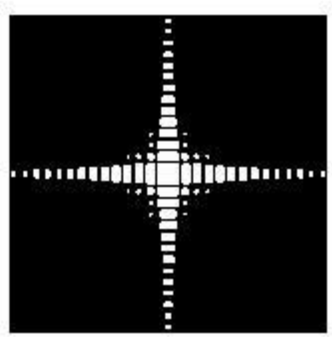
표 11.1 직사각형과 원형 조리개의 회절 무늬에 대한 최대값의 상대적 크기

	직사각형 조리개	원형 조리개
중앙의 최대 세기	1	1
첫 번째 최대세기	0.0496	0.0174
두 번째 최대세기	0.0168	0.0042
세 번째 최대세기	0.0083	0.0016

② 사각형 조리개에 의한 프라운호퍼 회절

한 개의 사각형 조리개에 의한 회절은 단일슬릿의 경우에서와 같은 방법으로 취급할 수 있으며, 차이점은 **단일슬릿이 일차원 회절이라면 사각형 슬릿은 2차원 회절**이 된다는 것





가로가 a, 세로가 b인 사각형 슬릿과 이에 의한 프라운호퍼 회절무늬를 나타낸 것이다.

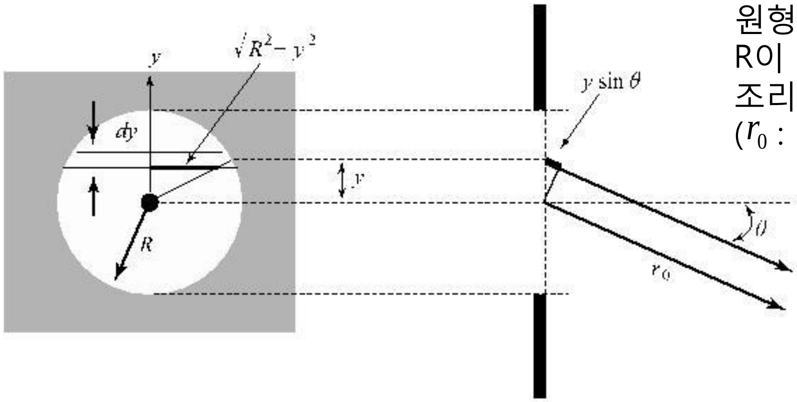
x, y방향으로 조리개의 폭이 각각 a, b이므로, 이 슬릿에 의한 회절무늬는 x-방향으로의 회절과 y-방향으로의 회절의 곱으로 나타남.

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta} \right)^2 \quad (11.2.9)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} ka \sin\phi \,, \quad \beta = \frac{1}{2} kb \sin\theta$$

ϕ, θ는 조리개의 중심에서 조리개 면에 수직방향으로부터 관측되어지는 회절무늬까지 측정된 것으로 회절무늬의 방향을 나타낸다.
이러한 사각형 조리개에서 $\alpha = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 와 $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ 인 곳에서 회절무늬의 세기는 최소값인 '영'이 된다.

③ 원형 조리개에 의한 프라운호퍼 회절



원형 조리개에 의한 회절은 그림에 나타낸 y를 적분 변수로 하여 계산을 한다.
R이 원형 조리개의 반경이라면, 원형 조리개의 미소 단면적은 $dA=\sqrt{R^2-y^2}\cdot 2\cdot dy$ 이다.
조리개에서 회절무늬가 생기는 스크린까지의 거리는 $r=r_0+y\sin\theta$
(r_0 : 조리개의 중심에서 회절무늬가 생기는 스크린까지의 거리)이므로 회절된 빛의 진폭은

$$U_p=Ce^{ikr_0}\int_{-R}^{R}e^{iky\sin\theta}2\sqrt{R^2-y^2}dy \qquad (11.2.10)$$

여기서 $u=\dfrac{y}{R}$, $\rho=kR\sin\theta$ 로 치환

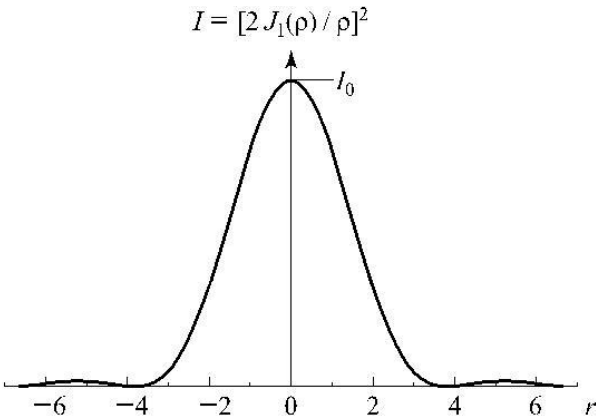
$$U_p=Ce^{ikr_0}R^2\int_{-1}^{1}e^{i\rho u}\sqrt{1-u^2}du\cdot 2$$

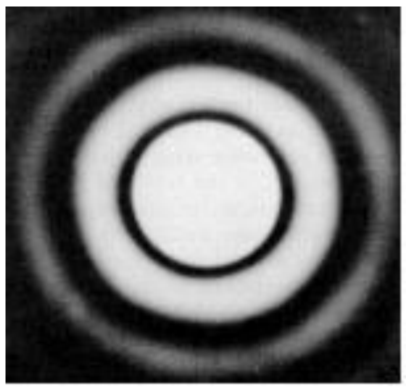
$$\int_{-1}^{1}e^{i\rho u}\sqrt{1-u^2}du=\frac{\pi J_1(\rho)}{\rho}$$

$J_1(\rho)$는 차수가 1차인 베셀함수.

$$U_p=|U|^2=I_0\left[\frac{2J_1(\rho)}{\rho}\right]^2 \qquad (11.2.12)$$

$I_0=(C\pi R^2)^2$로서 $\theta=0$인 곳에서의 빛의 세기.





회절무늬는 원형대칭이며,
에어리 원판(Airy disk)이라고 불리는 중앙의 밝은 무늬와
점차로 밝기가 흐려지는 원형의 둥근 띠들로 이뤄져 있다.
첫 번째의 어두운 원형 고리는 베셀 함수가 처음으로 "0"이 되는
ρ=0인 곳에 생기며, 수식적으로는

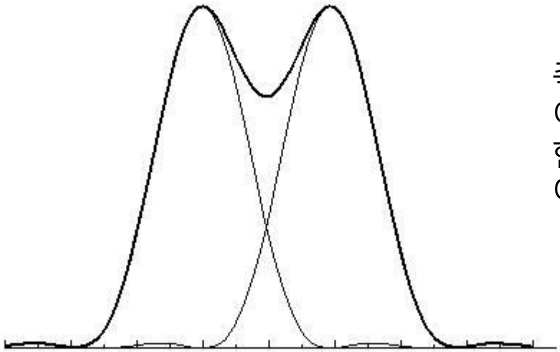
$$\sin\theta=\frac{3.832}{kR}=\frac{3.832\lambda}{2\pi R}=\frac{1.22\lambda}{D}\approx\theta$$ (θ가 작을 때)

D=2R는 원형조리개의 직경

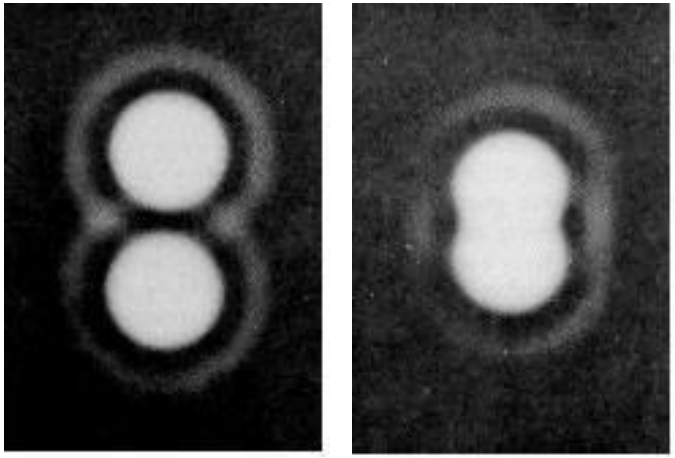
④ 광학적 분해능

원 거리에 있는 점이 망원렌즈나 카메라 렌즈의 초점면에 형성되는 상은
실제로 평행광선에 의해 형성되는 **프라운호퍼 회절**로서 이 경우에 조리개는 렌즈의 구경(opening)이다.
따라서 물체의 상은 여러 개의 에어리 원판을 합한 것으로, **상의 분해능은 각 에어리 원판의 크기에 달려 있다.**

광학계의 렌즈구경 또는 조리개의 구경을 D라고 하였을 경우에 에어리 원판의 각 반지름(angular radius)은 $1.22\lambda/D$가 된다.
이는 근사적으로 두 개의 동일한 점들이 간신히 분해될 정도의 최소 각 분리(angular separation)에 해당된다.

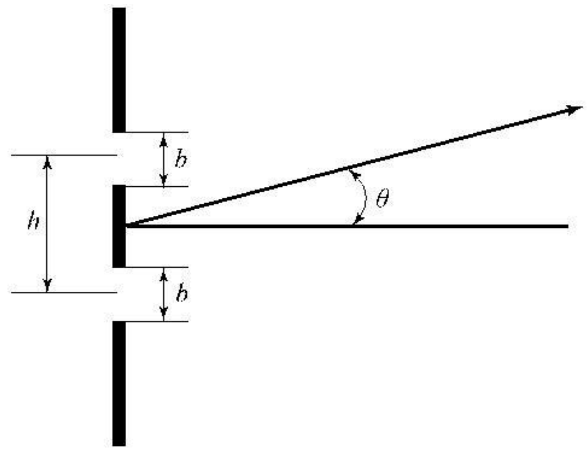


즉, 한 점에 대한 상(image)의 최대 세기가 다른 점에 대한 상의 최소 세기에 해당되며,
이러한 분해능의 정의를 **레일리 기준(Rayleigh criterion)**이라 한다.
한편, 레일리 기준에 의한 사각형 조리개의 최소 각 분리는 λ/b이며, b는 사각형 조리개의 폭이다.
이때 그림의 움폭 들어간 점에서의 세기는 최대 세기의 0.81 ($8/\pi^2=0.81$)배에 해당된다.



⑤ 이중슬릿에 의한 프라운호퍼 회절

슬릿의 폭이 b이고, 슬릿 사이의 간격이 h인 이중슬릿에 의한 회절.



스크린에 형성되는 상은
① **간섭에 의한 효과** ② **회절에 의한 효과**의 중첩 형태로 나타날 것이 예상

스크린 위의 한 관측점에서 측정되어지는 **빛의 세기**는
이중 슬릿에 의해서 형성되는 간섭무늬와
각각의 슬릿으로부터 발생되는 회절에 의해서 관측점에 도달하는 빛의 양에 의해서 결정
⇒ 관측되어지는 빛의 세기는 **간섭무늬의 진폭이 변조되는 형태**로 나타남.

이중슬릿에 대한 회절적분은

$$U \sim \int_A e^{iky\sin\theta}dy$$

$$= \int_0^b e^{iky\sin\theta}dy + \int_h^{h+b} e^{iky\sin\theta}dy$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta}(e^{ikb\sin\theta} - 1 + e^{ik(h+b)\sin\theta} - e^{ikh\sin\theta})$$

$$= b\left(\frac{e^{ikb\sin\theta} - 1}{ikb\sin\theta}\right)(1 + e^{ikh\sin\theta})$$

$$= b\left(\frac{e^{i\beta}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{2i\beta}\right)e^{i\gamma}(e^{-i\gamma} + e^{i\gamma})$$

$$= 2be^{i\beta}e^{i\gamma}\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\gamma \qquad (11.2.14)$$

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta\ , \quad \gamma = \frac{1}{2}kh\sin\theta$$

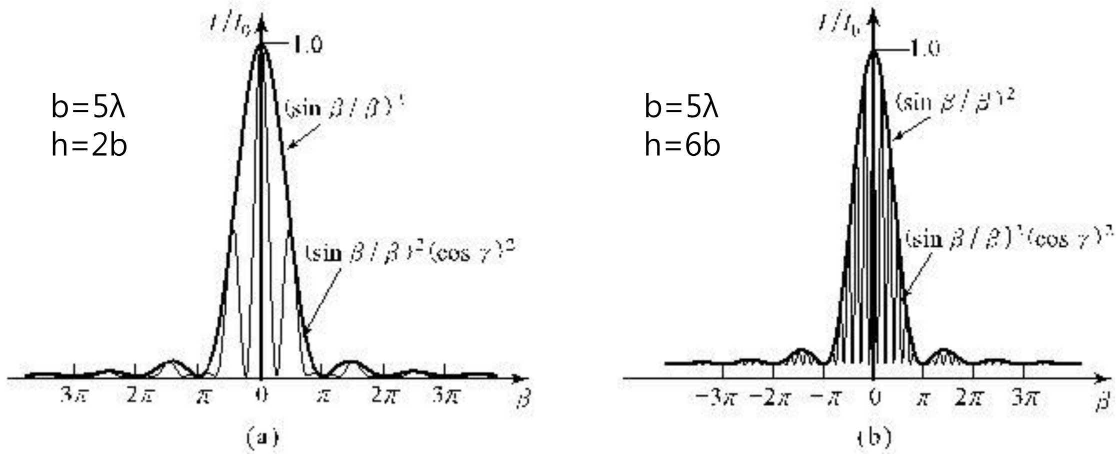
회절된 빛의 세기는 식 (11.2.14)의 제곱

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\gamma \qquad (11.2.15)$$

$$I_0 = 4b^2$$

스크린 위에 형성되는 빛의 세기는
이중슬릿으로부터 오는 빛들의 간섭에 의한 간섭효과($\cos^2\gamma$)와
$(\sin\beta/\beta)^2$에 의해 나타나는 회절효과의 곱으로 주어짐.

스크린 위에서 얻어지는 빛의 세기 분포



회절무늬의 모양은 이중 슬릿 조리개에서 슬릿의 폭 b와 슬릿사이의 간격 h에 의해서 결정된다.

① 큰 무늬의 세기가 최소가 되는 점 : $\beta = \pm m\pi \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\frac{1}{2}kb\sin\theta_m = \beta = m\pi \ , \quad b = \frac{m\lambda}{\sin\theta_m}$$: 슬릿의 폭 ⇒ 회절 효과

② 작은 무늬의 세기가 최대가 되는 점 : $\gamma = \pm m'\pi \quad (m' = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\frac{1}{2}kh\sin\theta_{m'} = \gamma = m'\pi \ , \quad h = \frac{m'\lambda}{\sin\theta_{m'}}$$: 슬릿의 간격 ⇒ 간섭 효과