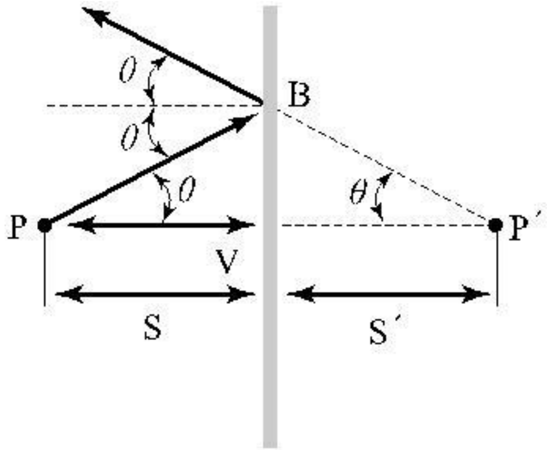
05. 기하광학 1

5.1 평면에서의 반사

기하광학 빛의 직진성을 이용하여 광선의 반사, 굴절 등에 관한 법칙을 취급



P : 점광원, 실제물체(실물점)
s(**물체거리**) : 물체에서 거울 면까지의 거리
P′ : 물체 P의 **상점**
s′(**상거리**) : 거울 면에서 상까지의 거리

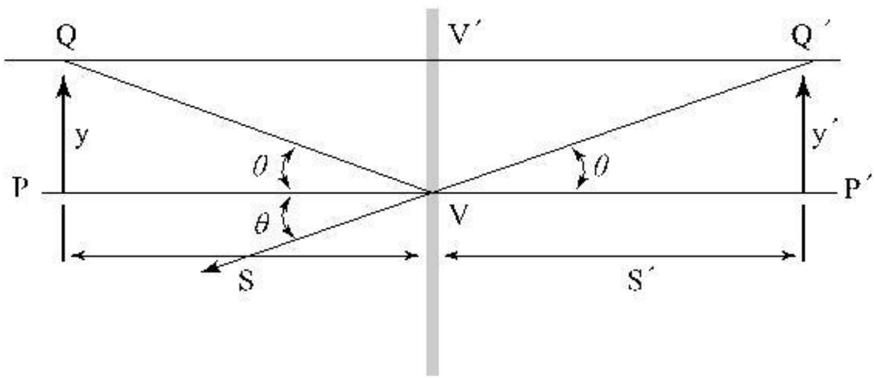
상의 위치 ⇒ 물체에서 퍼져 나오는 광선이 거울 면에서 반사해 들어오는 광선을 연장한 검은색 점선들이 만나는 점.

상(image) : 두 매질의 경계 면에서 반사되거나 굴절된 후에 보게 되는 광선의 진짜 또는 겉보기의 근원.

실상 : 실제로 상을 맺히는 지점을 빛이 통과할 때 형성.

허상 : 빛이 상이 맺히는 지점을 통과하지 않고 마치 상이 맺히는 지점으로부터 퍼져 나오는 것처럼 보여지는 상. 상의 위치에 놓인 스크린에 나타날 수 없다.

평면거울에 의한 상은 언제나 **허상**



물체가 반사면에 대해 입사하는 광선과 같은 방향에 있을 때, 물체거리 s는 (+)이고, 그렇지 않으면 (-)이다.

삼각형 PQV는 P′QV와 합동

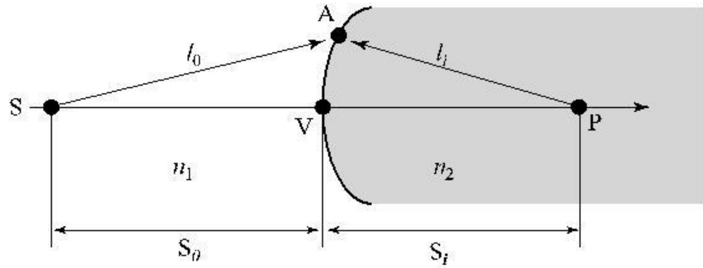
$s = -s'$ 물체거리는 상거리와 같다.

상의 배율 $m \equiv \dfrac{\text{상의 크기}}{\text{물체의 크기}} = \dfrac{y'}{y}$

$m = 1$ 평면거울에 비친 상은 물체와 똑같은 크기를 갖는다.

5.2 비구면에서의 굴절

점 모양의 물체 S로부터 나오는 구면파 모양의 광선이
굴절률이 각각 n_1, n_2인 두 매질의 경계면에 입사하는 경우를 생각해보자.



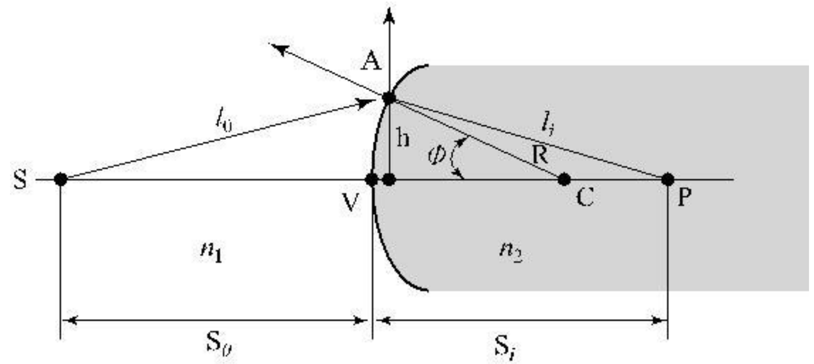
점 P에서 S의 완전한 상이 맺어지기 위해서
광선 SAP와 SVP가 점 P에 동시에 도달해야한다.
즉 두 광선이 통과한 광로의 길이가 같아야 한다.

$$l_0 n_1 + l_i n_2 = s_0 n_1 + s_i n_2 = \text{constant}$$

여기서, s_0와 s_i는 정축점(vertex) 로부터 측정한 물체 및 상까지의 거리이며,
위 식을 만족하는 면을 **카테시안 오보이드**(Cartesian Ovoid)이라 한다

구면에서의 굴절

곡률 반경이 R이며, C에 중심을 둔 구면상의 경계면에 광원 S로부터 입사하는 광선을 나타낸 것



광로 길이 $(\text{O.P.L}) = n_1 l_0 + n_2 l_i$

삼각형 SAC와 ACP에서

$$l_0 = \left[R^2 + (s_0 + R)^2 - 2R(s_0 + R)\cos\phi \right]^{1/2}$$

$$l_i = \left[R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi \right]^{1/2}$$

따라서, 광로 길이

$$(\text{O.P.L.}) = n_1 \left[R^2 + (s_0 + R)^2 - 2R(s_0 + R)\cos\phi \right]^{1/2} + n_2 \left[R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi \right]^{1/2}$$

점 A는 반경 R인 구면 위에 고정, ϕ는 하나의 위치 변수이다.

페르마의 원리 적용 $\dfrac{d(\text{O.P.L.})}{d\phi} = 0$

$$\frac{n_1 R(s_0 + R)\sin\phi}{l_0} - \frac{n_2 R(s_i - R)\sin\phi}{l_i} = 0$$

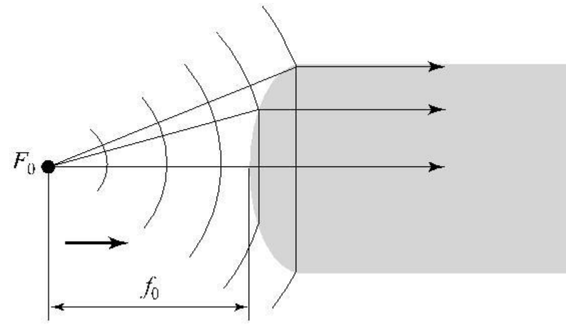
$$\boxed{\frac{n_1}{l_0} + \frac{n_2}{l_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{l_i} - \frac{n_1 s_0}{l_0} \right)}$$

곡률 반경이 일정한 구면에 입사한 광선과 굴절의 법칙에 의하여 S로부터 P에 도달하는 광선의 매개 변수들 사이에 만족해야할 관계식

근축광선 : 광축(선분 SP)에 가까운 각(ϕ가 매우 작으며, 따라서 h도 작다.)으로 입사하는 광선.

ϕ가 작을 경우(A가 정축점 V에 근접해 있을 경우 $\cos\phi \approx 1$, $l_o \approx s_o$, $l_i \approx s_i$

$$\frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

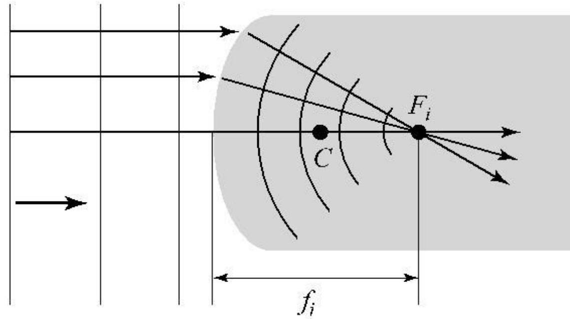


상이 무한대에 위치하는 경우 $s_0 = f_0$ $\Rightarrow$ **제 1초점거리, 물체 초점거리**

물체가 무한대에 위치하는 경우 $s_i = f_i$ $\Rightarrow$ **제 2초점거리, 상 초점거리**

$$s_i \to \infty , \quad s_0 = f_0 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R \qquad \text{물체 초점거리}$$

$$s_0 \to \infty , \quad s_i = f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \qquad \text{상 초점거리}$$

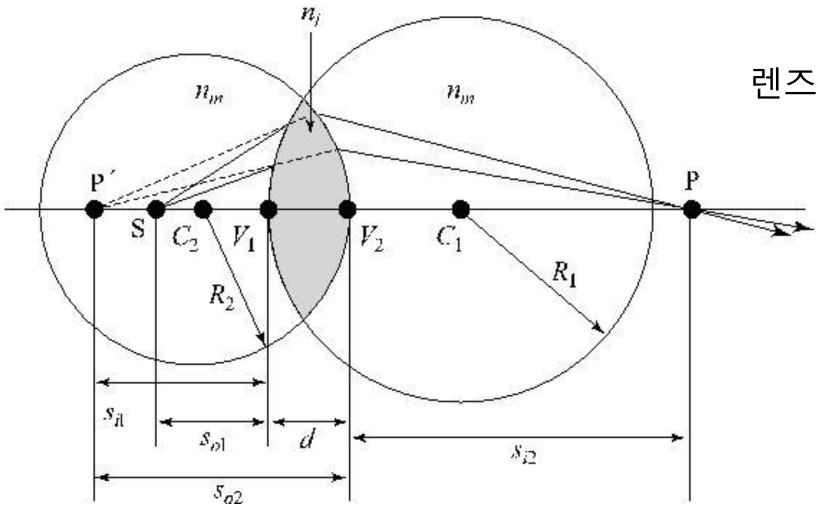


빛이 왼쪽으로부터 들어오는 경우에 구면에서의 굴절 및 얇은 렌즈에 의해 굴절되는 빛에 대한 부호의 약속	
s_o , f_o : V의 왼쪽이면 +	s_o , s_i + 이면, 실물체 또는 실상(real) − 이면, 허물체 또는 허상(ideal)
s_i , f_i : V의 오른쪽이면 +	
R : C가 V의 오른쪽이면 +	
y_o , y_i : 광축 위쪽에 있으면 +	
x_o : F_o의 왼쪽에 있으면 +	물체의 위치에서 제 1초점까지의 거리
x_i : F_i의 오른쪽에 있으면 +	제 2초점에서 상까지의 거리

5.3 얇은 렌즈에서의 굴절

얇은 렌즈

두께가 직경에 비해 아주 작은 렌즈
얇은 렌즈에 대한 초점, 물체의 위치, 상의 위치, 곡률반경 사이의 관계식 유도



렌즈를 둘러싸고 있는 매질의 굴절률을 n_m, 렌즈의 굴절률을 n_l이라 하자.

렌즈의 구면으로부터 s_{o1}의 거리에 있는 S로부터 나오는 근축광선은 V_1으로부터 제 1곡면에 대해

$$\frac{n_m}{s_{01}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1}$$

제 1곡면에 대해

$$\frac{n_l}{s_{02}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_l}{-s_{i1} + d} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2}$$

$$|s_{o2}| = |s_{i1}| + d$$

제 1곡면과 2곡면에 대한 식을 더하면

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = (n_l - n_m)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{n_l d}{(s_{i1} - d)s_{i1}}$$

s_{o2}는 렌즈 왼쪽에 있어 (+) $\quad |s_{o2}| = +s_{o2}$

s_{i1} 은 렌즈 왼쪽에 있지만 상의 위치가 빛의 진행방향과 반대로 있어 (-)임

$$|s_{i1}| = -s_{i1}$$

$$s_{o2} = -s_{i1} + d$$

5.3 얇은 렌즈에서의 굴절

$d \to 0$(매우 얇은 렌즈)이면, 식에서 두 번째 항은 무시.

렌즈 주위의 매질이 공기($n_m \approx 1$)인 경우 $n = \dfrac{n_l}{n_m} = n_l$

$s_{o1} = s_o$, $s_{i2} = s_i$

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

얇은 렌즈에 대한 렌즈 제작자 공식

한 개의 구면을 가지는 경우에서와 마찬가지로, s_o가 무한대로 이동한다면 상거리는 초점거리가 됨.

$$\lim_{s_o \to \infty} s_i = f_i$$

s_o에 대해서도 $\lim_{s_i \to \infty} s_o = f_o$

얇은 렌즈의 경우 $f_i = f_o \equiv f$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}$$

가우스 렌즈 공식

예제 1

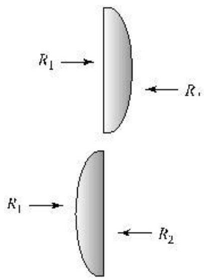
(a) 굴절률이 1.5이고, 곡률반경이 50 mm인 평면 볼록렌즈의 초점거리는 얼마인가?
(b) 렌즈에서 물체까지의 거리가 600 mm이면, 상의 위치는 렌즈에서 얼마나 떨어져 있을까?

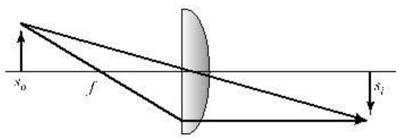
(a) $\dfrac{1}{f}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$ 에서

$R_1=\infty\ ,\ \ R_2=-50$ $\qquad \dfrac{1}{f}=(1.5-1.0)\left(\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{-50}\right)$

$R_1=50\ ,\ \ R_2=\infty$ $\qquad \dfrac{1}{f}=(1.5-1.0)\left(\dfrac{1}{50}-\dfrac{1}{\infty}\right)$

두 경우, f=100 mm로 같은 결과임.





(b) $\dfrac{1}{s_o}+\dfrac{1}{s_i}=\dfrac{1}{f}$ 에서

$$\frac{1}{600}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{100}$$

$s_i=120\text{ mm}$ (렌즈 오른쪽 120 mm지점에 실상이 나타남)

예제 2

곡률반경이 R이고 굴절률이 n인 평면 볼록렌즈와 양면 볼록렌즈가 있다. 두 렌즈의 초점거리를 비교하라.

평면 볼록렌즈(f_{pc}) $\qquad \dfrac{1}{f_{pc}}=(n-1)\left(\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{-R}\right)=\dfrac{(n-1)}{R}$

양면 볼록렌즈(f_{bc}) $\qquad \dfrac{1}{f_{bc}}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{-R}\right)=\dfrac{2(n-1)}{R}$

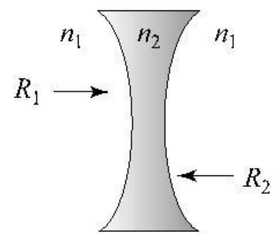
$\therefore\ \dfrac{f_{pc}}{f_{bc}}=2$ $\qquad$ 평면 볼록렌즈의 초점거리는 양면 볼록렌즈의 2배이다

예제 3

양면 오목렌즈의 곡률반경은 R_1=-10 mm, R_2=20 mm이며, 매질과 렌즈의 굴절률이 각각 n_1=1.33, n_2=1.66일 때, 초점거리를 구하라.

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$
$$=\left(\frac{1.66}{1.33}-1\right)\left(\frac{1}{-10}-\frac{1}{20}\right)$$

$$\therefore\ f=-26.9\text{ cm}$$



5.4 크기가 일정한 물체의 상

크기가 일정한 물체

광축을 기준으로 위쪽 (+), 아래쪽 (-)

$$y_o > 0\ ,\ \ y_i < 0$$

삼각형 AOF_i와 $P_2P_1F_i$는 서로 닮은꼴

$$\frac{y_o}{|y_i|} = \frac{f}{(s_i - f)} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_o}{|y_i|} = \frac{f}{x_i} \qquad (5.4.1)$$

삼각형 S_2S_1O와 P_2P_1O는 서로 닮은꼴

$$\frac{y_o}{|y_i|} = \frac{s_o}{s_i} \qquad (5.4.2)$$

삼각형 $S_2S_1F_o$와 BOF_o는 서로 닮은꼴

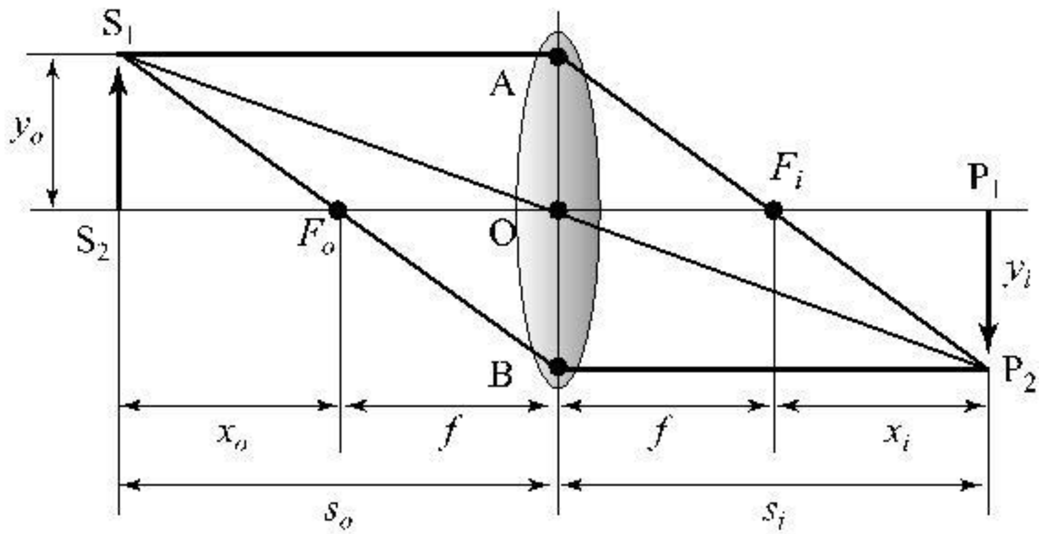
$$\frac{f}{(s_o - f)} = \frac{|y_i|}{y_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{x_o} = \frac{|y_i|}{y_o} \qquad (5.4.3)$$

식 (5.4.1)과 (5.4.2)로부터 $\frac{s_o}{s_i} = \frac{f}{s_i - f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i}$

식 (5.4.1)과 (5.4.3)으로부터

$$\frac{f}{x_o} = \frac{x_i}{x} \quad \rightarrow \quad x_o x_i = f^2$$

렌즈방정식의 "**뉴턴수식**"



5.4 크기가 일정한 물체의 상

횡배율(Transverse magnification: M_T)

임의의 광학계에 의하여 형성된 상이 광축과 수직방향으로의 크기와 이에 대응하는 실제물체 크기의 비

$$M_T \equiv \frac{y_i}{y_o} = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{f}{x_o} = -\frac{x_i}{f}$$

M_T의 값이 (+)이면 정립상, (-)이면 도립상.

횡배율(Longitudinal magnification: M_L)

광축 방향으로의 크기에 관계

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o}$$

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o} = \frac{d(f^2/x_o)}{dx_o} = \frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2$$

종배율의 크기는 횡배율의 제곱.

표 5.1 렌즈에 대한 부호

양	부 호	
	+	−
s_o	실물체(real object)	가상물체(virtual object)
s_i	실상(real image)	허상(virtual image)
f	수렴 렌즈(converging lens)	발산렌즈(diverging lens)
y_o	정립 물체(errect object)	도립물체(inverted object)
y_i	정립상(errect image)	도립상(inverted image)
M_T	정립상(errect image)	도립상(inverted image)

5.4 크기가 일정한 물체의 상

예제 4

초점거리가 25 cm인 렌즈의 중심으로부터 75 cm되는 지점에 길이가 3 cm인 물체가 놓여 있다. 상의 위치와 크기에 관한 정보를 가우스 방법과 뉴턴 방법으로 구하라.

가우스 방법

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i} \Rightarrow \frac{1}{25}=\frac{1}{75}+\frac{1}{s_i}$$

$$\therefore \; s_i = 37.5 \text{ cm}$$

횡배율

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o}=\frac{y_i}{y_o}=-\frac{37.5}{75}=-0.5$$

상의 크기

$$y_i = -0.5 y_o = -0.5\times 3 = -1.5 \text{ cm}$$

∴ 렌즈 중심으로부터 상까지의 거리는 37.5 cm이고,
물체의 원래 방향과 반대인
축소된 크기 1.5 cm를 가진 상을 얻는다.

뉴턴 방법

$s_o = f + x_o$, $s_i = f + x_i$ 에서

$$x_o = s_o - f = 75-25=50 \text{ cm}$$

뉴턴 공식

$$x_i x_o = f^2 \Rightarrow x_i = f^2 / x_o = 25^2/75 = 12.5 \text{ cm}$$

$$\therefore \; s_i = f + x_i = 25 + 12.5 = 37.5 \text{ cm}$$

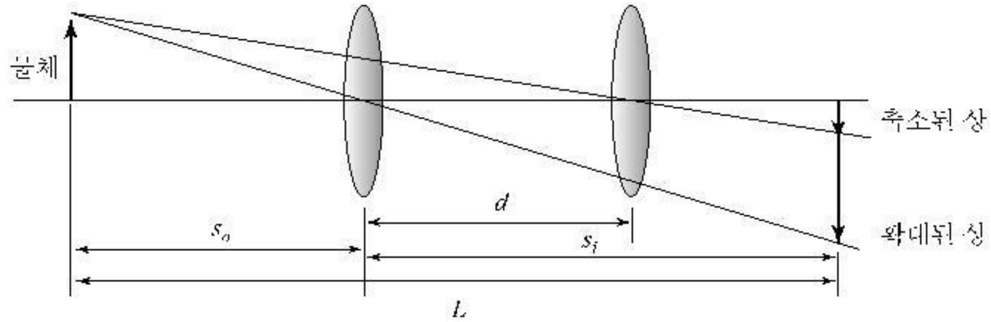
횡배율

$$M_T = -\frac{f}{x_o} = -\frac{25}{50} = -0.5$$

∴ 결과가 같다

예제 5

물체로부터 화면까지의 거리(L)가 일정할 때, 초점거리가 f인 렌즈를 사용하여 상을 맺는 두 지점이 있다. 이 위치를 확인하시오.



가우스 공식

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{s_o}+\frac{1}{(L-s_o)}=\frac{1}{f}$$

$$s_o^2 - L s_o + Lf = 0$$

근의 공식 $s_0 = \frac{1}{2}\left(L \pm \sqrt{L^2+4Lf}\right)$

따라서 렌즈에서 물체까지의 거리 s_o 는 두 가지 값을 가지며,
렌즈에서 상이 맺는 화면까지의 거리 s_i도
역시 두 개의 값을 갖는다.

렌즈의 초점거리를 구하는 데 이용(P. 92)